高等学校教学参考书

数学分析的方法及例题选讲

（修订版）

徐利治　王兴华

高等教育出版社

高等学校教学参考书

数学分析的方法及例题选讲

（修 订 版）

徐利 兴华

高等教育出版社

新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 8.125 字数 196 000
1955年12月第1版 1983年5月第2版 1988年1月第5次印刷
印数 73 141—82 140
ISBN 7-04-001218-9/O·368
定价 1.65 元

前　言

经典数学分析中的思想方法和技巧是丰富多彩的．对每一个年青的数学工作者说来，及早掌握这些方法和技巧，将在一生的工作实践中受益无穷．正是从这个观点出发，本书前一编者早在1953—1954年就在东北人民大学（即吉林大学的前身）讲授了“分析方法”这门课程．1955年将讲稿整理出版，书名与本书同名．1958年该书曾由高等教育出版社重印一次．但两次印数总额只有7000余册，当即一销而空．二十多年来，该书早已不易找到了，只能偶而从一些数学著作的参考书目中发现该书的名字．

近些年来，曾不时收到各地读者来信建议再版该书．可是二十余年过去了，总感到原书的题材大有刷新一番的必要．只因苦于缺乏时间，致使修订工作拖迟三年之久．去年，本书后一编者在杭州大学数学系为高年级学生开设了“分析方法及例题选讲”这门课，用上述原书作教材，并在讲课过程中不断进行删改和补充．于是在这个基础上我们便合作从事原书的修订工作，修订后的书稿又在杭大讲授了一次，然后略经修改，终于最后定稿．

在这个修订本中，已经加入不少新颖的题材，更换了一些旧的例题和习题．新增的内容中，也有一部分命题是属于编者们自己的研究成果（例如关于插值余项的命题及振荡型积分的渐近展开式等）．

在内容题材的铺设上，本书尽可能对相互关联的命题、例题及习题作出适当编排，以便使读者容易产生联想，从中领悟预示的途径去解决问题．就这个特点而言，它与鲍利亚与薛戈的名著《数学分析的问题与定理》多少有些类似．事实上本书还借用了该书中

的一些有趣题材.

鲍利亚曾说过:“一位好的数学教师或学生应努力保持解题的好胃口.”我们自己也有这样的经验:要想较熟练地掌握数学分析的方法和技巧,最好的办法莫过于经常动手去解题.因此在本书中,多半是示范性地给出典型命题与例题的极其简明扼要的证明或解法,类似的命题和习题则要求读者自己去解决.应该承认,本书中的个别题目确实是难度较大的,一时作不出来,既不用灰心,也不必去查阅任何现成的习题解答书籍.希望读者最好从一些相关联的题材中吸取经验和借鉴,能让自己去闯过难关,并从中享受乐趣!

这个修订本略去了原书的第五章(“各种类型的极限问题”),因为考虑到该章内容题材过份庞杂零乱,需要全面修改和增订,从而势必大大扩充篇幅.因此,我们期望将来通过出版《续编》的方式来完成上述任务.好在本书各章自成体系,且已足够表现出数学分析方法中的精采部分.当然原书的一些特色都在这里保留下来了.

我们要感谢吉林大学和杭州大学的数学系给我们提供了完成这个修订本的工作条件.还特别感谢审稿者路见可教授的细致审阅以及本书编辑的辛勤劳动.这个修订本仓促问世,错误与缺点谅必难免,希望读者不吝指教.

徐利治　　王兴华
(吉林大学)　(杭州大学)
1982年4月4日

目　录

第一章　关于阿贝耳方法

阿贝耳(N. H. Abel, 1802—1829)的方法是一套比较古典的数学分析技巧. 它在数学分析的某些部分, 特别是在级数的收敛性理论及有关和式(或积分式)的阶的计算中常常用到.

在分析学中, 因为理论系统性的关系, 常常把这个方法分散到几处来讲. 在这里, 由于我们无须受系统性要求的限制, 并希望能将这套方法在应用上的特点表现得更显著一些, 因此就在这一章中, 采用命题、例题和习题的形式, 加以比较集中的考虑.

