高等学校经典教材"三点"丛书

积分变换

（东南大·第四版）

重点 难点 考点辅导与精析

主编 李昌兴 史克岗

$$\mathrm{F}\left[f(t)\right]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书是与东南大学编写的《积分变换(第四版)》相配套的学习辅导书.按原教材各章的顺序,本书每章包括重点及知识点辅导与精析、难点及典型例题辅导与精析、考点及考研真题辅导与精析、课后习题解答四部分.本书重在于通过对内容和方法进行归纳总结,把基本理论、基本方法融于典型方法与范例中;注重分析解题思路,揭示解题规律,解决学习中的困难,引导读者思考,培养学习兴趣.

本书既可作为非数学类专业理工科本科生学习积分变换课程的辅导书,也可作为从事积分变换教学工作者的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

积分变换重点难点考点辅导与精析/李昌兴,史克岗主编.—西安:西北工业大学出版社,2011.1

ISBN 978-7-5612-2932-3

Ⅰ.①积… Ⅱ.①李… ②史… Ⅲ.①积分变换—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 211667 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号 **邮编**:710072
电 话:(029)88493844 88491757
网 址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西丰源印务有限公司印刷
开 本:727 mm×960 mm 1/16
印 张:8
字 数:132 千字
版 次:2011 年 1 月第 1 版 2011 年 1 月第 1 次印刷
定 价:15.00 元

前 言

“积分变换”是高等学校理工科专业普遍开设的一门数学基础课，它是自然科学与工程技术中常用的数学工具，因而备受广大科技工作者的重视. 为了有效地帮助广大读者正确理解和掌握其理论和方法，解决学习过程中遇到的一些困难，根据多年的教学经验，根据教育部组织制定的新《积分变换课程的教学基本要求》，我们编写了这本教学参考书.

本书每章分为重点及知识点辅导与精析、难点及典型例题辅导与精析、考点及考研真题辅导与精析、课后习题解答四部分. 重点及知识点辅导与精析部分简述了各章的基本概念、主要定理、性质及计算公式，指出了各章知识点的有机联系，使知识更加系统化、条理化，读者能够从整体上把握各章所涵盖的知识要点. 难点及典型例题辅导与精析部分，精选了若干具有代表性的典型例题，力求做到选题全面，重点突出，解答详细，对部分题目指出了解题思路、解题方法，旨在帮助读者在以后的解题过程中能够举一反三、触类旁通，化解学习难点. 考点及考研真题辅导与精析部分，收集并解答了国内许多知名院校期末考试题及部分考研试题，以使读者明确考点，做到心中有数、有的放矢，着重于明确解题思路，揭示解题规律. 课后习题解答部分，按照习题所在章节，提供了与教材内容相一致的解题方法，对于部分习题可能遇到的困难或一题多解的情形，尽可能地加以说明，以提高读者解题方法的多样性和灵活性.

本书编写力求做到层次分明，步骤清晰，书写格式规范，使读者通过学习，能够对“积分变换”的理论和方法有更深入的理解.

本书共分 2 章，第 1 章由史克岗，雷飞燕编写，第 2 章由李昌兴，潘芳芳编写，全书由李昌兴、史克岗统稿、定稿.

在本书的编写过程中，参阅了大量国内同类教材及相关辅导书，得到了启迪和教益，谨向有关作者深致谢意！

由于水平有限，疏漏、不妥之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2010 年 4 月

目　　录

第 1 章　Fourier 变换 ………………………………… 1

1.1　重点及知识点辅导与精析 ……………………… 1
1.2　难点及典型例题辅导与精析 …………………… 6
1.3　考点及考研真题辅导与精析…………………… 13
1.4　课后习题解答………………………………… 22

第 2 章　Laplace 变换………………………………… 50

2.1　重点及知识点辅导与精析……………………… 50
2.2　难点及典型例题辅导与精析…………………… 55
2.3　考点及考研真题辅导与精析…………………… 65
2.4　课后习题解答………………………………… 71

参考文献……………………………………………… 121

第 1 章

Fourier 变换

1.1 重点及知识点辅导与精析

1.1.1 Fourier 积分

1. Fourier 级数的展开式

设 $f_T(t)$ 以 T 为周期且在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足 Dirichlet 条件，则 $f_T(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上可以展开成 Fourier 级数. 在 $f_T(t)$ 的连续点处，有

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{i\omega_n t}$$

其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T},\quad \omega_n=n\omega,\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-in\omega t}dt\quad (n=0,\pm1,\cdots)$$

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2},\quad n=1,2\cdots$$

在 $f_T(t)$ 的间断点处，$f_T(t)$ 以 $\frac{1}{2}[f_T(t+0)+f_T(t-0)]$ 代替.

