

高等数学

(干部班适用)

卷 一

王渠芳 王载舆 刘宝三 编
胡淑洪 程紫明 钱文侠

人民教育出版社



高 等 数 学

(干部班适用)

卷 一

王 渠 芳 王 载 舆 刘 宝 三 编
胡 淑 洪 程 紫 明 钱 文 侠

人 民 教 育 出 版 社

本书初版出版于 1958 年, 1960 年由原编者根据一年以上的试用作了一次修订, 除了在编写方面仍保持了原来的特点外, 这次修改最大的改动就是把全书分为二卷出版。卷一包括平面解析几何和一元函数的微积分学。后边还有附录包括行列式及基本公式。卷二包括空间解析几何、多元函数的微积分学及级数。此外在有些章、节中, 对某些概念的提法也作了改动, 同时在叙述和推导方面也比过去更为详细, 以适应自学者的需要。

本书不仅适用于干部班学员, 而且也可作为业余大学的教材以及干部的自学用书。

高 等 数 学

(干部班适用)

卷 一

王 桀 芳 王 载 舆 刘 宝 三 编
胡 淑 洪 程 紫 明 钱 文 侠

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版
新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行
湖 南 省 新 华 印 刷 二 厂 印 装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.625 字数 318,000
1958 年 9 月 第 1 版 1960 年 8 月 第 2 版 1981 年 9 月 第 11 次印刷
印数 211,001—228,500
书号 13012·0528 定价 1.10 元

問題和习题

第八章 导数及其应用..... 133

8-1 均匀变化 8-2 一般变化规律的变化率 8-3 导数 8-4 导数的几何意义 8-5 导数公式 8-6 常量的导数 8-7 和、积、商的导数 8-8 复合函数的导数 8-9 幂函数的导数 8-10 隐函数及其导数 8-11 中值公式 8-12 函数的增减性 8-13 函数的极值 8-14 函数在区间上的最大值和最小值 8-15 导数公式(續) 8-16 对数函数的导数 8-17 指数函数的导数 8-18 三角函数的导数 8-19 反三角函数的导数 8-20 高阶导数 8-21 曲线的凹凸 8-22 极值的第二判定法 8-23 研究函数的一般程序举例 8-24 参量所确定的函数及其导数 8-25 广义中值公式 8-26 不定式的定值法则 8-27* 图解微分法 总结 問題和习题

第九章 微分及其应用..... 187

9-1 微分及其几何意义 9-2 微分在近似计算上的应用 9-3 导数的微分形式记号 微分运算公式 9-4 弧长的微分 9-5 曲率 9-6 曲率半径 曲率中心 曲率圆 9-7 渐屈线及渐伸线 9-8 台劳公式 总结 問題和习题

第十章 不定积分..... 208

10-1 原函数及不定积分概念 10-2 不定积分的性质 10-3 不定积分的部分积分法 10-4 不定积分的变量替换法(引入新变量法) 10-5 怎样查积分表 总结 主要公式 問題和习题

第十一章 定积分概念及其应用..... 239

11-1 定积分概念 11-2 定积分与原函数(或不定积分)的关系 积分学的基本公式 11-3 定积分的性质 11-4 定积分的计算 11-5 平面图形面积的计算 定积分应用的一般原则 11-6 由平行截面面积计算物体的体积 11-7 曲线的弧长 11-8 均匀薄片的重心 11-9 转动惯量的计算 11-10 其他物理问题举例 11-11* 在区间 $[a, b]$ 上函数值的平均值 11-12 无穷区间上的广义积分举例 11-13 近似积分法 11-14 图形积分法 总结 問題和习题

第十二章 微分方程..... 313

12-1 一般概念 12-2 一阶微分方程 12-3 特殊二阶微分方程 12-4 常系数二阶齐次线性微分方程 总结

附录..... 359

行列式 基本公式

序

本书在 1958 年第一版出版以后,北京航空学院、清华大学、北京工业学院、北京钢铁学院、北京矿业学院五个院校在干部班都試教过一年以上,对于在取材及要求方面,觉得有些部分要进行修改,这次印行的第二版是經局部小修的版本。本版在編写方面的特点基本沒有变动:

