西安交大
考研

2012版 数学考研

考点精讲
方法精练

数学一和数学二

主编 龚冬保

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS
西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

(2012 版)

数学考研

考点精讲方法精练

(数学一和数学二)

主编　龚冬保

编著　(高等数学) 龚冬保　王寿生　褚维盘

(线性代数) 崔荣泉

(概率统计) 周家良

西安交通大学出版社

·西安·

内容提要

本书是专门针对考研复习编写的教材，内容严格按教育部制订的“数学考试大纲”编写。为了适应考生“复习”的特点，本书建立了与普通教材不同的体系；针对考研的特点，突出基本功和综合运用、应试能力的训练，对于数学知识，着重于分析问题和解决问题的能力，全面而有重点地覆盖了所有考点和解题方法。本书既可作“考研辅导班”的教材，也可用于考生自学，同时也可供就读本科的各专业的大学生参考。

作者在网上为本书读者免费答疑，时间：2011 年 7 月下旬至 2012 年 1 月考试前；答疑信箱：glsdy2012@126.com

图书在版编目(CIP)数据

2012 版.数学考研考点精讲方法精练：(数学一和数学二)/龚冬保主编.
—西安：西安交通大学出版社，2011.5
ISBN 978-7-5605-3934-8

Ⅰ.①2… Ⅱ.①龚… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 083049 号

书　　名 2012 版数学考研考点精讲方法精练(数学一和数学二)
主　　编 龚冬保
责任编辑 叶涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 陕西元盛印务有限公司

开　　本 787mm×1 092mm　1/16　**印张** 28.25　**字数** 868 千字
版次印次 2011 年 5 月第 6 版　2011 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-3934-8/O·367
定　　价 39.80 元

读者购书、书店添货如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

2012版前言

——兼释2011年部分试题

将2011年考研数学试题与我们编写的《数学考研考点精讲方法精练》《数学考研典型题》及《数学考研模拟考试试卷》相对照，考点和题型的覆盖率都很高. 这是自然的，因为我们是按《考试大纲》的要求来编写的，不用"猜题"，试题总会在意料之中.

近年来考研试题与我们书中几乎相同的题也时有所见. 2011年的"难题"(数学一(18)题，数学二(19)题)，则与我们《典型题》(数学一/二)中第1章的例1.8题一模一样. 就让我们从这道题谈起吧.

一、从2011年数学一、二共用的难题谈起

例1 (Ⅰ)证明：对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立.

(Ⅱ)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 (Ⅰ)这个不等式最简单证法如下

由 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减，它们都以 e 为极限于是 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

取以 e 为底的对数即可证明 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立.

用微分法证明此不等式，可参考《精讲精练》中2.2.1.1中做辅助函数的方法，恕不赘述.

(Ⅱ)**证1** 由 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$ 知，a_n 单调减；

为了证明 a_n 有下界，我们引入数列：

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln n\quad(n=2,3,\cdots)$$

则 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$. 即 b_n 单调增，而明显地有

$a_n-b_n=\frac{1}{n}$，故 $a_n>b_n>\cdots>b_2=1-\ln 2$ 故 a_n 有下界，$\{a_n\}$ 收敛.

证2 由 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2(n-1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

$=-\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{2(n-1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. 知其与 $\frac{1}{n^2}$ 为同阶无穷小($n\to\infty$)

从而知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

而 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$，故知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证3 我们可以把 a_n 化为一个级数的部分和：

由 $\ln n=\ln\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\right)=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}$.

故 $a_n=(1-\ln 2)+\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\ln\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right)+\frac{1}{n}$.

而$\frac{1}{n}>0$，$\therefore a_n$ 与级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right)$同敛散.

与证 2 相同，由泰勒公式：$\frac{1}{n-1}-\ln\left(1-\frac{1}{n-1}\right)=\frac{1}{2(n-1)^2}+o(n^{-2})$，与$\frac{1}{n^2}$ 同阶故此级数收敛，因而数列$\{a_n\}$收敛.

