萬有文庫
第二集七百種
王雲五主編

數理精蘊

(二)

清聖祖敕編

商務印書館發行

數理精蘊

(二)

清聖祖敕編

國學基本叢書

萬有文庫

第二集七百種

總編纂者
王雲五

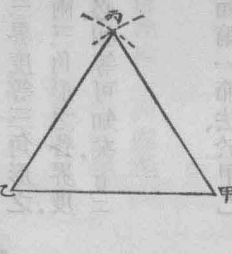
商務印書館發行

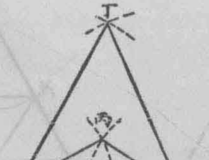
數理精蘊上編卷四

幾何原本十一

第一

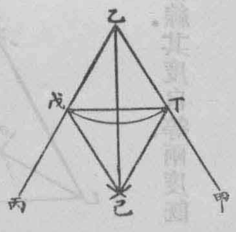
作三界度等之三角形及兩界度等之三角形法。如欲作三界度等之三角形。則作一甲乙線。取甲乙之度爲準。以甲爲心。自甲至丙作弧一段。又以乙爲心自乙至丙作弧一段。兩弧相交處至甲乙作二線。卽成三界度等之甲丙乙三角形矣。蓋甲乙丙三角形之甲乙、甲丙、丙乙三界。原係一圜之輻線。其度必等。度既等而線未有不等者也。若欲作兩界度等之三角形。仍作一甲乙線。比甲乙線之度或大或小取一度。以甲乙二處爲圜心皆至丙作弧兩段。仍於兩弧相交處作二線。卽成兩界度等之甲丙乙三角形矣。蓋甲丙、丙乙二線。雖比甲乙線或大或小。然二線俱同爲一圜之輻線。其度自等。兩度既等。則兩界線亦必等也。





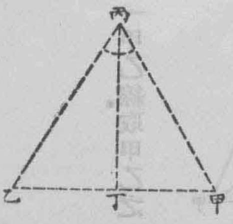
第二

平分直線角爲兩分法。如甲乙丙角。欲平分爲兩分。乃以乙角爲心。任意作弧線一段。則乙甲、乙丙二線。截於丁戊。卽成乙丁、乙戊等度二線。自弧兩端復作一丁戊線。照丁戊線度。依前節法。作一三界度等之丁己戊三角形。則己角與乙角正相對。乃自乙角至己角、作一乙己直線。卽分甲乙丙角爲兩平分矣。何也。其乙丁己、乙戊己兩三角形之乙丁、乙戊二界。是一圜之輻線。其度等。而丁己、戊己二界。是三界度等三角形之兩傍界。其度亦等。而乙己線既爲兩形之共界。其等無疑。此兩三角形之各界度。既各相等。則與丁己、戊己界相對之丁乙己、戊乙己二角。亦必相等可知矣。見二卷第七節。



第三

平分一直線爲兩分法。如有甲乙一直線。欲平分爲兩段。乃如第一節法、於甲乙線上、作一甲丙乙三界度等之三角形。又如第二節法。平分甲丙乙角爲二分。自丙角作垂線至甲乙線。卽平分甲乙線於丁。而甲丁、丁乙兩段必等也。蓋甲丙乙原爲三界度等之三角形。今作丙丁垂線。平分爲兩三角形。則兩三角形之相當各角各界必俱等。而甲丁、丁乙爲兩形相當之底界。其度安得不等乎。



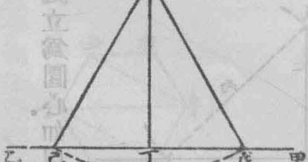
第四

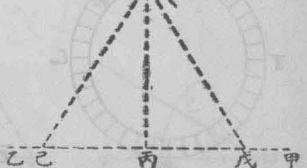
橫線上立縱線法。如有甲乙一橫線。欲於丙處立一縱線。則於丙之兩傍。任意取等度二分爲戊丙、己丙、

以戊爲心。於橫線上作弧一段。又以己爲心。於橫線上作弧一段。兩弧相交於丁。此丁處正與丙相對。自丁至丙作一直線。卽甲乙線上正立之縱線也。試自戊己至丁作二線。成一戊丁己三角形。此形之丁戊、丁己兩線。俱同一圜之輻線。其度必等。而丁丙線旣將戊己底線爲兩平分。則丁丙線必爲甲乙線之垂線矣。見二卷第十節。