1. 內容的叙述尽量做到适合于学员們的認識过程。
2. 对于每一新概念的引入力求从若干具体問題出发,然后再引导到抽象的数学定义;讲定义时結合几何意义,物理意义,并用具体数字的例子來說明。
3. 力求貫徹从具体到抽象的原則,理論的闡述尽量先从举例說明然后再到一般的概括。
4. 具体的运算都較詳細地一步步推导。
5. 重視实际应用,尽量与邻近課程、后修課程相結合。体现数学是工具的原則。
6. 重視教学中的直观原則,借助于几何图象,及学员們已經具有的知識来深入了解概念与理論。针对学员的特点对数学的論証与推导作适当的精簡,或簡化了証明或給出例証,或从几何上加以說明。
7. 力求做到:提出問題明确,少用数学名詞,文字叙述簡單清楚,叙述与結論条理分明,便于記憶。
8. 每一章均有总结,問題,习題,帮助学员們作阶段性总结。
9. 照顾到各专业对高等数学的不同要求,教材中有基本內容,也适当的安排一些附加的內容(用小字排出)。

这次修改考虑到下列几个方面:

1. 为了适应不同的要求,本书改为二卷。卷一包括平面解析几何

和一元函数的微积分学（即微分学，积分学，微分方程）。后边有附录，包括行列式及基本公式。卷二则包括空间解析几何，多元函数的微积分学及级数。这样，基本重点内容，就全在卷一中了。

2. 为了教材的提炼，节省学时，将原来三章积分内容改写为两章，先讲不定积分后讲定积分，每一部分均由实际引出。去掉了定积分的应用及微分方程的应用之重复部分。

3. 在计算要求上，尽量做到巩固最基本的运算技能，和熟练技巧。在不定积分部分加强查表的练习。

4. 在叙述和推导上比过去详细了些，这样可以适应自学者的需要。

这次修改后，不妥当的地方可能还是很多，希望读者多提出宝贵的意见。

另外我们曾接到过一些同志对本书内容和印刷方面的意见，除在此次修改中认真考虑之外，特在此表示感谢。

编者序于北京

1960年5月底

卷 一 目 录

序.....	v
引言.....	1

第一篇 平面解析几何

第一章 平面上的直角坐标系.....	1
1-1 直线上点的坐标 数轴 1-2 平面上点的直角坐标 1-3 几个简单问题 1-4 曲线与方程 总结 问题和习题	
第二章 直线.....	24
2-1 由已知条件建立直线方程 2-2 由方程作直线图形 2-3 两直线的关系 总结 问题和习题	
第三章 二次曲线.....	36
3-1 椭圆 3-2 双曲线 3-3 抛物线 3-4 一般二次方程的研究 总结 问题和习题	
第四章 曲线的参数方程.....	62
4-1 几个常用的参数方程 4-2 参数方程的作图法 总结 问题和习题	
第五章 极坐标.....	69
5-1 极坐标的规定 5-2 直角坐标与极坐标之间的关系 5-3 极坐标方程 问题和习题	
第六章 函数.....	78
6-1 常量与变量 6-2 函数的定义 6-3 函数的记号 6-4 函数的定义域 6-5 函数表示法 6-6 基本初等函数 6-7 幂函数 $y=x^n$ 的图形 6-8 指数函数与对数函数的图形 6-9 三角函数的图形 6-10 反三角函数的图形 6-11 复合函数 6-12 初等函数 6-13 双曲函数及其图形 总结 问题和习题	
第七章 极限与连续.....	102
7-1 绝对值和有关绝对值的几个性质 7-2 函数的极限 7-3 极限的运算 7-4 无穷小量 7-5 无穷大量 7-6 当自变量趋向无穷大时有理分式的极限 7-7 增量 7-8 函数的连续性 7-9 函数的间断点 7-10 连续函数的运算 初等函数的连续性 7-11 在闭区间上连续的函数的性质 7-12 极限的存在准则 7-13 两个重要的极限 7-14 无穷小量的比较 总结	

引言

一、数学的起源与发展

数学和其他科学一样，导源于生产实践。数学上的最基本的概念——形和数——都是人们在长期生产实践中积累了大量的感性认识，在思维中经过抽象的过程而总结出来的。例如圆的概念，是人们从太阳、月亮、瓜、果等等圆形的具体事物上抽去了实际内容，概括了它们之间的共性而得到的。又如自然数概念，是由于原始时期人们要统计劳动果实而产生的。正如恩格斯所说的：“和数的概念一样，形的概念也完全是从外面世界得来的，而不是在头脑中从纯粹的思维中产生出来的。要能达到形的概念，先应当存在具有一定形状的物体，而且应把这些形状拿来比较。”①