证 4　由 $a_n=(1-\ln 2)+\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{n}>0$ 知 $a_n>0$ 有下界，知$\{a_n\}$收敛(a_n 单调降在证 1 中已证过).

以上四种证法均用到不等式：$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$. 这是考研题的特点之一：难题的(Ⅰ)往往是对(Ⅱ)的提示.

注：设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$，称 c 为欧拉常数，由此得 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+c+\varepsilon_n$. 知调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big/\ln n\right)=1$. 此式在求一些数列极限中还有些用途，可参考《典型题》例 1.9.

二、部分客观题的分析与巧解

1. 选择题

例 2　$y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 拐点是

(A) (1,0)　　(B) (2,0)　　(C) (3,0)　　(D) (4,0)

解　此题一见就知是(3,0)选(C). 主要根据是 $y''\big|_{x=3}=0$，$y'''\big|_{x=3}\neq 0$. 若不放心要证一下可令 $x-3=t$. 则

$y(t)=t^3(t+2)(t^2-1)^2(t-1)^2=t^4p(t)+2t^3$. 易得 $y''(0)=0$，$y'''(0)=12\neq 0$(其中 $p(t)$ 是 t 的多项式不必乘出来).

例 3　设 $I=\int_0^{\pi/4}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\pi/4}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\pi/4}\ln\cos x\,dx$.

则　(A) $I<J<K$　　(B) $I<K<J$　　(C) $J<I<K$　　(D) $K<J<I$

解　不用算便知选(B). 因为在$[0,\pi/4]$中 $\cot x>1$，而 $\cos x$，$\sin x<1$ 故 J 最大，选项中仅有(B)成立！当然知道在$[0,\pi/4]$中有 $\sin x<\cos x<\cot x$，也可选到(B).

例 4　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$　　(B) $-f'(0)$　　(C) $f'(0)$　　(D) 0

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$，选(B).

本题作选择题，可以不顾条件而用洛必达法则

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x)+x^2f'(x)-6f'(x^3)x^2}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+xf'(x)-6xf'(x^3)}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)+f'(x)+xf''(x)-6f'(x^3)-18x^3f''(x^3)}{3}=-f'(0)$$

这种“不正确”的方法，同样能选到“正确”的选项！

例 5　函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

解　像例 2 一样令 $x-2=t$，

则 $f'_t(x(t))=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}=\frac{3t^2-1}{t(t^2-1)}=0$ 得 $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 两个驻点，选(C).

例 6　设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，设

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$，则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}^2$　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

解　已知 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$，选(D)．这里关键是要知道初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 作行变换，右乘则是作列变换．

例 7　$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系．则 $\boldsymbol{A}^*$ 的基础解系可为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

解　由 $\boldsymbol{A}(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关．且 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，再由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解．$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关 $r(\boldsymbol{A})=3$．故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，选(D)．

例 8　设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$　(B) $2f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)$　(D) $f_1(x)F_2(x)+F_1(x)f_2(x)$

解　四个选项的函数都满足概率密度的一些条件，只留下在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分是否为 1 的条件，便可判断是否为概率密度，这时微分基本功起作用：

$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)=F'_1(x)F_2(x)+F'_2(x)F_1(x)=(F_1(x)F_2(x))'$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}(f_1F_2+f_2F_1)\mathrm{d}x=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1$ 成立，故选(D)．

2. 填空题

例 9　微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为________．

解　原方程即 $\mathrm{e}^xy'+\mathrm{e}^xy=\cos x$，即 $(\mathrm{e}^xy)'=\cos x$．
由 $y(0)=0$ 知 $\mathrm{e}^xy=\sin x,y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$．(微分公式要熟悉)

例 10　$F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 则 $\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\Big|_{(0,2)}=$________．