2. Fourier 积分定理

对于$(-\infty,+\infty)$上的任意一个非周期函数 $f(t)$，都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 当 $T\to\infty$ 时转化而来的. 因此，从 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数的复数形式出发，能够得到一个非周期函数的Fourier积分公式，条件为：$f(t)$ 在任

意有限区间上满足 Dirichlet 条件，且在区间$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，则在 $f(t)$ 的连续点处有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega$$

在 $f(t)$ 的间断点处，$f(t)$ 以$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$代替.

3. Fourier 积分公式的其他形式

（1）三角形式.

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega$$

（2）正弦积分公式. 当 $f(t)$ 为奇函数时，有

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right]\sin\omega t d\omega$$

（3）余弦积分公式. 当 $f(t)$ 为偶函数时，有

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right]\cos\omega t d\omega$$

若 $f(t)$ 仅在$(0,+\infty)$上有定义，且满足 Fourier 积分收敛定理的条件，通过奇（或偶）延拓，便可得到 $f(t)$ 的 Fourier 正弦（或余弦）积分展开式.

1.1.2 Fourier 变换

1. Fourier 变换的概念

Fourier 变换对的一般形式为

$$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Fourier 正弦变换对：当 $f(t)$ 为奇函数时，有

$$\mathscr{F}_s[f(t)]=F_s(\omega)=\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt$$

$$f(t)=\mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\omega)]=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega t d\omega$$

Fourier 余弦变换对：当 $f(t)$ 为偶函数时，有

$$\mathscr{F}_c[f(t)]=F_c(\omega)=\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt$$

$$f(t)=\mathscr{F}_c^{-1}[F_c(\omega)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

它们可分别简记为 $f(t)\Leftrightarrow F(\omega)$，$f(t)\Leftrightarrow F_s(\omega)$，$f(t)\Leftrightarrow F_c(\omega)$. 显然，当 $f(t)$ 为奇函数时，$F(\omega)=-2\mathrm{i}F_s(\omega)$；当 $f(t)$ 为偶函数时，$F(\omega)=2F_c(\omega)$.

2. 单位脉冲函数及其 Fourier 变换

(1)δ -函数的重要性质.

1) 筛选性质. 若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,dt=f(0)$$

特别地，有$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$. 一般地，有$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt=f(t_0)$.

【注】 由此性质，可知 $\mathscr{F}[\delta(t)]=1$，$\mathscr{F}^{-1}[1]=\delta(t)$，即 $\delta(t)\Leftrightarrow 1$. 同理，$\delta(t-t_0)\Leftrightarrow e^{-\mathrm{i}\omega t_0}$.

2)$\delta(t)=\delta(-t)$.

3) $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau=u(t)$，$\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$.

4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)\,dt=(-1)^n f^{(n)}(0)$.

(2) 几个重要函数的 Fourier 变换.

$$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega),\quad \mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega),\quad \mathscr{F}[\mathrm{sgn}(t)]=\frac{2}{\mathrm{i}\omega}$$

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=\mathrm{i}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

3. Fourier 变换的物理意义 —— 频谱

(1) 非正弦的周期函数 $f_T(t)$ 的频谱. 在 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数展开式中，

$$a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t=A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$

称为第 n 次谐波，$A_0=|a_0|$，$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ 称为频率为 $n\omega$ 的第 n 次谐波的振幅. 在复数形式中，第 n 次谐波为 $c_n e^{\mathrm{i}n\omega t}+c_{-n}e^{-\mathrm{i}n\omega t}$，并且

$$|c_n|=|c_{-n}|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

所以 $A_n=2|c_n|$，它描述了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况.

在直角坐标系中，用横坐标表示频率，纵坐标表示振幅，作出频谱图. 由于不连续，故称为离散频谱. 频谱图清楚地表明了一个非正弦周期函数包含

了哪些频率分量及各分量所占比重.