数学的发展也是由人们生产实践需要来决定的。我们可以举出一些例子：例如人类在原始公社时代，曾经长期地过着渔猎和畜牧的生活，由于需要计算猎获物，因之产生了自然数的头几个数。再如人类在耕种活动中，需要丈量地亩，就产生了几何学。又由于贸易和航海的需要，产生了代数学和三角学。而自十七世纪以来，生产急剧发展，适应这种情况的需要，就产生了高等数学中的一些概念和方法。不仅如此，反过来，数学的发展又在一定程度上推动了科学技术的进步，从而也相应地提高了生产力。这样一次又一次地往复，而一次比一次提高、丰富，生产力和科学技术（包括数学在内）互相影响、不断发展。毛主席对于人们这种认识客观现实的过程普遍地加以总结说：“实践、认识、再实践、再认识，这种形式，循环往复以至无穷，而实践和认识之每一循环的内容，都比较地进到了高一级的程度。这就是辩证

① 恩格斯著“反杜林论”，中译本第87页——人民出版社，1957年版。

唯物論的全部認識論，這就是辯證唯物論的知行統一觀。”^①

我國是世界上文化發達最早的国家之一，我們的勤勞且聰明的祖先，在長期的生產實踐中，積累了豐富的生產鬥爭知識。在數學方面也有着很大的貢獻。例如早在第一世紀就已完成並且流傳至今的“九章算術”，其中包含面積、體積的計算方法，比例、百分法，一次聯立方程、二次方程正根的計算，正負量的意義和計算方法等等，總結了我國古代勞動人民在生產鬥爭中所獲得的關於算術、代數、幾何等方面的認識。又如秦九韶的“天元術”，提出三次以上的方程的實根的近似計算方法，遠較西方數學家所提出的同樣方法為早。又如我國的偉大數學家祖沖之早在第五世紀就已確定圓周率 π 的近似值在3.1415926和3.1415927之間，並規定 $\pi = \frac{22}{7}$ 為約率， $\pi = \frac{355}{113}$ 為密率。這個密率在西方直到十六世紀七十年代才由德人奧托算出。這僅是幾個突出的例子。實際上，在中古和近古兩個時期中的一千多年里，我國數學是很發達的，但是從明初起沒有得到應有的發展，這正是由於落後的封建制度長期地束縛了生產力的結果。

二、數學的特點

如上所說，數學的起源與發展和生產實踐是緊密地聯繫着的。但數學為了要應用到各種科學技術上去，它的基本概念、理論、計算方法都是以抽象的形式出現的。然而如前段開始處所指出的，這種抽象的形式乃是人們觀察現實世界中的事物和發展規律，經過深刻思維、細緻加工以後而形成的，絕不是脫離實際凭空想出的。恰恰相反，它能更深刻、更正確、更全面地反映現實，因而也就有廣泛的應用。我們學習數學，對於數學的這兩種緊密相聯繫的特點即抽象性和廣泛應用性應有正確的認識，在學習一般理論時要注意到它的實用性的一面，在學習具體問題的解法時要注意到它的普遍性的一面。

^① “毛澤東選集”第一卷第285頁，人民出版社，1952年北京第二版1960年北京第十一次印刷。

三、数学所研究的对象

一般說来，无论是那种科学和技术問題，只要是涉及到物体存在的形状或过程中量与量之間的关系，都要用到数学。恩格斯在指出形和数的概念来自客观现实（見前段中的引文）以后，进一步地論证說：“純数学是以现实世界的空間的形式和数量的关系——这是非常现实的資料——为对象的”。^① 这个論点提出的年代距离現在虽已有半个世紀以上，而在这一段时间內数学也随着生产的发展而日益发展，但仍是一个深刻地說明了数学的特征的論点，并且随着数学的进展，它的正确性和深刻性愈益显示出来。

四、高等数学在科学技术上的作用

我們將要学习的高等数学，它的主要内容是解析几何和微积分。比起中学里的数学——算术、几何、代数、三角来，它更深入而全面地研究空間形状和数量关系。其特点是以变量作为主要对象和运用了成套的方法。在近代的科学与技术問題中，經常是其中的某些变量起着重要的作用，并且我們所要研究的不只是这些变量的某一瞬間的情况，更重要的是这些变量的規律性，这种規律性常是以变量間依从关系来表現的，而要研究这种依从关系，就需要有一套系統性的方法，这正是高等数学所提供的。