解　$\frac{\partial F}{\partial x}=y\frac{\sin xy}{1+x^2y^2}$　$\therefore\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\Big|_{(0,2)}=\left(\frac{2\sin 2x}{1+4x^2}\right)'_{x=0}=4$．

这里，$x=0$ 的导数只要用 $\left(\frac{2\sin 2x}{1+4x^2}\right)'_{x=0}=\left[\frac{4\cos 2x}{1+4x^2}+2\sin 2x\left(\frac{1}{1+4x^2}\right)'\right]_{x=0}=4$．(后一项的导数不必求便知结果为 0)

例 11　$z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=$________．

解　由 $\ln z=\frac{x}{y}[\ln(x+y)-\ln y]$ 及 $z\Big|_{(1,1)}=2$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{y}(\ln(x+y)-\ln y\right]_{(1,1)}=(x\ln(1+x))'=\ln 2+\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{y}(\ln(x+y)-\ln y)\right]\Bigg|_{(1,1)}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\ln(1+y)-\ln y}{y}\right]=-\ln 2-\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \mathrm{d}z=(2\ln 2+1)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$．

填空题只求答案正确，所以作填空题一定要用最简便方法，算出准确的答案．

三、几道解答题

例 12　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}$

解　用等价无穷小替换及泰勒公式可轻松解出：

原式 $= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[1+\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(t)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

2011 年三份试卷上的求极限题只要用上述办法来求出，比用洛必达法则解简便得多.

例 13　求方程 $k\arctan x - x = 0$ 的不同实根的个数.

解 1　记 $f(x) = \arctan x - x$，即求 $f(x)$ 的零点个数.

则令 $f'(x) = \dfrac{k}{1+x^2} - 1 = \dfrac{k-1-x^2}{1+x^2}$，则当 $k \leqslant 1$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调减，而 $f(0) = 0$ 是唯一的零点即方程有唯一实根 $x = 0$.

当 $k > 1$，令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm\sqrt{k-1}$ 是极值点，由 $f(x)$ 是奇函数，只要讨论 $x > 0$ 的情况：当 $0 < x < \sqrt{k-1}$，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调增，即 $f(\sqrt{k-1}) > 0$，当 $fx > \sqrt{k-1}$ 有 $f'(x) < 0$，而 $x \to +\infty$ 时，$f(x) \to -\infty$，故在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 中 $f(x)$ 有非一零点；从而在 $(-\infty, -\sqrt{k-1})$ 也有唯一零点，即此时方程有三个不同实根.

解 2　用几何法，当 $k = 0$，$x = 0$ 是唯一实根，设 $k \neq 0$，则只要看曲线 $y = \arctan x$ 与直线 $y = \dfrac{1}{k}x$ 的交点个数，当 $k = 1$ 时曲线与直线相切，如图 1. 故当 $\dfrac{1}{k} > 1$ 即 $k < 1$ 时直线与曲线仅在 $x = 0$ 相交；当 $\dfrac{1}{k} < 1$ 即 $k > 1$ 时，直线与曲线有三个交点：x 是一负、零和一正，三个实根. 结论与解 1 同.

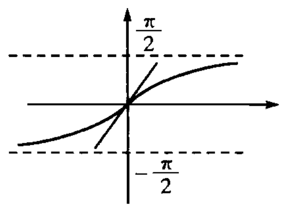

图 1

例 14　一容器内侧如图 2，由 $x^2 + y^2 = 2y\left(y \geqslant \dfrac{1}{2}\right)$ 和 $x^2 + y^2 = 1\left(y \leqslant \dfrac{1}{2}\right)$ 连续的曲线绕 y 轴旋一周而成.

（Ⅰ）求容积；（Ⅱ）若盛满水从容器顶部全部抽出至少要做多少功？长度单位是 m，重力 $g\ \mathrm{m/s^2}$，水密度 $10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.

