500 Russian

500个俄罗斯数学经典老题

Mathematical Classic Problems

◎ 刘培杰 主编

尝得春秋，披览不倦。凡大家之手迹，古典之珍品。
莫不采摭其华实，探涉其源流，钩纂枢要而编节之，改岁钥而成书。

香港凤凰卫视评论员梁文道先生说：我们常把经典和畅销书对立起来，
觉得后者虽能红极一时，终究是过眼云烟；而前者面世初时光华内敛，却能长明不息。
写书出书，当以铸经典为职志。

在罗马的贵族家庭会聘请启蒙师傅来带孩子们背诵、阅读和理解经典。
教师们的任务不是兜售自己的知识，而是忠实地教会孩子们读通经典。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

500 Russian

500个俄罗斯数学经典老题

Mathematical Classic Problems

◎ 刘培杰 主编

尝得 …… 品。
莫不采摭其 …… 岁钥而成书。

我们常把经典 …… ，终究是过眼
云烟 …… ，却能长明不息。
写书出书，当以铸经典为职志。

在罗马的贵族家庭会聘请蒙师傅来带孩子们背诵、阅读和理解经典。
教师们的任务不是兜售自己的知识，而是忠实地教会孩子们读通经典。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书收集了500余道俄罗斯数学经典老题。它将抽象的代数、几何知识隐含于通俗、生动、有趣的题目中。本书叙述严谨、清晰易懂,可激发学习兴趣,是提高数学水平,锻炼逻辑思维能力的理想用书。

本书适合于中学生,尤其是数学竞赛选手及数学爱好者。

图书在版编目(CIP)数据

500个俄罗斯数学经典老题/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.12

ISBN 978-7-5603-3153-9

Ⅰ.5… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①数学问题 Ⅳ.①01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第265295号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张18 字数293千字
版　　次 2011年1月第1版 2011年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3153-9
印　　数 1~3 000册
定　　价 28.00元

前言

这又是一本"老书",读书有点像穿衣服,时尚总在变,令人难以琢磨.

James Laver 在"In Taste and Fashion"中写时装,发明了"莱佛定律":

穿先进五年的服饰:无耻!

穿先进一年的服饰:大胆!

穿时下流行的服饰:漂亮!

穿一年前流行的服饰:邋遢!

穿十年前流行的服饰:丑陋!

穿二十年前流行的服饰:滑稽!

穿三十年前流行的服饰:好玩!

穿五十年前流行的服饰:古怪!

穿七十年前流行的服饰:妩媚!

穿一百年前流行的服饰:浪漫!

穿一百五十年前流行的服饰:绝妙!

服饰如此,书也亦然! 老书今天看也是时尚.

这又是一本与俄罗斯有关的老书.俄罗斯是一个伟大的民族,过去是,现在是,将来也还会是我们学习的榜样.作家莫言曾讲过一则历史典故:当年纳粹兵临城下,斯大林在莫斯科地铁里演讲时说:"希特勒不可能消灭俄国,因为他面对的是普希金的俄国,托尔斯泰的俄国,契诃夫的俄国."所以我们 20 世纪 50 年代大学前苏联,全盘照搬.

今天物质至上，享乐主义也兵临中国社会城下，大有围剿青年一代的势头．虽然我们也可以同样有信心地说，中国的数学种子是不会被消灭的，因为它面对的是祖冲之的中国，华罗庚的中国，陈景润的中国．但就数学而言，从13、14世纪中国数学的高峰期过了之后，我们已完全处于学生地位，想要超越只有先学习，拿来主义是最经济与理智的．

这还是一本充满习题的俄罗斯数学老书．

曾经有一个叫“孤岛访谈”的读书节目采访被称为“浪漫骑士”的作家王小波，当问道：“你想带一本什么样的书去‘孤岛？’”时，王小波说：

“我理解你的‘孤岛’，是要熬时间．所以，我想带一本能熬人的书——比方说带一本习题集，比方说吉米多维奇编的《数学分析习题集》，或者是一本几何学大辞典？这些都是最能熬人的书了．”今天的中国社会中有许多读书人被高速旋转的消费主义飞轮甩到了社会边缘，可以说在精神上是处于消费大潮的‘孤岛’之中，读点数学老书，解几道数学老题，想想当年的前苏联老大哥可能也是一种无奈中可接受的选择．