(2) 非周期函数的频谱. 在频谱分析中，函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的频谱函数，其模 $|F(\omega)|$ 称为振幅频谱(简称频谱). 由于 ω 连续变化，频谱图是连续曲线，故称为连续频谱. 振幅频谱 $|F(\omega)|$ 是频率 ω 的偶函数. 相角频谱

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t}$$

是频率 ω 的奇函数. 对于一个时间函数作 Fourier 变换，就是求这个函数的频谱函数.

4. Fourier 变换的性质

在下述性质中，需要求 Fourier 变化的函数都满足 Fourier 积分定理的条件，并且

$$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega),\quad \mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega),\quad \mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$$

(1) 线性性质.

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$$

(2) 位移性质.

$$\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega_0 t}F(\omega),\quad \mathscr{F}^{-1}[F(\omega\mp\omega_0)]=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega_0 t}f(t)$$

(3) 对称性质.

$$\mathscr{F}[f(\pm t)]=2\pi F(\mp\omega)$$

(4) 微分性质.

如果 $f^{(k)}(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点，且 $\lim\limits_{|t|\to\infty}f^{(k)}(t)=0, k=0,1,2\cdots,n-1$，则

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{i}\omega)^n F(\omega),\quad F^{(n)}(\omega)=(-\mathrm{i})^n\mathscr{F}[t^n f(t)]$$

(5) 积分性质.

如果当 $t\to+\infty$ 时，$g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t\to 0$，则 $\mathscr{F}[g(t)]=\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega)$.

当 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)\neq 0$ 时，$\mathscr{F}[g(t)]=\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$.

(6) 乘积定理.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}f_2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\overline{f_2(t)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)\,\overline{F_2(\omega)}\,\mathrm{d}\omega$$

(7) 能量积分(Parseval 等式).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

函数 $S(\omega)=|F(\omega)|^2$ 称为能量密度函数,它决定函数 $f(t)$ 的能量分布规律. Parseval 等式表明,将能量密度函数对所有的频率积分就得到函数的总能量$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t$.

5. 卷积与相关函数

(1) 卷积的概念.

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

且满足交换律、分配律、结合律.

$$|f_1(t)*f_2(t)|\leqslant|f_1(t)|*|f_2(t)|\quad(\text{卷积不等式})$$

(2) 卷积定理. 设 $\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$,$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$,则

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)F_2(\omega),\quad \mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)F_2(\omega)]=f_1(t)*f_2(t)$$

(3) 相关函数的概念. 函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的互相关函数为

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)\,\mathrm{d}t,\quad R_{12}(\tau)=R_{21}(-\tau)$$

函数 $f(t)$ 的自相关函数为

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)\,\mathrm{d}t,\quad R(\tau)=R(-\tau)$$

(4) 相关函数和能量谱密度的关系.

1) 自相关函数和能量密度函数构成一个 Fourier 变换对:$R(\tau)\Leftrightarrow S(\omega)$,即

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega,\quad S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

2) 互能量谱密度与互相关函数构成一个 Fourier 变换对:$R_{12}(\tau)\Leftrightarrow S_{12}(\omega)$,即

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{12}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega,\quad S_{12}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

6. Fourier 变换的应用

Fourier 变换是分析非周期函数频谱的理论基础,在频谱分析中有重要应

用. 另外,Fourier 变换还用来求解某些微分、积分方程和偏微分方程的定解问题.

1.2 难点及典型例题辅导与精析

例 1 试求函数 $f(t)=\begin{cases} t, & |t|\leqslant 1 \\ 0, & |t|>1 \end{cases}$ 的 Fourier 积分表达式.

解 函数的积分表达式可以用复数形式,也可以用三角形式,由于函数是奇函数,还可以用正弦积分公式表达. 另外,它也可以用像函数的微分性质计算表达.

方法一:利用 Fourier 积分公式的复数形式,在函数的连续点处,有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}\tau(\cos\omega\tau-\mathrm{i}\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{-\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{1}\tau\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{-\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)(\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega\quad(t\neq\pm 1)$$

当 $t=\pm 1$ 时,$f(t)$ 应以 $\dfrac{f(\pm 1+0)+f(\pm 1-0)}{2}=\pm\dfrac{1}{2}$ 代替.

方法二:利用 Fourier 积分公式的三角形式,在函数的连续点处,有

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}\tau\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}\tau(\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{1}\tau\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega\quad(t\neq\pm 1)$$

当 $t=\pm 1$ 时,$f(t)$ 应以 $\dfrac{f(\pm 1+0)+f(\pm 1-0)}{2}=\pm\dfrac{1}{2}$ 代替.