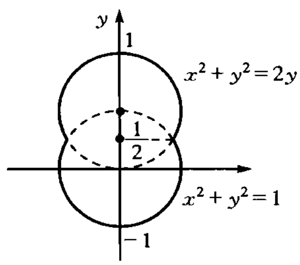

图 2

解　（Ⅰ）由对称形知

$$V = 2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\mathrm{d}y = \frac{9}{4}\pi\ (\mathrm{m}^3)$$

（Ⅱ）我们介绍一个极巧妙的方法：由对称性知水的重心的垂直坐标是 $\dfrac{1}{2}$，水的质量是 $\dfrac{9}{4}\pi\cdot10^3$，将水视为在重心处的一个质量是 $\dfrac{9}{4}\pi\cdot10^3$ 一个"质点"，那么将此"质点"提出容器的顶点做功，相当于将水全部抽出所做的功.

即 $W = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{9}{4}\pi g\cdot10^3 = \dfrac{27}{8}\pi g\cdot10^3$（焦耳）

例 15　设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A}) = 2$，且 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解　由 $\boldsymbol{A}(1,0,-1)^{\mathrm{T}} = -(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{A}(1,0,1)^{\mathrm{T}} = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 及 $r(\boldsymbol{A}) = 0$ 知三个特征值分别为 -1，1，0，三个特征向量为 $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅱ）由此作正交变换 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & 1\\-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}$. 可将二次型化为标准形 $-y_1^2 + y_2^2$，因此作逆变换 $\boldsymbol{Y} =$

$$\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}x_1-1/\sqrt{2}x_3\\ 1/\sqrt{2}x_1+1/\sqrt{2}x_3\\ x_2\end{bmatrix}$$可将$-y_1^2+y_2^2=-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right)^2=$

$2x_1x_3$ 便是以 $\boldsymbol{A}$ 为矩阵的原来的二次型，故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

请同学们注意，我们在解 2010 年的几道类似试题时，均采用了这个方法求 **A**，它避免了较麻烦的矩阵乘法.

分析每年的试题，都会对准备今后考试有利. 以上我们“抛砖引玉”对 15 道 2011 年的试题给出了一些快捷的解法，希望每位考生对未来考试要做到“凡是考试的基本题都会做，凡是会做的题都不出错”，这样，不怕考不出理想的成绩. 这也是我们编写这几本书的宗旨，希望能帮助考生们在数学课程的考研中取得理想成绩！

我们将从 2011 年 7 月下旬至 2012 年元月考试前，在网上回答使用《数学考研典型题》和《数学考研考点精讲方法精练》二书读者提出的问题，答疑信箱 glsdy2012@126. com.

编　者

2011 春于西安交大

第1版前言

目前考研的数学辅导书很多，却没有一本专门指导考研复习使用的教材，广大考生很希望有这样的教材。为此，我们尝试编写了本教材，以帮助考生能按教育部制订的研究生入学考试的《数学考试大纲》，全面系统地、有重点地、高效率地复习数学知识，取得好成绩。

复习是重复学习，不是重新学习。考研教材应与普通教材不同。首先，普通教材必须严格地按内容的逻辑顺序来编写，而考研教材不必受此拘束，可以从读者最熟悉的内容入手。比如高等数学部分，本书采取从微分法开始，以微分带积分，以积分促微分，使微积分紧密结合，深入浅出地讲完一元微积分的全部内容。其次，普通教材着重一个一个地讲解知识单元，而考研教材则侧重于内容间的联系。如本书线性代数部分将矩阵与行列式、向量代数与线性方程组、特征值特征向量与二次型紧密结合。第三，创立了一种新的体系，在逻辑顺序上更加符合考生的认识层次，更加适合于高效的复习。如概率论部分，先讲离散型随机变量的有关概率问题，再讲连续型随机变量的问题，再讲它们间的联系。第四，本书针对考研主要是考核解题能力的特点，安排了大量的例题，采用一题多解，一题多变的方式，侧重讲解题的思路、方法和技巧，培养读者灵活的分析能力和解决数学问题的能力。第五，根据编者多年辅导考研数学的经验，本书严格按《数学考试大纲》，从内容上既照顾了全面覆盖所有的考点，又突出了重点，从方法上既介绍了数学处理问题的基本方法，又突出了主要方法，特别考虑到考研试题中70%左右的是基本题，本教材在基本内容、基本方法上讲述的篇幅最大，对一些难题讲述，则侧重讲一道难题的思路，以及它与基本内容的联系，如何作到熟能生巧等等。第六，作为一本复习教材，本书还考虑要便于考生自学，因此，在许多题后附了不少注释，还介绍了不少自编练习题的方法。希望读者在阅读本书时，要一边看书一边自己动手推导，在读完一节后，最好将这一节书中的例题当作习题，自己独立做一遍，然后再作本章练习题，这样效果会更好。