这是一本能够读后增强你的数学内功及搏击力的书．

数学考试像比武大赛来不得半点虚招假式．去年5名泰国拳手要挑战中国功夫，他们向中国武术界包括少林寺下战书，扬言如果中方应战，泰拳必将以5比0全胜中国功夫．面对蔑视和挑衅，少林寺以少林武僧以武养德，不会和社会上的人舞枪弄棒为由拒绝接招；中国武术协会则筹划在广东佛山举行比武．对此香港科技大学教授丁学良评论说：从某种意义上，对全世界普遍民众来讲，中国功夫就是中国的品牌，中国的商标．当中国的商标受人挑战的时候，中国的武术界如果还不出去应战，算哪门子事呢？鉴于此，我们现在读到的中国武术界的回话中，许多都是在忽悠世界人民和全中国人民．

中国的武术要走向世界，也要有个国际版．鉴于此，发表任何不出来和泰拳应战的话，都是在忽悠全国人民和全世界，都是欺骗性的言论．武术界拿了那么多纳税人的钱，如果坚持只搞内部比赛，不敢和别人比赛，是不是一种腐败？

也有人说不打是有武德，但武德是仅对赢者而言是有意义的，能赢而不急于赢是有德，必输者一定是无德的．

学数学就像习武总要出来比试一下，真正学的好的哪一个不是在书山题海中艰苦跋涉才到达彼岸的．所以想不解题或少解题是学不好的，而参与考试与人竞争也是不可回避的．丘成桐先生近日有言论批评中国某些学生到美国后不苦练自己的计算基本功，大谈特谈数学哲学，这本质上是投机取巧，是被真正学人所不屑的．

这是一本20世纪50年代前苏联数学高考题的汇集.今天我们出版它是为了对我们现在的高中数学教学有所启示.有人呼吁,我们要给那些优秀学生留下思考空间,不能像现在高中数学的训练目标那样让学生“一看就会,一做就对”.

俄罗斯高考数学是4个小时,法国巴黎高等师范学校数学科入学考试也是4个小时,而挪威高考数学科则为6个小时.人家考的是能不能而不是快不快,所以要追求数学的真正方法与解题技巧的培养,而不要像现在流行的那些公开课所展示的那些花拳绣腿一样在热热闹闹中一无所有.

当然在新世纪我们对前苏联的教育要有所批判,不能像过去一样,全盘吸收,并且在批判中也可以反省我们自己.在极权的社会中人被缩略为集体中的一分子,人不再以个体的面目出现,而只是成为一个大机器中的小小螺丝钉.以塞亚·伯林在《苏联的心灵》一书中,对将教师命名为“人类灵魂工程师”提出了异议,他认为这样人完全如螺丝钉一般可以被调适、维修、拆卸甚至毁弃.老师的任务就是“使得人们只会提出很容易获得答案的问题,让人们在成长过程中因最小的摩擦而顺其自然地适应所处的社会”.严厉降低、压抑、管制并最终消灭诸如好奇心,探索意识,创造和思考美好事物的愿望,寻求真理本身的愿望.因为这些都是“有害的”,它们会“扩大人们之间的差异,而不利于一个整体性社会的和谐发展.”

今天我们也在努力打破大一统的教育局面.数学奥林匹克绚烂一时又归于平淡之后,自主招生之风行又为多样化的人才选拔带来了一股清新的空气.多样化的学习方式,多样性的人才成长模式将来一定会带来图书市场的百花齐放.我们数学工作室将会在引介国内外高考数学及数学竞赛试题与辅导和国内自主招生数学考试辅导方面有系列动作.

英国有一位老牧师性情耿直,很讲道义.替自己藏书票上写题词力求掷地铿锵,言简意赅,终于想到四句堂堂正正的警句:“大胆借书;小心护书;耐心读书,毅然还书.”(Borrow bravely; keep carefully; peruse patiently; return righteously)仿此,我们也有四句:勤奋读书;大胆出书;小心编书;耐心卖书.

刘培杰

2011年元旦

于哈工大

目　录

1

代数式的变换

☞ 分解因式(1 ~ 9)

1 $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$.

解 A① $= b^2c+bc^2+c^2a-ca^2-ab(a+b)=$

$b^2c-ca^2+bc^2+c^2a-ab(a+b)=$

$c(b^2-a^2)+c^2(b+a)-ab(a+b)=$

$(a+b)[c(b-a)+c^2-ab]=$

$(a+b)(cb-ca+c^2-ab)=$

$(a+b)(cb+c^2-ca-ab)=$

$(a+b)[c(b+c)-a(c+b)]=$

$(a+b)(b+c)(c-a)$

2 $[(x^2+y^2)(a^2+b^2)+4abxy]^2-4[xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2)]^2$.