方法三：利用 Fourier 正弦积分公式，在函数的连续点处，有

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{1}\tau\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega\quad(t\neq\pm1)$$

当 $t=\pm1$ 时，$f(t)$ 应以 $\dfrac{f(\pm1+0)+f(\pm1-0)}{2}=\pm\dfrac{1}{2}$ 代替.

方法四：利用像函数的微分性质.

令 $\mathscr{F}[g(t)]=G(\omega)=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$，其中 $g(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant1\\0, & |t|>1\end{cases}$.

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[t\cdot g(t)]=-\frac{1}{\mathrm{i}}G'(\omega)=-2\mathrm{i}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)$$

所以，在函数的连续点处，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}-2\mathrm{i}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{-\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)(\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t)\,\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega\quad(t\neq\pm1)$$

当 $t=\pm1$ 时，$f(t)$ 应以 $\dfrac{f(\pm1+0)+f(\pm1-0)}{2}=\pm\dfrac{1}{2}$ 代替.

根据上述结果，我们可以得到

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}t, & |t|<1\\[2mm]\dfrac{\pi}{4}, & t=1\\[2mm]-\dfrac{\pi}{4}, & t=-1\end{cases}$$

即根据 $f(t)$ 的 Fourier 积分公式，可以推证一些广义积分的结果，这也是含参数变量积分的一种巧妙解法.

例 2 求函数 $f(t)=tu(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\sin\omega_0 t(\beta>0)$ 的 Fourier 变换.

解 求函数的 Fourier 变换，可以根据定义直接计算，也可以利用 Fourier 变换的性质间接计算，只有熟悉性质的基本特点，在解题过程中才能运用自如.

方法一：利用 Fourier 变换的定义.

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}tu(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\sin\omega_0 t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega)t}\sin\omega_0 t\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega)t}\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t})\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-[\beta+\mathrm{i}(\omega-\omega_0)]t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-[\beta+\mathrm{i}(\omega+\omega_0)]t}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2\omega_0(\beta+\mathrm{i}\omega)}{[\omega_0^2+(\beta+\mathrm{i}\omega)^2]^2}$$

方法二：利用像函数的微分性质.

$$\mathscr{F}[u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\sin\omega_0 t]=\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(\beta+\mathrm{i}\omega)^2}$$

再由微分性质，可得

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(\beta+\mathrm{i}\omega)^2}\right]=\frac{2\omega_0(\beta+\mathrm{i}\omega)}{[\omega_0^2+(\beta+\mathrm{i}\omega)^2]^2}$$

方法三：利用像函数的位移性质. 由 $\mathscr{F}[u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}]=\dfrac{1}{(\beta+\mathrm{i}\omega)}$，从而由位移性质，得

$$\mathscr{F}[u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathscr{F}[u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}]-\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathscr{F}[u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}]=$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{\beta+\mathrm{i}(\omega-\omega_0)}-\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{\beta+\mathrm{i}(\omega+\omega_0)}=$$

$$\frac{\omega_0}{[\omega_0^2+(\beta+\mathrm{i}\omega)^2]}$$

同方法二，即可得到其结论.

方法四：由

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=\pi\mathrm{i}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

再由微分性质，可得

$$\mathscr{F}[t\sin\omega_0 t]=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\{\pi\mathrm{i}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\}=$$

$$\pi[\delta'(\omega-\omega_0)-\delta'(\omega+\omega_0)]$$

又 $\mathscr{F}[u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}]=\dfrac{1}{(\beta+\mathrm{i}\omega)}$，由卷积公式，可得

$$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{2\pi}\left\{\pi[\delta'(\omega-\omega_0)-\delta'(\omega+\omega_0)]*\frac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega}\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\delta'(\omega-\omega_0)*\frac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega}\right]-\left[\delta'(\omega+\omega_0)*\frac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega}\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1.}{\beta+\mathrm{i}(\omega-\omega_0)}\right]'-\left[\frac{1}{\beta+\mathrm{i}(\omega-\omega_0)}\right]'\right\}=$$
$$\frac{2\omega_0(\beta+\mathrm{i}\omega)}{[\omega_0^2+(\beta+\mathrm{i}\omega)^2]^2}$$

方法五:利用像函数的卷积公式.由

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=\pi\mathrm{i}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$
$$\mathscr{F}[tu(t)\mathrm{e}^{-\beta t}]=\frac{1}{(\beta+\mathrm{i}\omega)^2}$$

于是

$$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{2\pi}\{\pi\mathrm{i}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\}*\frac{1}{(\beta+\mathrm{i}\omega)^2}=$$
$$\frac{2\omega_0(\beta+\mathrm{i}\omega)}{[\omega_0^2+(\beta+\mathrm{i}\omega)^2]^2}$$

例 3 求下列函数的 Fourier 逆变换.