第五

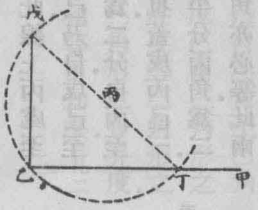
有一橫線。自此線上不拘何處立縱線法。如有甲乙一橫線。自此線上丙處至甲乙線。欲作一縱線。則以丙爲心作弧線一段。截甲乙線於戊己。乃自戊己至丙作二線。成一戊丙己三角形。又照第二節分角法平分丙角爲二分。自丙至甲乙線上作丙丁線。則此丙丁線卽爲自丙至甲乙線之縱線也。蓋戊丙己三角形之丙戊、丙己兩界度等。故戊角與己角必等。而丙丁線又平分丙角爲二。則所分之戊丙丁、己丙丁兩角度亦等。而丙丁戊、丙丁己兩並角亦必等。此兩並角旣等。則成兩直角。旣成兩直角。則丙丁線必爲甲乙橫線之垂線矣。見一卷第十節。

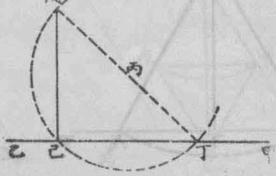




第六

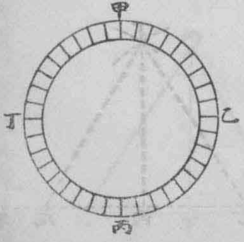
在橫線一邊立縱線法。如有甲乙橫線。在乙邊欲立一縱線。則於甲乙線上不拘何處立爲圓心。如以丙爲圓心。自丙至乙爲圓界旋轉作一圓。則於甲乙線丁處相交。即自丁處過丙心至相對界作一直線。交圓界於戊。乃自戊至乙作一戊乙直線。即是乙邊所立之縱線也。蓋丁乙戊角因在半圓。必爲直角。見四卷第十四節。既爲直角。則戊乙線必爲甲乙線之垂線。既爲垂線。故爲橫線一邊所立之縱線也。若甲乙線一邊之上有一戊點。欲自戊至甲乙線一邊作一垂線。則自戊至甲乙線、任意作一戊丁斜線。遂將戊丁斜線平分於丙。於是以丙爲心。自戊旋轉作一圓。則截甲乙線於己。自戊至己作一直線。即是欲作之垂線也。蓋戊己丁角既在半圓。必爲直角。既爲直角。則戊己必爲垂線矣。





第七

一圓分爲三百六十度法。如甲乙丙丁一圓界。欲分爲三百六十度。則取圓之輻線度。緣圓界比之。即分圓界爲六段。將六段各平分爲二。則爲十二段。十二段各平分爲三。則爲三十六段。三十六段各平分爲十。即成三百六十度矣。

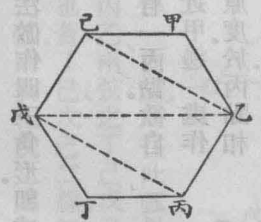


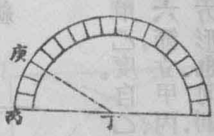
第八

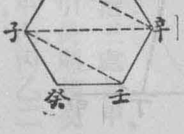
一直線上作角度法。如甲乙線上、欲作三十度之角。則用有度之圜。依圜之丙丁輻線度。截甲乙線於戊。於是以甲爲心。自戊作弧一段。復依圜界之丙庚三十度之分。自戊截弧於己。乃自己至甲作一直線。卽成己甲戊三十度之角矣。

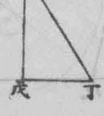
第九

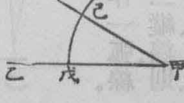
各種多界形。倣已有之形。或大或小。另作一同式形法。如有甲乙丙一三角形。欲倣此式另作一形。則考甲乙界度有幾分。如甲乙界度爲三分。今取其二分。作一丁戊線。又以甲丙界度亦作三分。而取其二分。以丁爲圜心作弧一段。又以乙丙界度亦作三分而取其二分。以戊爲圜心作弧一段。兩弧相交於己。乃自己至丁戊作二線。卽成丁戊己一小三角形。與原有甲乙丙大三角形爲同式也。蓋丁戊己三角形之三界。雖與甲乙丙三角形之三界不等。而其相當各角之度俱等。因其相當各角之度俱等。故其相當各界之比例皆同。相當各界之比例旣同。則其二形之式不得不同也。若有一甲乙丙丁戊己六界形。欲做