阿贝耳方法是从一个十分浅显的恒等式开始的. 这个恒等式可以叫做和差变换公式, 又可以叫做分部求和公式, 它相当于积分学中的分部积分法. 从这个简单的恒等式可以直接导出阿贝耳引理, 从而又可导出一系列很有价值的命题. 简单地说, 这就是下表所示的模式:

和差变换公式………分部求和法

和差变换公式 ⟶ 阿贝耳引理 ⟶ 阿贝耳连续性定理 ⟶ 级数乘法定理

阿贝耳连续性定理 ⟶ 阿贝耳求和法

阿贝耳引理 ⟶ 无穷级数收敛性阿贝耳、狄里克雷判别法

和差变换公式 ↓ 分部积分法 ⟶ 积分第二中值定理 ⟶ 无穷积分收敛阿贝耳、狄里克雷判别法

现在我们就把有关阿贝耳方法的若干命题, 例题和习题分布在下列各节中.

§1. 和差变换及其应用

1. (和差变换公式)设 $m<n$. 则

$$\sum_{k=m}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k=A_nb_n-A_{m-1}b_m+\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1}).$$

［证］ 将等式左端的和拆开，然后对 A_k 进行同类项合并即得.

2.（分部求和法）设 $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k \quad (k=1, 2, \cdots, n)$. 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

［证］ 这是于命题 1 取 $A_0=0$, $A_k=s_k(k\geqslant 1)$ 的结果.

3. 设 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\to s(n\to\infty)$. 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s b_1 + (s_n - s) b_n - \sum_{k=1}^{n-1} (s_n - s)(b_{k+1} - b_k).$$

［证］ 这是于命题 1 取 $A_0=-s$, $A_k=s_k-s(k\geqslant 1)$ 的结果.

4.（阿贝耳引理）若对一切 $n=1, 2, 3, \cdots$ 而言,

$$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant 0,$$

$$m\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant M.$$

则有

$$b_1 m\leqslant a_1 b_1+a_2 b_2+\cdots+a_n b_n\leqslant b_1 M.$$

［证］ 应用命题 2，由于 $m\leqslant s_k\leqslant M$, $b_k-b_{k+1}\geqslant 0$, 我们得到

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant M b_n + \sum_{k=1}^{n-1} M (b_k - b_{k+1}) = M b_1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant m b_n + \sum_{k=1}^{n-1} m (b_k - b_{k+1}) = m b_1.$$

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为任意实数或复数，又设

$$A=\max(|a_1|, |a_1+a_2|, \cdots, |a_1+a_2+\cdots+a_n|).$$

则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant A\left\{\sum_{k=1}^{n-1} |b_{k+1}-b_k| + |b_n|\right\}.$$

6. 设 $\varphi(n)>0$, $\varphi(n)\uparrow\infty(n\to\infty)$. 又设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi(k) = o(\varphi(n)) \quad (n\to\infty). \quad \text{(Kronecker)}$$

［证］ 本题可用和差变换（命题 3）来证．设 $s=\Sigma a_n$，并设 $1<m<n$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi(k) = s\varphi(1) + (s_n - s)\varphi(n)$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}(s_k - s)(\varphi(k+1)-\varphi(k))$$

$$= O(1) + o(\varphi(n)) - \sum_{k=1}^{m-1}(s_k - s)(\varphi(k+1)-\varphi(k))$$

$$-\sum_{k=m}^{n-1}(s_k - s)(\varphi(k+1)-\varphi(k)).$$

从而对任意固定的m而言，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi(k)\right| \leqslant O(1) + o(\varphi(n)) - O(1)$$

$$+\varepsilon_m\sum_{k=m}^{n-1}(\varphi(k+1)-\varphi(k)),$$

此处 $\varepsilon_m = \max\limits_{k\geq m}|s_k - s|$．注意 $\varphi(n)\uparrow\infty$，且 $\varepsilon_m\to 0(m\to\infty)$，因此对于任意预先给定的正数 ε，总可以取m充分大，使得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi(k)\right| \leqslant o(\varphi(n)) + \varepsilon_m\varphi(n) \leqslant o(\varphi(n)) + \varepsilon\varphi(n).$$

由于上式左端与 ε 并无关系，自然可令 $\varepsilon\to 0$．故命题得证．

7. 设 $\varphi(n)\downarrow 0(n\to\infty)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi(n)$为收敛．则

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\varphi(n) = 0.$$

［证］ 显然在本命题中，只要将 $a_n\varphi(n)$ 看作是命题 6 中的 a_n，而把 $\varphi(n)^{-1}$ 看作是命题 6 中的 $\varphi(n)$，就立刻得到

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k\varphi(k))\varphi(k)^{-1}=o(\varphi(n)^{-1})\quad(n\to\infty).$$