(1) $F(\omega)=\omega\cos\omega t_0$;　　　(2) $F(\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}+\mathrm{i}\pi\delta'(\omega)$.

解 (1) 求函数的 Fourier 逆变换,通常可以用逆变换公式,结合 Fourier 变换的性质完成,也可以用常用函数的 Fourier 变换结果或 Fourier 变换表来完成.

方法一:利用 Euler 公式,Fourier 变换的位移及微分性质. 因为

$$\cos\omega t_0=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}),\quad \mathscr{F}[\delta(t)]=1$$

由位移性质,可得

$$\mathscr{F}[\delta(t+t_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0},\quad \mathscr{F}[\delta(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$$

由线性性质,有

$$\mathscr{F}^{-1}[\cos\omega t_0]=\frac{1}{2}[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)]$$

设 $G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\cos\omega t_0$,则由微分性质,可得

$$\mathscr{F}[g'(t)]=\mathrm{i}\omega\mathscr{F}[g(t)]=\mathrm{i}\omega\cos\omega t_0$$
$$g'(t)=\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{i}\omega\cos\omega_0 t]=\mathrm{i}\mathscr{F}^{-1}[\omega\cos\omega t_0]$$

即

$$\mathscr{F}^{-1}[\omega\cos\omega t_0]=\frac{1}{\mathrm{i}}g'(t)=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\delta'(t+t_0)+\delta'(t-t_0)]$$

方法二:利用 Fourier 变换的对称性质和像函数的微分性质计算.

设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\omega\cos\omega t_0$,则 $f(\pm\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mp t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$,即

$$\mathscr{F}[F(\mp t)]=2\pi f(\pm\omega)$$

令 $\omega=-t$，有

$$\mathscr{F}[F(-t)]=-t\cos(-t)t_0=-t\cos(t_0 t)$$

令 $\qquad g(t)=\cos(t_0 t),\quad G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\pi[\delta(\omega+t_0)+\delta(\omega-t_0)]$

由像函数的微分性质，可得

$$\mathscr{F}[F(-t)]=-\mathrm{i}G'(\omega)=-\mathrm{i}\pi[\delta'(\omega+t_0)+\delta'(\omega-t_0)]$$

即

$$2\pi f(\omega)=-\mathrm{i}\pi[\delta'(\omega+t_0)+\delta'(\omega-t_0)]$$

令 $\omega=t$，则有

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[\omega]=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\delta'(\omega+t_0)+\delta'(\omega-t_0)]$$

(2) 由于

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\mathrm{i}\pi\delta'(\omega)\right]=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\right]+\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\mathscr{F}^{-1}[\delta'(\omega)]$$

而 $\mathscr{F}^{-1}[t]=2\pi\mathrm{i}\delta'(\omega)$，即

$$\mathrm{i}\pi\mathscr{F}[\delta'(\omega)]=\frac{t}{2}$$

又因为 $\mathscr{F}[\mathrm{sgn}t]=\dfrac{2}{\mathrm{i}\omega}$，所以

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}t$$

因此 $$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2}(\mathrm{sgn}t+t)$$

例 4 求满足方程 $\int_0^{+\infty}y(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=f(t)$ 的解，

其中 $$f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1\\ 2, & 1\leqslant t<2\\ 0, & t\geqslant 2\end{cases}$$

解 这是一个含未知函数的积分方程，从方程的左端可以看出，能够利用 Fourier 余弦变换公式直接求得结果.