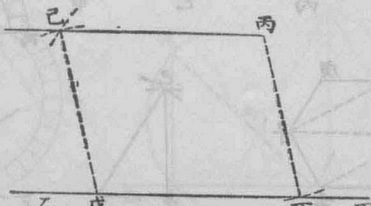
此式另作一形。則在此六界形作分角線。分爲四三角形。照前法倣作四三角形。卽成一庚辛壬癸子丑小六界形。其式與原有之甲乙丙丁戊己大六界形同也。

第十

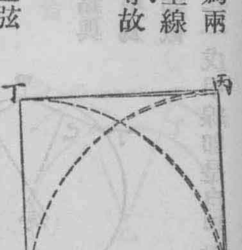
有一直線。或上或下一點。作與此線平行一線法。如甲乙線上有一丙點。欲自丙點作與甲乙線平行一線。則以丙爲圜心任意取甲乙線之近甲邊一處作弧一段。如丁。又取甲乙線之近乙邊一處爲心。如戊。乃照丙丁原度。於丙點相對處作弧一段。如己。復照丁戊度。以丙爲心。於丙點相對處作弧一段。則二弧相交於己。乃自丙至己交處作一丙己直線。卽爲甲乙線之平行線也。何則試自丁戊二處至丙己二處作二線。卽成丙丁戊己一四界形。此四界形之丙丁己戊相對之兩縱線。丙己、丁戊、相對之兩橫線。因依各度所取。必兩兩相等。既兩兩相等。則必爲平行線之四邊形。然則丙己、甲乙、爲平行線四邊形之二線。豈有不平行之理哉。

第十一

有一直線上作一正方形法。如甲乙一直線。欲作一正方形。則以甲爲心取甲乙度。自乙至丙作一弧線。又以乙爲心。依甲乙度。自甲至丁作一弧線。又於甲乙線之兩端。照本卷第六節立甲丙、乙丁二縱線。則乙丙弧截於丙。甲丁弧截於丁。乃自丙至丁作一直線。卽成甲乙丁丙一正方形也。何則丙甲、甲乙、乙丁、

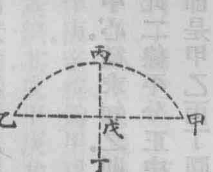


三線俱同爲一圜之輻線。其度必等。而丁丙、丙甲二線。又俱切一圜界。爲兩尖相合。其度亦必等。見四卷第七節・則四界俱等矣。且甲乙二角。又爲垂線所立之角。必成直角。則丙丁二角亦必爲直角。而四角又等矣。四角皆等。故甲乙丁丙形。爲甲乙線上所立之正方形也。



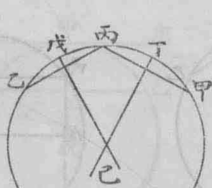
第十二

平分一弧爲兩段法。如有甲乙弧、欲平分爲兩段。則自甲至乙作一甲乙弦線。將此弦線照本卷第三節平分直線爲兩分法。作一戊丁縱線。復自戊引至弧界。截甲乙弧於丙。卽平分甲乙弧爲甲丙、丙乙兩段矣。蓋丙丁縱線。既平分甲乙弦線。則亦必平分甲乙弧之全圜。既平分甲乙弧之全圜。則必平分甲乙弧爲兩段可知矣。見四卷第六節・



第十三

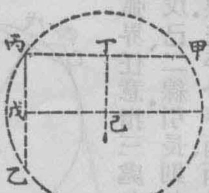
有一段弧。欲繼此弧作一全圜法。如有甲乙一段弧。欲作一全圜。則在此弧界任意指三處。如甲、丙、乙。自甲、乙二處至丙。作甲丙、丙乙二線。照前節作平分甲丙、丙乙兩弦之丁己、戊己二線。引長則相交於己。乃以己爲心。繼甲乙弧界作一全圜。卽成甲乙弧之全圜也。蓋丁己、戊己二線。既平分甲丙、丙乙二弦。則必平分甲丙、丙乙二弧。見四卷第六節・既平分甲丙、丙乙二弧。則其相交之處。必爲圜心。故己爲繼