不仅如此，随着我国社会主义建設的大跃进，文化革命和技术革命已經到来并且即将进入高潮，这就对数学提出了更高的要求 and 开辟了广闊发展的道路。与此同时，势必要求更多的人掌握現代数学工具——不仅是解析几何和微积分，还要包括現代許多新的科学分支，才能适应当前形势的需要。

完全可以預言，在我国一切科学技术包括数学在內，都将發揮其最大效能和发展到应有的高度！

① “反杜林論”中譯本第 37 頁——人民出版社出版 1957 年版。

第一篇 平面解析几何

第一章 平面上的直角坐标系

在十六世紀，由實踐的需要和各門科學本身的发展，产生了自然科学研究“运动”的必然性。要研究各种变化过程和各种变化着的量与量之間的依从关系，需要把代数与几何結合起来进行研究。在这方面笛卡尔建立了很好的基础。恩格斯曾經写道：“笛卡尔变量是数学中的轉折点，于是运动与辯証法便进入了数学”。解析几何就是以代数方法来研究几何图形的数学，把几何問題利用坐标化为代数問題，再运用代数方法来研究，以求得解决；同时，反过来又可对代数問題給予几何解釋。这种使形与数結合起来的基本方法就是坐标法。坐标法就是以数字来表示点的位置的方法。例如，要确定教室中某一座位，必須說明，从那里算起，橫着数第几个位子，纵着数第几个位子。又如天体上星座的位置，地球上某个地方的經緯度等都是运用着坐标概念。在数学上把具体事物进行抽象，研究如何确定直綫上点的位置和平面上点的位置，其方法如下：

1-1. 直綫上点的坐标 数軸

用数規定直綫上点的位置，必先給定一直綫，指出一方向为正向，取定一点 O ，名为原点，規定一长度为单位长度。这样直綫上每一点的位置都可以用一个数来确定，这个数的絕對值就代表着从原点到該点的距离。若从原点到該点的方向为正的方向，則此数为正，若从原点到該点的方向与正向相反，此数为負。这个数叫做該点的坐标。这样規定的直綫叫数軸，通常以向右的方向为正向，（图 1.1）。例如 M

取在原点右方三个单位长的地方,则 M 的坐标为 $+3$, 记作 $M(3)$; M' 取在原点左方两个单位长的地方,则 M' 的坐标为 -2 , 记作 $M'(-2)$ 。显然: 在数轴上有一个点, 就能找出一个实数与之对应; 反过来说, 如给出任意一个实数, 如 $\frac{1}{2}$, 也能在数轴上找出对应于这个实数的唯一的点来。

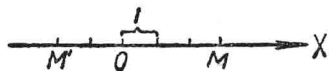


图 1.1

1-2. 平面上点的直角坐标

在平面上取两条具有共同原点且互相垂直的数轴, 这两条数轴叫坐标轴; 水平的叫横轴或 X 轴, 铅直的叫纵轴或 Y 轴; 交点叫原点。通常, X 轴的正向是由原点向右, Y 轴的正向是由原点向上, 取定坐标轴的平面叫坐标平面。

设平面上有一点 M 。从 M 作直线垂直于 X 轴, 其垂足为 X 轴上的一点 P , 点 P 在 X 轴上的坐标记作 x , 称为点 M 的横坐标。从 M 作直线垂直于 Y 轴, 其垂足为 Y 轴上一点 Q , 点 Q 在 Y 轴上的坐标记

作 y , 称为点 M 的纵坐标。如图 1.2 中点 M_1 的横坐标为 1, 纵坐标为 -2 。我们规定: 有先后次序的两个数 (x, y) 称为点 M 的坐标, 记作 $M(x, y)$ 。