本书既然是一本考研的复习教材，因此，书中对一些估计考生很熟悉的内容，一些定理的证明、公式的推导等略去不讲，如果想要知道相关的内容，可以在任何一本普通的教材中找到。

感谢西安交通大学出版社为本书的编辑和出版所作的努力。希望本书能受到读者的欢迎，更希望广大读者多提意见和建议，以使本书能改得更好，成为准备参加考研读者的良师益友。

编者

2006.3 修改于西安

目　录

第 1 章　一元函数微积分(一)

1.1　微积分的基本概念

复习与初学不同，作为考研的复习教材，本书体系与一般教材略为不同，目的是总结归纳已学过的知识，提高复习效率．本书是从一元函数微积分的基本概念入手，尔后转向微分和积分的基本运算．

1.1.1　函数 — 微积分的研究对象

高等数学主要研究函数 $y=f(x)$ 的微积分性质，因此学习时脑子里要多装些具体函数，当作一般抽象函数的模型用．首先，要熟记所有基本初等函数和一些常见的初等函数，以及它们的图象、增减性、奇偶性、周期性等等．以这些函数的性质深入理解一般函数的性质．比如 $y=f(x)$ 在某区间内恒有 $f''(x)>0$，曲线是向上凹还是向下凹?不少学生常常会记反了．而若以 $y=x^2$ 为模型，显然有 $y''=2>0$，曲线是向上凹的，记住这个模型，便永远不会记反了．

下面我们来举几个常用到的典型函数的例子．

例 1.1　函数 $y=|x|$ 的作用．

我们知道这是在 $x=0$ 点连续但不可导的例子．那么产生这样的问题：一个函数在某点不可导，另一个可导，它们的乘积是否可导?我们来考虑函数 x^n(n 为正整数)．

当 $n=1$ 时，函数 $f_1(x)=x|x|=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$

于是 $f'_1(x)=2|x|$，即 $f_1(x)$ 可导，但二阶导数不存在．

一般地，$f_n(x)=x^n|x|$ 有 $f'_n(x)=(n+1)x^{n-1}|x|$．于是由归纳法知 $f_n(x)$ 具有 n 阶导数，且 $f_n^{(n)}(x)=(n+1)!\,|x|$．$n+1$ 阶导数不存在．

例 1.2　同样典型的一个函数是 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

这是几乎每本教材上都要讲到的在 $x=0$ 点为无限振荡间断点的例题．我们一样来研究此函数乘上 x^n 的性态

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

当 $n=1$ 时，
$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

处处连续，但不可导；

当 $n=2$ 时，
$$\varphi'_2(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

可导，但导数不连续．一般地，当 $n>2$ 时

$$\varphi'_n(x)=\begin{cases}nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$n=3$ 时导数连续但二阶不可导；$n=4$ 时二阶可导但二阶导数不连续，由归纳法知：$\varphi_n(x)$，当 $n=2k$ 时，具有 k 阶导数，但 k 阶导数不连续；$n=2k+1$ 时，k 阶导数连续，但 $k+1$ 阶导数不存在.