甲丙乙弧界所作全圜之圜心也。

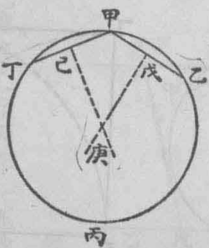
第十四

不拘何處有三點。求緣此三點作一圜法。如甲、乙、丙三點。不在一直線上。欲緣此三點作一圜。則依前節作甲丙、丙乙二線。又平分此二線。正中作丁己、戊己二垂線。引長至己處相交。遂以己為心。以甲乙丙為界作一圜。則甲、乙、丙三點。俱在一圜之界矣。此節之理。與前節同。



第十五

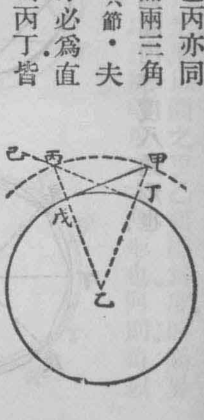
有圜不知中心。求知中心之法。如有一甲乙丙丁圜。不知其中心。欲求知之。則於此圜界隨便取甲、乙、丁三處。從甲至乙至丁作二弦線。將此二線平分正中為戊己二處。自戊己作戊庚、己庚兩垂線。則相交於庚。此庚即是甲乙丙丁圜之中心也。此節之理。亦與前同。



第十六

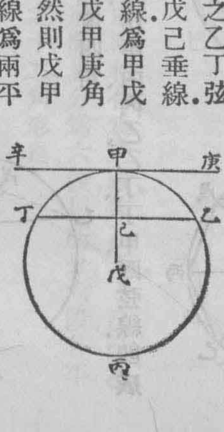
有圜外一點。將此點至圜界作切線法。如乙圜之外有一甲點。欲將此甲點與圜界相切。作一切線。則以此甲點至圜心作一甲乙直線。又以乙為心。以甲為界作一甲丙圜界。又自甲乙線所截圜之丁處。作一丁己垂線。則此垂線即截甲丙圜界於丙。乃自丙至乙心作一丙乙直線。復自丙乙所截圜界戊處。作一戊甲線。即是自甲點至圜

界所作之切線也何則此乙丁、乙戊、既同為一圓之輻線其乙甲、乙丙、亦同為一圓之輻線則甲乙戊與丙乙丁兩三角形之各兩邊線必等而兩三角形又同一乙角然則兩三角形之每相當各角必俱等矣見二卷第六節・夫丁丙線原為甲乙輻線之垂線則丁角必為直角而相當之戊角亦必為直角矣戊角既為直角則甲戊線亦必為乙丙輻線之垂線故甲戊與丙丁皆為圓界之切線也見四卷第九節・



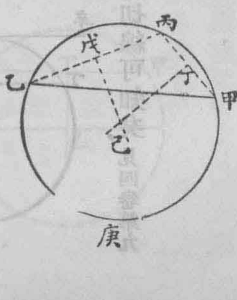
第十七

有圓內弦線欲與此弦線平行作圓外切線法如有一甲乙丙丁圓之乙丁弦線欲與此乙丁弦線平行作切圓之切線則從圓心戊至乙丁弦作戊己垂線平分乙丁弦線於己引長截圜界於甲為甲戊線又切甲處作庚辛線為甲戊之垂線即是所求之切線也何則此庚辛線既為甲戊線之垂線其戊甲庚角必為直角又己戊線既為乙丁線之垂線其戊己乙角亦必為直角然則戊甲庚角與戊己乙角既俱為直角其度必等因其度等故乙丁、庚辛兩線為兩平行線也又戊甲線為圓之輻線而庚辛既為甲戊之垂線則必為甲乙丙丁圓之切線可知矣見四卷第九節・



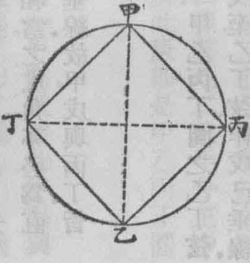
第十八

作函三角形之圜法。如甲乙丙三角形。欲作函此三角形之一圜。則平分甲丙邊於丁。平分丙乙邊於戊。自丁戊作二垂線。引長至己相交。卽以己爲心。任以甲丙乙三角形之一角爲界。作一甲丙乙庚圜。卽是函甲丙乙三角形之圜也。此節之理。與本卷第十三節同。