如图 1.2 中所示的四点, 分别为 $M_1(2, 3)$, $M_2(-2, 2)$, $M_3(-1, -1)$, $M_4(1, -2)$ 。

显然: 在坐标平面上取一点, 就能得出有先后次序的两个实数来表示这个点的坐标。反过来说, 给

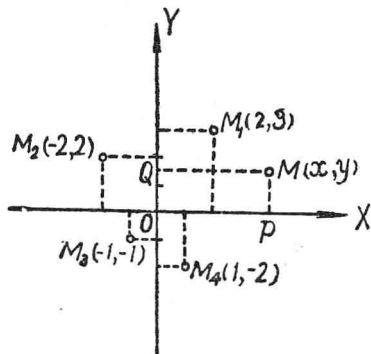


图 1.2

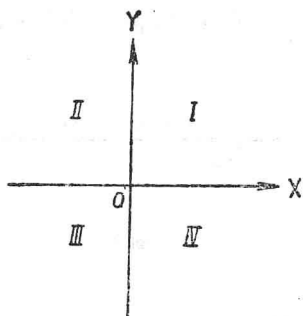


图 1.3

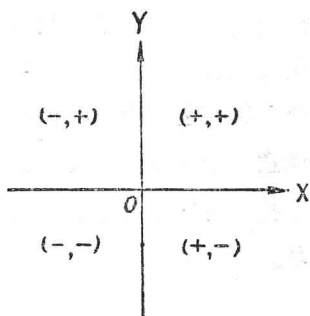


图 1.4

出有先后次序的两个实数作为坐标,就能定出平面上一个点。

坐标轴把平面分成四个部分,如图 1.3 所示,分别叫第一、二、三、四象限。一点 $M(x, y)$ 在各象限的 x, y 的符号如图 1.4 所示。显然,如图 1.5, $M_1(3, 2)$ 与 $M_2(3, -2)$ 对称于 X 轴。 M_1 与 $M_3(-3, 2)$ 对称于 Y 轴, M_1 与 $M_4(-3, -2)$ 对称于原点。

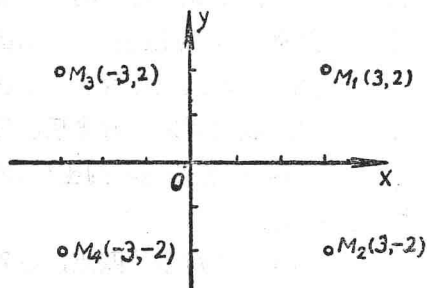


图 1.5

1-3. 几个简单问题

(一) 任意两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$ 为平面上两已知点, 试用坐标表示两点间的距离。

设两点 M_1 及 M_2 间距离为 d (常用 $|M_1M_2|$ 表示)。由 M_1, M_2 各向 X 轴引垂线, 垂足分别为 P, Q 。由图 1.6 知三角形 M_1NM_2 为直角三角形, 由勾股弦定理得:

$$d = \sqrt{(M_1N)^2 + (NM_2)^2}.$$

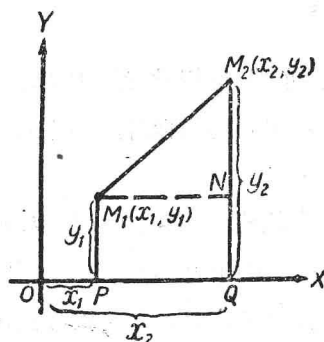


图 1.6

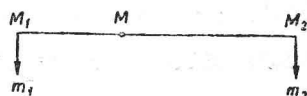


图 1.7

因 $M_1N = OQ - OP = x_2 - x_1$,
 $NM_2 = QM_2 - QN = y_2 - y_1$,
 故得: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. (1.1)

由上公式可推出平面上一点 $M(x, y)$ 到原点距离的公式为: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$.

例 求点 $M_1(-2, 3)$ 与 $M_2(5, 4)$ 间的距离。

解:

$$d = \sqrt{[5 - (-2)]^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7.07$$

(二) 线段的定比分点

设有一棒如图 1.7, 在 $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ 处的质量各为 m_1 , m_2 求该棒的质量中心。设质量中心坐标为 $M(x)$ 。根据物理中“力乘力臂等于力矩”的关系式得:

$$m_1 \cdot M_1M = m_2 \cdot MM_2,$$

$\therefore$

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

以数轴上的坐标代入即得:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m_2}{m_1}.$$

解出 x 得:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

即为所求质量中心的坐标。假若棒的两端坐标各为 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 而两质量的比 $\frac{m_2}{m_1} = \lambda$ 。求质量中心的坐标时，抽去其物理意义即可得到数学上求定比分点的关系式。

已知两点: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, 在线段 M_1M_2 内一点 $M(x, y)$ 分割此线段所成的比为 $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, 求点 M 的坐标 x, y 。