例 1.3 狄里克利函数：$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$

这是个处处不连续的函数；它是偶函数；它是以任何有理数 r 为周期的周期函数，却无最小正周期. 但是，复合函数 $D(D(x))=1$. 这给出了一个例子：两个处处不连续函数的复合函数非但可能连续，而且无限次的可导！

此外一些教材上介绍过的许多典型函数，如符号函数

$$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

这个函数表示任意实数 x 的符号. 因为 $|x|$ 表示 x 的大小，故有 $x\equiv \mathrm{sgn}x\cdot|x|$. 我们看到：$\mathrm{sgn}x$ 在 $x=0$ 点间断，$|x|$ 在此点不可导，但它们的乘积：$|x|\cdot\mathrm{sgn}x=x$ 却具有任何阶导数！

我们通过这几个例子，目的是告诉读者要学会用自己所熟悉的具体函数，去深入学习一般函数的性质.

1.1.2 极限 — 微积分的基本方法

从某种意义上说，高等数学就是用极限的方法研究函数的微分、积分和级数的性质. 因此正确理解极限概念，是十分重要的. 而极限总要与两个无限一起来理解，不要死记每种极限的定义.

比如 $\lim\limits_{x\to x_0}=A$，是说当 x 无限逼近 x_0 时，$f(x)$ 便无限逼近常数 A. 即动点 $f(x)$ 与定点 A 的距离 $|f(x)-A|$ 可无限小，对任意 $\varepsilon>0$，均可使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，而只要 $0<|x-x_0|<\delta$. 这就是函数在 x_0 点处极限的"ε-δ"定义. 同样，数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，是说只要正整数 n 无限增大，便有 a_n 无限逼近 A. 读者可以凭此自己给出"$\varepsilon-N$"的定义以及所学过的各种极限的定义，而不必死记硬背.

极限与无穷小密不可分，表现在：

定理 $\lim y=A$ 的充要条件是：$y-A$ 是无穷小量.

因此，极限的方法可归结为无穷小分析方法.

例 1.4 证明极限的唯一性.

证 不妨设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在. 用反证法. 若另有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=B\neq A$$

不妨设 $B>A$. 取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$，则存在 $\delta_1>0$，对一切 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 的 x，均有 $-\dfrac{B-A}{2}<f(x)-A<\dfrac{B-A}{2}$，即 $f(x)<\dfrac{B+A}{2}$ 成立. 另一方面，存在 $\delta_2>0$，对一切 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 的 x，均有：$-\dfrac{B-A}{2}<f(x)-B<\dfrac{B-A}{2}$，即 $f(x)>\dfrac{B+A}{2}$ 成立. 取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则对一切 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，既使 $f(x)<\dfrac{B+A}{2}$ 又使 $f(x)>\dfrac{B+A}{2}$. 矛盾. 说明只有 $B=A$.

例 1.5 在同一过程中，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=B$，且 $B>A$，则存在 $M>0$，对一切 $|x|>M$，均有 $g(x)>f(x)$.

证 取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$，则存在 $M_1>0$，对一切 $|x|>M_1$ 均有 $f(x)<\dfrac{B+A}{2}$；又存在 $M_2>0$，对一切 $|x|$

$> M_2$ 有 $g(x) > \frac{B+A}{2}$. 取 $M = \max(M_1, M_2)$，则对一切 $|x| > M$，均有 $f(x) < g(x)$ 成立.（证明过程中略去的步骤与例 1.4 的证明步骤相同）.

与极限概念并列的还有：无穷大量、无界变量、有界变量等概念. 这些变量间的联系和区别，经常会被考到.

例 1.6 设 $\{x_n\}$ 是无界数列，$\{y_n\}$ 是无穷大量，$\{z_n\}$ 是无穷小量，则以下结论中正确的是（　　）.

(A) $\{x_n + y_n + z_n\}$ 无界.　　　　(B) $\{x_n + \frac{1}{y_n} + z_n\}$ 无界.