［另证］ 本命题亦可利用阿贝耳引理直接证明. 任意给定 $\varepsilon>0$. 由收敛性假设, 可选取自然数 N, 使当 $n>N$ 时有

$$\frac{\varepsilon}{2}>a_N\varphi(N)+a_{N+1}\varphi(N+1)+\cdots+a_n\varphi(n)>-\frac{\varepsilon}{2}.$$

又显然

$$0<\varphi(N)^{-1}\leqslant\varphi(N+1)^{-1}\leqslant\cdots\leqslant\varphi(n)^{-1}.$$

故按命题 4（视 $\varphi(n)^{-1}, \cdots, \varphi(N)^{-1}$ 为 $b_1, \cdots, b_n$), 便得到

$$\frac{\varepsilon}{2}\varphi(n)^{-1}>a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n>-\frac{\varepsilon}{2}\varphi(n)^{-1}.$$

亦即

$$|(a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n)\varphi(n)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而由于 $\varphi(n)\to 0$, 故又可取自然数 N', 使 $n>N'$ 时

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_{N-1})\varphi(n)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n>\max(N, N')$时

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_n)\varphi(n)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

命题证毕.

很明显, 命题 6 与命题 7 是可以相互推导的.

8. 设 $\sigma>0$. 则当下列的狄利克雷(G. L. Dirichlet, 1805—1859)级数

$$a_1\cdot 1^{-\sigma}+a_2\cdot 2^{-\sigma}+a_3\cdot 3^{-\sigma}+\cdots+a_n\cdot n^{-\sigma}+\cdots$$

收敛时, 必有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)n^{-\sigma}=0$.

9. 设 $\{z_n\}_1^\infty$ 为任意一个复数列而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_{n+1}^{-1}-z_n^{-1}|=\infty$. 又设

级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$为收敛. 则必有

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N}|z_{n+1}^{-1}-z_n^{-1}|\right)^{-1}=0.$$

[提示] 应用命题5并仿照命题7的后一证法即可证得本命题.

10. 设当$k=1,2,3,\cdots$时$b_k\geqslant b_{k+1}$, $\frac{1}{2}(b_k+b_{k+2})\geqslant b_{k+1}$并且

$$m\leqslant s_1+s_2+\cdots+s_k\leqslant M.$$

其中$s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$. 则有下列不等式成立:

$$m(b_1-b_2)+s_nb_n<\sum_{k=1}^{n} a_kb_k<M(b_1-b_2)+s_nb_n.$$

[提示] 对于$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k$应用分部求和法并利用题设不等式即可.

11. 设N为一固定的大整数, $a_1, a_2, \cdots, a_N, b_1, b_2, \cdots, b_N$为任意两组常数. 今定义$b_k=0(k>N)$以及

$$\Delta^m b_k=\Delta^{m-1}b_{k+1}-\Delta^{m-1}b_k, \Delta b_k=b_{k+1}-b_k,$$

$$s_k^{(m)}=\sum_{\nu=1}^{k} s_\nu^{(m-1)}, \quad s_k^{(1)}=s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k.$$

则有下列恒等式成立:

$$\sum_{k=1}^{N} a_kb_k=(-1)^m\sum_{k=1}^{N} s_k^{(m)}\Delta^m b_k.$$

[提示] 相继应用m次分部求和法即可.

12. 设$a_k>0, b_k>0$, 而$\{v_k\}$为单调下降的正数列. 又设

$$H=\max\left(\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \cdots, \frac{B_n}{A_n}\right), \qquad h=\min\left(\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \cdots, \frac{B_n}{A_n}\right),$$

$$H_m=\max\left(\frac{B_m}{A_m},\frac{B_{m+1}}{A_{m+1}},\cdots,\frac{B_n}{A_n}\right),$$

$$h_m=\min\left(\frac{B_m}{A_m},\frac{B_{m+1}}{A_{m+1}},\cdots,\frac{B_n}{A_n}\right),$$

此处 $A_k=a_0+a_1+\cdots+a_k$, $B_k=b_0+b_1+\cdots+b_k$. 则有下列不等式成立:

$$h_m+(h-h_m)\frac{\sum_{k=0}^{m}a_kv_k}{\sum_{k=0}^{n}a_kv_k}\leqslant\frac{\sum_{k=0}^{n}b_kv_k}{\sum_{k=0}^{n}a_kv_k}$$

$$\leqslant H_m+(H-H_m)\frac{\sum_{k=0}^{m}a_kv_k}{\sum_{k=0}^{n}a_kv_k}.$$

[证] 本命题可看作阿贝耳引理的扩充. 其证明的办法亦大致相似. 首先我们注意到 $B_k\leqslant HA_k(k=0,1,\cdots,n)$, $B_r\leqslant H_mA_r$ $(r=m,m+1,\cdots,n)$. 因此