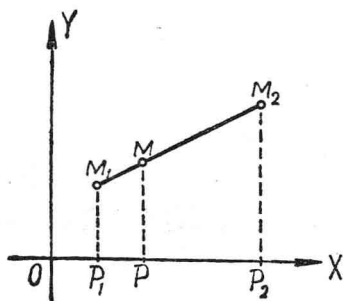


图 1.8

设以 P_1, P_2, P 分别表示由点 M_1, M_2, M 向 X 轴上所引垂线的垂足, 如图 1.8。由平面几何“一组平行线与一角的两边相交, 则此角的二边被平行线分成互为比例的线段”, 得:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda,$$

而 $P_1P = x - x_1$, $PP_2 = x_2 - x$ 。代入上式得

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

因为 x_1, x_2, λ 均为已知数, 所以可将此等式看作一元方程来求解:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \lambda(x_2 - x), \\ \therefore x + \lambda x &= x_1 + \lambda x_2, \\ \therefore x(1 + \lambda) &= x_1 + \lambda x_2, \\ \therefore x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

同理, 由 M_1, M_2, M 向 Y 轴引垂线, 仿上可得出

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (1.3)$$

若求綫段的中分点，則在上述公式中使 $M_1M = MM_2$ ，即 $\lambda = 1$ 。
得

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (1.4)$$

例 1. 在 $M_1(1, 0)$ 及 $M_2(6, 3)$ 的联綫上求一点 M ，使 M_1 到 M 的距离为 M 到 M_2 的距离的两倍。

解：

把
$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{2}{1} = 2$$

代入公式(1.2)及(1.3)，得：

$$x = \frac{1 + 2 \times 6}{1 + 2} = \frac{13}{3},$$

$$y = \frac{0 + 2 \times 3}{1 + 2} = 2.$$

例 2. 一重心在点 $M(5, 1)$ 的均匀細棒，它的一端在点 $A(-1, -3)$ 上，求另一端 B 的位置。

解：設另端的坐标是 $B(x, y)$ ，而均匀細棒的重心是在棒的中点。
故由公式(1.4)得：

$$5 = \frac{-1 + x}{2},$$

$$\therefore x = 11;$$

$$1 = \frac{-3 + y}{2},$$

$$\therefore y = 5.$$

得所求另一端的坐标为 $B(11, 5)$ 。

例 3. 設三角形三頂点是 $A(0, 0)$ ， $B(7, 2)$ ， $C(-1, 4)$ ，求此三角形重心 M 。

解：由平面几何知，三角形的重心是三个中綫的交点。又知“三角形中綫相交于一点，此点到任一頂点的距离，等于此頂点到对边中

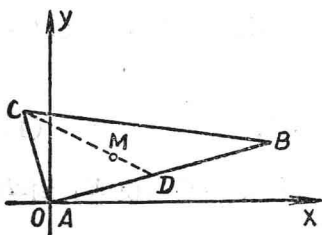


图 1.9

点的距离的三分之二”如图 1.9。设重心为 $M(x, y)$,

$$|CM| = 2|MD|;$$

而 D 为 OB 的中点, 其坐标为 $D(x', y')$ 。由公式(1.4)知:

$$x' = \frac{7+0}{2} = \frac{7}{2}; \quad y' = \frac{2+0}{2} = 1.$$

得 $D(\frac{7}{2}, 1)$ 。再求 $\frac{|CM|}{|MD|} = 2$ 的定比分点 M 。由公式(1.2)及(1.3)得:

$$x = \frac{-1 + 2 \cdot \frac{7}{2}}{1 + 2} = 2; \quad y = \frac{4 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = 2.$$

故所求重心为 $M(2, 2)$ 。

1-4. 曲线与方程

解析几何中所研究的主要问题是: 怎样由已知曲线去列出方程, 并根据方程讨论该曲线的性质; 以及怎样由已知方程去画出曲线这两方面的问题。

(一) 把曲线作为动点的轨迹以建立方程。

平面曲线可以作为平面上的点因运动而描绘出来的几何图形, 只须点的运动适合于一定的规律。试用一条绳子, 一端拴住一个小铅球, 握住绳的一端用力抡动, 就会发现这个小铅球绕着手兜圆圈。又如利用圆规时, 将圆规一脚固定, 两脚间分开一定长度, 按固定点旋转, 另一脚就画出一个圆来。显然看出, 圆的图形可看为距一定点等距离的点的轨迹。平面解析几何中, 是将运动的点摆在坐标面上, 把这个动点运动的规律, 用关于动点的坐标 x, y 的二元方程表示出来。这种方程叫做曲线的方程。