(C) $\{x_n + \frac{1}{z_n}\}$ 无界.　　　　(D) $\{\frac{1}{x_n + y_n} + z_n\}$ 是无穷小.

解 $\frac{1}{y_n} + z_n$ 是无穷小，x_n 无界，故 $x_n + \frac{1}{y_n} + z_n$ 无界，选(B). 可这样证明：存在 N_1，对一切 $n > N_1$ 有 $\left|\frac{1}{y_n} + z_n\right| < 1$. 而对任意 $M > 0$，存在 N_2，总有某个 $n > N_2$，使 $|x_n| > M+1$，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，总有 $n > N$，使

$$\left|x_n + \frac{1}{y_n} + z_n\right| \geqslant |x_n| - \left|\frac{1}{y_n} + z_n\right| > (M+1) - 1 = M.$$

我们再举例说明(A) 选项不一定成立. 可设 $x_n = -y_n$，则 x_n 也是无穷大也无界. 这时 $x_n + y_n + z_n = z_n$ 是无穷小量；(C) 选项不正确也是一样：若取 $x_n = -\frac{1}{z_n}$，则 $x_n + \frac{1}{z_n} = 0$；(D) 选项可选 $x_n = 1 - y_n$，则 $\frac{1}{x_n + y_n} + z_n = 1 + z_n \to 1$ 不是无穷小. 类似这样的选择题主要考概念：$\{x_n\}$ 是无界变量则也可以是无穷大量，而两个无穷大之和如 $x_n + y_n$ 与 $x_n + \frac{1}{z_n}$ 不一定是无穷大量，可以是无穷小、有界量或无穷大等等. 知道了这一概念解此题可立即排除(A)、(C)、(D) 三个选项，(B) 的结论可以不会证明，但题却做对了！

1.1.3 函数的连续性

函数 $y = y(x)$ 可以看成变量 y 随 x 的变化而变的量，任意给定 x 的增量 Δx，可得函数增量 $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. 当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y|$ 也很小，说明 y 随 x 变化是较稳定的，当 $\Delta x \to 0$ 时，有 $\Delta y \to 0$，即若

$$\lim_{\Delta x \to 0}[y(x + \Delta x) - y(x)] = 0$$

就定义此函数 $y(x)$ 在 x 点是连续的. 换一种记法记 $x_0 + \Delta x = x$，则 $x \to x_0$，$y(x_0)$ 是常数. 所以连续的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y(x_0).$$

即：若函数在 x_0 点的极限值与函数值相等时，函数在 x_0 点连续；否则称函数在 x_0 点间断.

函数在 x_0 点是否连续，主要先看此点极限是否存在，而左、右极限存在并相等又是此点有极限的充要条件. 所以，间断点的分类也是由此而确定的.

1. **第一类间断点**. 左、右极限均存在的间断点，称为第一类间断点. 第一类间断点又分两种情况：

(1) 左、右极限存在且相等的间断点称为可去间断点. 典型例子是 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$，在 $x = 0$ 这一点. 我们知道

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 无定义. 若加一点的定义，如 $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$，则此函数处处连续.

(2) 左、右极限存在，但不相等的间断点，称为有限跳跃的间断点. 如符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 点是有限跳跃的间断点.

2. **第二类间断点**. 凡不属于第一类的间断点,便称为第二类间断点. 即在 x_0 点 $f(x)$ 的左、右极限至少有一个不存在的间断点. 常见的第二类间断点有

无穷型间断点. 如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,在 $x=0$ 点;

无限振荡型间断点. 如 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. $x=0$ 是无限振荡型的间断点.

1.1.4 导数、微分与不定积分

如果说"连续"是用极限定义的函数一个基本性质,那么,导数与微分是用极限定义的微积分学第一个最重要的概念.

导数. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$ 存在,便说 $f(x)$ 在 x_0 点可导,且称 $A=f'(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 点处的导数.