解 $A=(x^2+y^2)^2(a^2+b^2)^2+8abxy(x^2+y^2)(a^2+b^2)+16a^2b^2x^2y^2-$

$4x^2y^2(a^2+b^2)^2-8abxy(a^2+b^2)(x^2+y^2)-4a^2b^2(x^2+y^2)^2=$

$(x^2+y^2)^2(a^2+b^2)^2-4x^2y^2(a^2+b^2)^2-4a^2b^2(x^2+y^2)^2+$

$16a^2b^2x^2y^2=$

$(a^2+b^2)^2[(x^2+y^2)^2-4x^2y^2]-4a^2b^2[(x^2+y^2)^2-4x^2y^2]=$

$[(x^2+y^2)^2-4x^2y^2][(a^2+b^2)^2-4a^2b^2]=$

$(x^2-y^2)^2(a^2-b^2)^2=(a+b)^2(a-b)^2(x+y)^2(x-y)^2$②

---

① A 表示题中所给代数式必须的简化.

② 这里也可不用两项和的平方公式,而用平方差的公式,不过这在解题时要写得更长一些.

❸ $2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-4abc$.

解 $A=2a^2b+4ab^2-a^2c-2abc+ac^2+2bc^2-4b^2c-2abc=$
$2ab(a+2b)-ac(a+2b)+c^2(a+2b)-2bc(a+2b)=$
$(a+2b)(2ab-ac+c^2-2bc)=$
$(a+2b)[a(2b-c)-c(2b-c)]=(a+2b)(2b-c)(a-c)$

❹ $y(x-2z)^2+8xyz+x(y-2z)^2-2z(x+y)^2$.

解 $A=yx^2-4xyz+4yz^2+8xyz+xy^2-4xyz+4xz^2-2z(x+y)^2=$
$yx^2+xy^2+4xz^2+4yz^2-2z(x+y)^2=$
$xy(x+y)+4z^2(x+y)-2z(x+y)^2=$
$(x+y)[xy+4z^2-2z(x+y)]=$
$(x+y)(xy-2zy-2zx+4z^2)=$
$(x+y)[y(x-2z)-2z(x-2z)]=$
$(x+y)(x-2z)(y-2z)$

❺ $8x^3(y+z)-y^3(z+2x)-z^3(2x-y)$.

解 $A=8x^3(y+z)-y^3z-2xy^3-2xz^3+yz^3=$
$8x^3(y+z)-y^3z+yz^3-2xy^3-2xz^3=$
$8x^3(y+z)-yz(y^2-z^2)-2x(y^3+z^3)=$
$(y+z)[8x^3-yz(y-z)-2x(y^2-yz+z^2)]=$
$(y+z)(8x^3-y^2z+yz^2-2xy^2+2xyz-2xz^2)=$
$(y+z)(8x^3-2xy^2+2xyz-y^2z-2xz^2+yz^2)=$
$(y+z)[2x(4x^2-y^2)+yz(2x-y)-z^2(2x-y)]=$
$(y+z)(2x-y)[2x(2x+y)+yz-z^2]=$
$(y+z)(2x-y)(4x^2+2xy+yz-z^2)=$
$(y+z)(2x-y)(4x^2-z^2+2xy+yz)=$
$(y+z)(2x-y)[(2x+z)(2x-z)+y(2x+z)]=$
$(y+z)(2x-y)(2x+z)(2x+y-z)$

❻ $(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$.

解 $A=[(x^2+y^2)+(z^2-x^2)][(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)(z^2-x^2)+(z^2-x^2)^2]-$
$(y^2+z^2)^3=$
$(y^2+z^2)[(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)(z^2-x^2)+(z^2-x^2)^2]-(y^2+z^2)^3=$

$(y^2+z^2)[(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)(z^2-x^2)+(z^2-x^2)^2-(y^2+z^2)^2]=$

$(y^2+z^2)[(x^2+y^2)(x^2+y^2-z^2+x^2)+(z^2-x^2+y^2+z^2)(z^2-$

$x^2-y^2-z^2)]=$

$(y^2+z^2)[(x^2+y^2)(2x^2+y^2-z^2)-(x^2+y^2)(2z^2-x^2+y^2)]=$

$(y^2+z^2)(x^2+y^2)(2x^2+y^2-z^2-2z^2+x^2-y^2)=$

$(y^2+z^2)(x^2+y^2)(3x^2-3z^2)=$

$3(x^2+y^2)(x^2-z^2)(y^2+z^2)=$

$3(x-z)(x+z)(x^2+y^2)(y^2+y^2)$

7 x^3+5x^2+3x-9.