方法一：原方程可改写为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}y(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}f(t)$$

则

$$y(\omega)=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1\cos\omega t\,\mathrm{d}t+\int_1^2 2\cos\omega t\,\mathrm{d}t\right]=$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^1+\frac{2}{\omega}\sin\omega t\Big|_1^2\right]=\frac{2(2\sin2\omega-\sin\omega)}{\pi\omega}$$

方法二：将 $f(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上作偶延拓，用 Fourier 余弦积分公式表示，即

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(u)\cos\omega u\,\mathrm{d}u\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^1\cos\omega u\,\mathrm{d}u+\int_1^2 2\cos\omega u\,\mathrm{d}u\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{2(2\sin2\omega-\sin\omega)}{\pi\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

与原方程对比，可得

$$y(\omega)=\frac{2(2\sin2\omega-\sin\omega)}{\pi\omega}$$

例 5 求积分方程 $x(t)+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-\tau|}x(\tau)\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{-\beta|t|}$ 的解，其中 $\beta>0$.

解 原方程中的积分是未知函数 $x(t)$ 与 $\mathrm{e}^{-|t|}$ 的卷积，对方程两边取 Fourier 变换并应用卷积定理可得到像函数 $\mathscr{F}[x(t)]$，再取 Fourier 逆变换可得函数 $x(t)$.

令 $\mathscr{F}[x(t)]=X(\omega)$，对方程两边取 Fourier 变换，有

$$X(\omega)+X(\omega)\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-|t|}]=\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta|t|}]$$

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta|t|}]\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\beta-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t=\frac{2\beta}{\omega^2+\beta^2}$$

则

$$X(\omega)=\frac{2\beta(\omega^2+1)}{(\omega^2+3)(\omega^2+\beta^2)}$$

当 $\beta\neq\sqrt{3}$ 时，有

$$X(\omega)=\frac{\beta^2-1}{\beta^2-3}\cdot\frac{2\beta}{\omega^2+\beta^2}-\frac{2\sqrt{3}\beta}{3(\beta^2-3)}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\omega^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$x(t)=\mathscr{F}^{-1}[X(\omega)]=\frac{\beta^2-1}{\beta^2-3}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{2\beta}{\omega^2+\beta^2}\right]-\frac{2\sqrt{3}\beta}{3\beta^2-9}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{2\sqrt{3}}{\omega^2+3^2}\right]=$$

$$\frac{\beta^2-1}{\beta^2-3}\mathrm{e}^{-\beta|t|}-\frac{2\sqrt{3}}{3(\beta^2-3)}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}$$

当 $\beta=\sqrt{3}$ 时，有

$$x(t)=\mathscr{F}^{-1}[X(t)]=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{2\sqrt{3}(\omega^2+1)}{(\omega^2+3)^2}\right]=$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2+1}{(\omega^2+3)^2}e^{i\omega t}d\omega$$

当 $t>0$ 时，有

$$x(t)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z^2+1}{(z^2+3)^2}e^{izt},\sqrt{3}i\right]=\frac{2-\sqrt{3}t}{3}e^{-\sqrt{3}i}$$

当 $t=0$ 时，有

$$x(t)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z^2+1}{(z^2+3)^2},\sqrt{3}i\right]=\frac{2}{3}$$

当 $t<0$ 时，令 $\omega=-y$，有

$$x(t)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2+1}{(y^2+3)^2}e^{-ity}dy=\frac{\sqrt{3}}{\pi}2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z^2+1}{(z^2+3)^2}e^{-izt},\sqrt{3}i\right]=$$

$$\frac{2+\sqrt{3}t}{3}e^{\sqrt{3}t}$$

例 6 求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\Psi(x)\end{cases}\quad(x\in\mathbf{R},\ t>0)$$

解 这是一类弦自由振动的初值问题. 因为变量 x 的变化范围为 $(-\infty,+\infty)$，所以对方程两边及初始条件关于 x 取 Fourier 变换. 记

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=U(\omega,t),\quad \mathscr{F}[\varphi(x)]=\Phi(\omega),\quad \mathscr{F}[\psi(x)]=\Psi(\omega)$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\right]=(i\omega)^2U(\omega,t)=-\omega^2U(\omega,t),\quad \mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}[u(x,t)]=\frac{d^2}{dt^2}U(\omega,t)$$

则原定解问题转化为

$$\begin{cases}\dfrac{d^2U}{dt^2}=-a^2\omega^2U \\ U\big|_{t=0}=\Phi(\omega) \\ \dfrac{dU}{dt}\Big|_{t=0}=\Psi(\omega)\end{cases}$$

方程的通解为

$$U(\omega,t)=c_1\sin\omega at+c_2\cos\omega at$$

由初始条件，可得

$$c_1=\frac{1}{a\omega}\Psi(\omega),\quad c_2=\Phi(\omega)$$

初值问题的解为