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}b_kv_k}{\sum_{k=0}^{n}a_kv_k}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}B_k(v_k-v_{k+1})+B_nv_n}{\sum_{k=0}^{n-1}A_k(v_k-v_{k+1})+A_nv_n}$$

$$\leqslant\frac{\sum_{k=0}^{m-1}HA_k(v_k-v_{k+1})+\sum_{k=m}^{n-1}H_mA_k(v_k-v_{k+1})+H_mA_nv_n}{\sum_{k=0}^{n-1}A_k(v_k-v_{k+1})+A_nv_n}$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}b_kv_k}{\sum_{k=0}^{n}a_kv_k}-H_m\leqslant(H-H_m)\frac{\sum_{k=0}^{m-1}A_k(v_k-v_{k+1})}{\sum_{k=0}^{n}a_kv_k}$$

$$\leqslant (H-H_m)\frac{\sum_{k=0}^{m} a_k v_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k}.$$

故命题中不等式的右段已告证明. 其左段的证法与此相似.

13. 保留命题 12 的全部假设，但将$\{v_n\}$改设为单调上升的数列. 则有

$$H_m-\frac{(H_m-h_m)A_n v_n+(H-H_m)A_m v_m}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k}\leqslant\frac{\sum_{k=0}^{n} b_k v_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k}$$

$$\leqslant h_m+\frac{(H_m-h_m)A_n v_n+(h_m-h)A_m v_m}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k}.$$

§2. 阿贝耳引理应用于级数收敛性问题

14. (阿贝耳定理)设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n=s$. 则 $\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=s$.

[证] 容易看出$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=f(x)$在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上为一致收敛. 事实上，对任给正数 ε，有N使当 $n>N$ 时 $\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right|<\varepsilon$. 从而由阿贝耳引理(命题 4)可知同时有$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k\right|<x^n\varepsilon\leqslant\varepsilon$, 只要$0\leqslant x\leqslant 1$. 因此由函数项级数的连续性定理即得

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)=s.$$

15. (级数乘法定理)令 $c_n=a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\cdots+a_n b_0$. 又设级数 Σa_n, Σb_n, Σc_n 都收敛. 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right). \qquad \text{(Abel)}$$

［证］ 因为绝对收敛的级数可以相乘，因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = s_1(x)s_2(x) \qquad (0 \leqslant x < 1).$$

于是由阿贝耳定理（命题 14）便立刻得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{x\to 1-} s_1(x)s_2(x) = \lim_{x\to 1-} s_1(x)\cdot \lim_{x\to 1-} s_2(x)$$

$$= s_1(1)s_2(1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

16. 试证

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)^2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots.$$

［证］ 于阿贝耳关于级数乘法的定理（命题 15）中，取 $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$，$a_0 = b_0 = 0$，则有

$$c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 = (-1)^n w_n,$$

此处

$$w_n = \frac{1}{1\cdot(n-1)} + \frac{1}{2\cdot(n-2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot 1} \quad (n \geqslant 2).$$

显然

$$n w_n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}+1\right)$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right) = 2\ln n + 2\gamma + o(1) \quad (n\to\infty),$$

式中 γ 为欧拉（L. Euler, 1707－1783）常数（参见第四章题 25）。由是 $w_n \to 0$. 又因为 $(n+1)w_{n+1} - n w_n = \frac{2}{n}$，$n(w_n - w_{n+1}) =$

$w_{n+1}-[(n+1)w_{n+1}-nw_n]=w_{n+1}-\frac{2}{n}>0$，故知 $w_n\downarrow 0$. 从而由莱布尼兹（G. W. Leibniz, 1646—1716）收敛判别法可见级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n w_n$ 为收敛．所以最后应用命题 15 即获证明．

17. 试证级数

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

的自乘级数为发散．

18. 设 $u_n\downarrow 0, v_n\downarrow 0$．则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n$ 的乘积级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}w_n$ 为收敛的充要条件是：

$$w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1\to 0. \qquad \text{(Pringsheim)}$$