解 $A=x^3-1+5x^2-5+3x-3=$

$(x-1)(x^2+x+1)+5(x^2-1)+3(x-1)=$

$(x-1)(x^2+x+1+5x+5+3)=$

$(x-1)(x^2+6x+9)=$

$(x-1)(x+3)^2$

8 $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

解 $A=[(b-a)+(a-c)]^3-(a-c)^3-(b-a)^3=$

$(b-a)^3+3(b-a)(a-c)[(b-a)+(a-c)]+(a-c)^3-$

$(a-c)^3-(b-a)^3=$

$3(a-b)(b-c)(c-a)$

9 $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$.

解 $A=(x^4+y^4-2x^2y^2)-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2=$

$(x^2-y^2)^2-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2=$

$[(x^2-y^2)-z^2]^2-4y^2z^2=$

$(x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)=$

$[x^2-(y+z)^2][x^2-(y-z)^2]=$

$(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)$

10 当 a,b 为何值时,多项式

$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b$$

能被 x^2-3x+2 整除?

解 把三项式 x^2-3x+2 因式分解，我们得到：$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. 由此很明显，为了已知多项式能被 x^2-3x+2 整除，必须也能被 $x-1$ 和 $x-2$ 整除. 但根据别祖定理(Безу)①，多项式被 $x-a$ 除后所得的剩余，就等于这个多项中当 $x=a$ 时的数值. 应用这个定理于二项式 $x-1$ 和 $x-2$，我们就会得到：$1-3+3+a+b$ 和 $16-24+12+2a+b$. 为了使整除是可能的，必须是这些剩余等于零. 由此我们可得出求 a 和 b 的一个联立方程

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=-4 \end{cases}$$

解这个联立方程，我们得到 $a=-3, b=2$.

⓫ 当 a, b 为何值时，多项式

$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b$$

能被 x^2-3x+4 整除?

解 这个三项式的判别式等于 $3^2-4\cdot4=-7<0$. 因此三项式的根是复数，在这种情况下虽然可以应用别祖定理，但这会使我们遇到很繁杂的计算. 为了解这个题，我们用多项式的除法规则以已给的三项式来除这多项式

$$\begin{array}{rl} x^4-3x^3+3x^2+ax+b & \left|\ \dfrac{x^2-3x+4}{x^2-1}\right. \\ +)\ -x^4+3x^3-4x^2 \qquad\qquad & \\ -x^2+ax+b & \\ +)\qquad x^2-3x+4 & \\ \hline (a-3)x+b+4 & \end{array}$$

因为在剩余中我们得到的是一个比除数的次数低的多项式，所以继续施以除法是不可能的了. 为了多项式可能被三项式整除，必须有使这剩余为零的 a 和 b. 很明显，为此充分的条件(而且是必须的)是要 $a=3$ 和 $b=-4$，即需要使 x 的系数和常数项为零，即有 $a-3=0, b+4=0$. 这种方法也可用来解上一题.

⓬ 证明：多项式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 可被 $x+y+z$ 整除.

证 用 $-y-z$ 来代替所给式中的 x. 我们就会得到

---

① Безу 定理亦即剩余定理. —— 译注

$$(-y-z)^3+y^3+z^3-3yz(-y-z)=$$
$$-(y+z)^3+y^3+z^3+3y^2z+3yz^2=$$
$$-(y+z)^3+(y+z)^3=0$$

根据别祖定理,我们可以得出结论,多项式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$,所以被 $x-(-y-z)=x+y+z$ 整除.

⑬ 求多项式

$$(1+4x-4x^2)^{175}(1+2x)^5(1-3x+x^2+2x^3)^{149}$$

内括弧展开后的系数和.

解 三个已知多项式的乘积是一个 $2\times175+1\times5+3\times149=802$ 次的多项式,因此我们可以写成

$$(1+4x-4x^2)^{175}(1+2x)^5(1-3x+x^2+2x^3)^{149}=$$
$$A_1x^{802}+A_2x^{801}+\cdots+A_{803}$$

在这个等式中命 $x=1$,我们得到

$$A_1+A_2+\cdots+A_{803}=1^{175}\cdot3^5\cdot1^{149}=243$$

⑭ 证明$\sqrt{2}$的无理性.