这里是函数增量与自变量增量之比的极限. 若当 $\Delta x\to 0$ 时,$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 不趋于 0,则比的极限必不存在,所以可导必连续. 在同一点处函数连续是可导的必要条件.

微分. 若函数 $f(x)$ 的增量可近似用与自变量增量成正比的量来表示,且其差是比 Δx 更高阶的无穷小量 $(\Delta x\to 0)$. 即 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$. 这时称 $f(x)$ 在 x_0 点可微分,且 $A\Delta x$ 称为其微分,记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

导数与微分的关系:函数 $f(x)$ 在 x_0 是可导的充要条件是:$f(x)$ 在 x_0 点可微,且 $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$.

证明. 必要性　由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

得 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$,故 $f(x)$ 可微.

充分性　由 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$,得

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$,故 $f(x)$ 可导,且 $A=f'(x_0)$.

不定积分. 若 $F(x)$ 在某区间 I 上可导,且 $F'(x)=f(x)$,则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 的一个原函数. 而记

$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$, 其中 C 是待定常数,称之为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分. 不定积分是原函数的一般表示形式.

1.1.5 定积分与反常(广义)积分

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义. 以下三步:

(1) 分割　在 $[a,b]$ 任意插入 $n-1$ 个分点 $x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,记 $\Delta_k=[x_{k-1},x_k]$,$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$. 并取任意 $\xi_k\in\Delta_k$,作 $f(\xi_k)\Delta x_k$.

(2) 求和　$\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$,记 $\lambda=\max\Delta x_k$.

(3) 取极限　$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$.

若此极限存在,且与分割方式和 ξ_k 的取法无关,则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,并称此极限为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分. 记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

由上述定义知，$f(x)$ 在$[a,b]$上可积必有界.

可积的充分条件：$f(x)$ 在$[a,b]$上连续或分段连续必可积.

定积分的基本性质和牛顿-莱布尼兹公式.

线性性质. 若 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上可积，则

$$\int_a^b[c_1f(x)+c_2g(x)]\mathrm{d}x=c_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+c_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

对区间的可加性质. 设 $f(x)$ 可积，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

其中 c 是任意实数.

比较性质与估值定理. 若在$[a,b]$中恒有 $f(x)\leqslant g(x)$.

则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

特别若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，m、M 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值或最大值，则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

或
$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

此性质也叫估值定理. 其中$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 在$[a,b]$区间的平均值.

定积分中值定理. 由连续函数介值定理知，存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

变上限积分与微积分基本定理.

1° 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界可积，则

$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上连续.

证 $F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x}-\int_a^x=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$（其中 $0\leqslant\theta\leqslant1$）.

故当 $\Delta x\to0$ 时，$F(x+\Delta x)-F(x)\to0$，即 $F(x)$ 连续（当 $x=a$ 时，要求 $\Delta x\to0^+$；当 $x=b$ 时，$\Delta x\to0^-$ 是不言而喻的）.

2°（**微积分基本定理**）若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导，且 $F'(x)=f(x)$.

证 由 1° 中所得 $F(x+\Delta x)-F(x)=f(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 及 $f(x)$ 连续性得 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x+\theta\Delta x)=f(x)$.

3°（**牛顿-莱布尼兹公式**）若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 任一原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\varphi(x)\Big|_a^b=\varphi(b)-\varphi(a).$$

证 由 $\varphi'(x)=F'(x)=f(x)$ 知

$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\varphi(x)+C$. 令 $x=a$ 得 $C=-\varphi(a)$.

再令 $x=b$ 得 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\varphi(b)-\varphi(a)$.

无界函数的广义（反常）积分.

设 $f(x)$ 在$[a,c)$和$(c,b]$上连续，而$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，则称积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是无界函数的广义积分，c 是 $f(x)$ 的无穷型间断点，称为暇点. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\int_a^{c+\Delta x}f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\int_{c+\Delta x}^b f(x)\mathrm{d}x$ 均存在，则称广义积分收敛. 否则，即上