［证］ 条件的必要性是显然的．今证充分性．写

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k,\quad B_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}v_n,$$

$$C_n=\sum_{n=1}^{n}(-1)^{k-1}w_n,$$

并以 A, B 分别表 $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k$，$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}v_k$ 之和．则

$$\begin{aligned}C_n&=w_1-w_2+w_3-\cdots+(-1)^{n-1}w_n\\&=u_1v_1-u_1v_2+u_1v_3-\cdots+(-1)^{n-1}u_1v_n\\&\qquad-u_2v_1+u_2v_2-\cdots+(-1)^{n-1}u_2v_{n-1}\\&\qquad\qquad+u_3v_1-\cdots+(-1)^{n-1}u_3v_{n-2}\\&\qquad\qquad\qquad-\cdots\cdots\cdots\\&\qquad\qquad\qquad\qquad+(-1)^{n-1}u_nv_1\\&=u_1B_n-u_2B_{n-1}+u_3B_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}u_nB_1.\end{aligned}$$

从而

$$A_nB-C_n=u_1(B-B_n)-u_2(B-B_{n-1})+u_3(B-B_{n-2})-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}u_n(B-B_1).$$

据题设

$$|B-B_n|\leqslant v_{n+1},\ |B-B_{n-1}|\leqslant v_n,\ \cdots,\ |B-B_1|\leqslant v_2,$$

由是

$$|A_nB-C_n|\leqslant u_1v_{n+1}+u_2v_n+\cdots+u_nv_2$$
$$=w_{n+1}-u_{n+1}v_1\to 0(n\to\infty).$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}A_nB=AB.$$

19. 设 $u_n\downarrow 0, v_n\downarrow 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n$ 的乘积级数收敛的充要条件是 $U_nv_n\to 0$ 并且 $V_nu_n\to 0$, 这里

$U_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$, $V_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$. (Pringsheim)

[证] 设 $U_nv_n\to 0, V_nu_n\to 0$. 则由 u_n 和 v_n 的单调性, 有

$$w_{2n}=u_1v_{2n}+u_2v_{2n-1}+\cdots+u_nv_{n+1}+u_{n+1}v_n+\cdots+u_{2n}v_1$$
$$\leqslant(u_1+\cdots+u_n)v_n+(v_1+\cdots+v_n)u_n=U_nv_n+V_nu_n,$$
$$w_{2n+1}\leqslant U_nv_n+V_nu_n+u_{n+1}v_{n+1}.$$

所以 $w_n\to 0$.

反之, 设 $w_n\to 0$, 则由

$$U_nv_n=(u_1+\cdots+u_n)v_n\leqslant u_1v_n+\cdots+u_nv_1=w_n,$$
$$V_nu_n\leqslant w_n$$

可知 $U_nv_n\to 0$, $V_nu_n\to 0$. 证毕.

20. 试讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}$ 的乘积级数的收敛性, 这里 $0<\alpha<1, 0<\beta<1$.

21. 设 Σa_n 和 Σb_n 二收敛级数中至少有一个绝对收敛, 又设

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. 则 Σc_n 必收敛，且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \qquad \text{(Mertens)}$$

［证］ 不妨设 Σa_n 为绝对收敛，且设

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \to A, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \to B, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = A', \quad |B_n| \leqslant B'.$$

则如同命题 18 之证明，可得

$$A_n B - C_n = a_0(B - B_n) + a_1(B - B_{n-1}) + \cdots + a_n(B - B_0).$$

从而

$$|A_n B - C_n| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} |a_\nu|\,|B - B_{n-\nu}| + \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} |a_\nu|\,|B - B_{n-\nu}|$$

$$\leqslant A' \max_{\left[\frac{n}{2}\right] \leqslant k \leqslant n} |B - B_k| + 2B' \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} |a_\nu|.$$

可见 $A_n B - C_n \to 0$，即 $C_n \to AB\ (n \to \infty)$.

22. (阿贝耳判别法)设级数 Σa_n 为收敛而 $\Sigma(b_n - b_{n+1})$ 为绝对收敛(其中 a_n, b_n 可以是复数)，则 $\Sigma a_n b_n$ 必收敛.

［证］ 设 $\Sigma |b_n - b_{n+1}| = B$. 则 $|b_n| = \left|b_1 - \sum_{1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})\right| \leqslant |b_1| + B$. 于是由命题 5 的阿贝耳引理，得

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n} a_k b_k\right| \leqslant \left\{\max_{1 \leqslant p \leqslant n} \left|\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k\right|\right\} \cdot$$

$$\left\{\sum_{k=m+1}^{m+n-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_{m+n}|\right\}$$

$$\leqslant (2B + |b_1|) \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \left|\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k\right|.$$