证 因为 $1^2<2$,而 $2^2>2$,并且整数 $k>2$,必有 $k^2>2$,所以$\sqrt{2}$不是整数.现在我们证明无论什么样的有理分数$\frac{m}{n}$(m 和 n 为自然数)都不等于$\sqrt{2}$.为了证明这个,我们假设存在着$\frac{m^2}{n^2}=2$的分数$\frac{m}{n}$,并且这分数是不可通约的,即 m 和 n 没有公因子.从$\frac{m^2}{n^2}=2$的关系中得出 $m^2=2n^2$,这表明了 m 是一个偶数.

我们用 $m=2p$ 代入等式 $m^2=2n^2$ 中得到 $4p^2=2n^2$ 或 $n^2=2p^2$.但在这种情况下 n 也是一个偶数了,但这是不可能的,因为我们假设了分数$\frac{m}{n}$是不可约的.

⑮ 为什么$(\sqrt[3]{2})^3=2$?

解 根据立方根之定义.

❶❻ 为什么(1) $a^0=1$;(2) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$;(3) $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$?

解 (1) 根据数之方次为零的定义($a\neq 0$);

(2) 根据数之方次为分数的定义;

(3) 根据数之方次为负数的定义($a\neq 0$).

❶❼ $\sqrt{a^2}$ 的算术值等于什么?

解 $\sqrt{a^2}=|a|$.或另外:若 $a\geqslant 0$,则$\sqrt{a^2}=a$;若 $a\leqslant 0$,则$\sqrt{a^2}=-a$.

❶❽ 何时公式$\sqrt{\frac{ac^4}{b^2}}=-\frac{c^2}{b}\sqrt{a}$ 正确成立?

解 当 $a\geqslant 0$ 和 $b<0$ 时,实际上$\sqrt{\frac{ac^4}{b^2}}=\frac{\sqrt{c^4}}{\sqrt{b^2}}\sqrt{a}$.

这里所有的根我们假定是算术根,因此$\sqrt{a}\geqslant 0, a\geqslant 0, \sqrt{c^4}=c^2\geqslant 0$, $\sqrt{b^2}=|b|=-b>0$(参看 17 题).

☞ 化简下列各式(19 ~ 63)

❶❾ $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

解

$$A=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{(c-a)[(a+b)(b+c)+(a-b)(b-c)]}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+$$

$$\frac{(c-a)(ab+b^2+ac+bc+ab-b^2-ac+bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{(c-a)(2ab+2bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$\frac{(a-b)(b+c)+(b-c)(a+b)}{(a+b)(b+c)}+\frac{2b(c-a)}{(a+b)(b+c)}=$$

$$\frac{ab-b^2+ac-bc+ab-ac+b^2-bc}{(a+b)(b+c)}+\frac{2b(c-a)}{(a+b)(b+c)}=$$

$$\frac{2ab-2bc}{(a+b)(b+c)}+\frac{2bc-2ab}{(a+b)(b+c)}=0$$

20 $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

解 $A=\dfrac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}=$

$\dfrac{a^2-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}=$

$\dfrac{-(a+c)}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}=0$

21 $\dfrac{y^2z^2}{b^2c^2}+\dfrac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\dfrac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$.

解 $A=\dfrac{y^2z^2}{b^2c^2}+\dfrac{c^2(y^2-b^2)(z^2-b^2)-b^2(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{b^2c^2(b^2-c^2)}=$

$\dfrac{y^2z^2}{b^2c^2}+\dfrac{c^2y^2z^2-c^2b^2z^2-c^2y^2b^2}{b^2c^2(b^2-c^2)}+$

$\dfrac{c^2b^4-b^2y^2z^2+b^2c^2z^2+b^2y^2c^2-b^2c^4}{b^2c^2(b^2-c^2)}=$

$\dfrac{y^2z^2}{b^2c^2}+\dfrac{c^2y^2z^2-b^2y^2z^2+c^2b^4-b^2c^4}{b^2c^2(b^2-c^2)}=$

$\dfrac{y^2z^2}{b^2c^2}+\dfrac{y^2z^2(c^2-b^2)+b^2c^2(b^2-c^2)}{b^2c^2(b^2-c^2)}=$

$\dfrac{y^2z^2}{b^2c^2}+\dfrac{(b^2-c^2)(-y^2z^2+b^2c^2)}{b^2c^2(b^2-c^2)}=$

$\dfrac{y^2z^2}{b^2c^2}+\dfrac{-y^2z^2+b^2c^2}{b^2c^2}=\dfrac{y^2z^2-y^2z^2+b^2c^2}{b^2c^2}=\dfrac{b^2c^2}{b^2c^2}=1$

22 $\dfrac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x]-(a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2}\cdot$

$\dfrac{1}{1-\left[\dfrac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x}\right]^2}$.

解 $A=\dfrac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x]-(a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2-[a+b+(1+ab)x]^2}=$

$\dfrac{(1+ab)^2+(1+ab)(a+b)x-(a+b)^2-(a+b)(1+ab)x}{(1+ab)^2-(1+ab)^2x^2+(a+b)^2x^2-(a+b)^2}=$

$$\frac{(1+ab)^2-(a+b)^2}{(1+ab)^2-(1+ab)^2x^2+(a+b)^2x^2-(a+b)^2}=$$

$$\frac{(1+ab)^2-(a+b)^2}{(1+ab)^2(1-x^2)-(a+b)^2(1-x^2)}=$$

$$\frac{(1+ab)^2-(a+b)^2}{(1-x^2)[(1+ab)^2-(a+b)^2]}=\frac{1}{1-x^2}$$

23 $\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

解 $A=\frac{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}{(x^2+1-x)(x^2+1+x)}+\frac{(x-x^2+1)(x+x^2-1)}{[x(x+1)-1][x(x+1)+1]}+$

$$\frac{[x(x-1)-1][x(x-1)+1]}{(x^2-x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}+\frac{x-x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=$$

$$\frac{x^2+x-1+x-x^2+1+x^2-x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}=1$$

24 $\frac{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}$.

解 可得

$$\frac{(x^2-z^2)[(x^2-y^2)^2-(x^2-y^2)(y^2-z^2)+(y^2-z^2)^2]}{[(x-y)+(y-z)][(x-y)^2-(x-y)(y-z)+(y-z)^2]+(z-x)^3}+$$

$$\frac{(z^2-x^2)^3}{[(x-y)+(y-z)][(x-y)^2-(x-y)(y-z)+(y-z)^2]+(z-x)^3}=$$

$$\frac{(x^2-z^2)[(x^2-y^2)(x^2-y^2-y^2+z^2)+(y^2-z^2)^2-(z^2-x^2)^2]}{(x-z)[(x-y)(x-y-y+z)+(y-z)^2-(z-x)^2]}=$$

$$\frac{(x+z)[(x^2-y^2)(x^2-2y^2+z^2)+(y^2-z^2-z^2+x^2)(y^2-z^2+z^2-x^2)]}{(x-y)(x-2y+z)+(y-z-z+x)(y-z+z-x)}=$$

$$\frac{(x+z)(x^2-y^2)[(x^2-2y^2+z^2)-(y^2-2z^2+x^2)]}{(x-y)[(x-2y+z)-(y-2z+x)]}=$$

$$\frac{(x+z)(x+y)(3z^2-3y^2)}{3z-3y}=(x+y)(y+z)(z+x)$$

25 $\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}$.

解　$A=\left[\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x+y})^2}{\sqrt{x+y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right]^{-2}-\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}=$

$\left[\dfrac{\sqrt{x+y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x+2\sqrt{xy}+y-x-y}\right]^2-\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}=$

$\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(2\sqrt{xy})^2}-\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}=$

$\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}\cdot\left[\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2\sqrt{xy}}-1\right]=$

$\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}\left(\dfrac{x+2\sqrt{xy}+y}{2\sqrt{xy}}-1\right)=\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}\cdot\left(\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}+1-1\right)=$

$\left(\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}\right)^2=\dfrac{(x+y)^2}{4xy}$

26 $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}$.

解　$A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}-a^{\frac{2}{3}}=$

$\dfrac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+2b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{2}{3}}+2b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}-a^{\frac{2}{3}}=$

$a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0$

27 $\dfrac{\dfrac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}}{\dfrac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}}$.

解　$A=\left[\dfrac{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{2b})^3}{(\sqrt[3]{a})^2-(\sqrt[3]{2b})^2}+\dfrac{\sqrt[3]{2ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})^2}\right]:\dfrac{(a+b)(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})}{a+b}=$

$\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2ab}+\sqrt[3]{4b^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}}+\dfrac{\sqrt[3]{2ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}}\right):(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})=$

$\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{2ab}+\sqrt[3]{4b^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}}:(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})=$