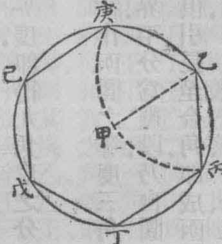
第十九

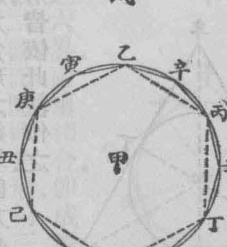
圜內作等度四角形及等度八角形法。如甲丙乙丁圜內。欲作一等度四角形。則以甲乙、丙丁二徑線交於圜心。皆作直角。復自甲、丙、乙、丁四處作甲丙、丙乙、乙丁、丁甲四弦線。卽成甲丙乙丁等度之四角形也。何則。甲乙丙丁二徑線在圜心作直角相交。則平分圜界爲四分矣。既平分圜界爲四分。則甲丙、丙乙、乙丁、丁甲四弦線度必等。而甲、丙、乙、丁四角既俱立在一圜之半界。亦必俱爲直角。見四卷第十四節。既俱爲直角。必爲正方形可知矣。苟欲作等度八角形。則照前平分圜界爲四分。將所分之每分。又各平分爲二分。卽平分圜界爲八分。乃作八弦線。卽成甲戊丙己乙庚丁辛一形。爲圜內等度八角形也。



第二十

圜內作等度六角形三角形十二角形法。如甲圜內欲作等度六角形。則以圜之甲乙輻線爲度。將圜界分爲乙丙、丙丁、丁戊、戊己、己庚、庚乙、六段。作六弦線。卽成一乙丙丁戊己庚等度之六角形也。何則苟以乙爲心以甲爲界作一丙甲庚弧線則乙丙、乙甲二線。俱爲丙甲庚圜之輻線而度必等。夫乙丙丁戊己庚六界形之諸界。因俱照甲乙輻線度所作。故此形之六界俱相等也。若欲作三角形。則照前法、將圜界分爲六段。以所分六段。兩兩相合爲三段。作乙丁、丁己、己乙、三弦線。卽成一乙丁己等度三角形也。若欲作十二角形。亦照前法、將圜界分爲六段。以所分六段各平分爲二分作十二弦線。卽成一乙辛丙壬丁癸戊子己丑庚寅等度之十二角形也。

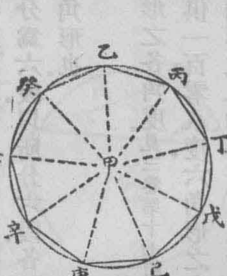




第二十一

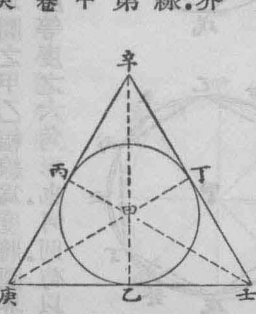
圜內作各種等度多界形總法。苟甲圜內。欲作等度多界各種形。則察各種形之各角度。見三卷第十七節。如等度三角形之三角、俱六十度。四角形之四角、俱九十度。五角形之五角、俱一百零八度。六角形之六角、俱一百二十度。七角形之七角、俱一百二十八度三十四分一十七秒。八角形之八角、俱一百三十五

度。九角形之九角俱一百四十度。十角形之十角、俱一百四十四度。十一角形之十一角俱一百四十七度一十六分二十二秒。十二角形之十二角、俱一百五十度。今甲圜內若欲作一等度九角形。則以九角形之每角一百四十度。與一百八十度相減。餘四十度。復以別有度之圜。取四十度之分以分甲圜界。卽平分爲乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸之九分。再照平分度作乙丙、丙丁、丁戊、戊己、己庚、庚辛、辛壬、壬癸、癸乙九弦線。卽成甲圜內等度之九角形也。何也。從圜心甲作線至各角、分九角形爲九三角形。其每三角形之三角、共一百八十度內減去二界角一百四十度。餘心角四十度。卽每界所對之角。此九角形之每界卽九心角之弦線。故以心角度分圜界度。卽得九角形之分也。凡圜內欲作等邊多界形。皆依此法作之。

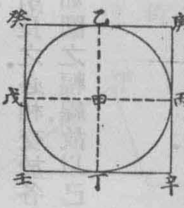


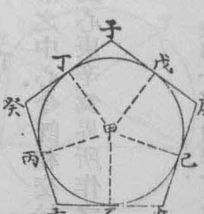
第二十二

作函圜等度多界形法。如欲作函圜之等度三角形、四角形、五角形、或多界形。則將圜界照欲作之幾界平分爲幾段。乃自圜心至所分各界作幾輻線。於輻線之末各作切界線。俱引長至合角。卽成函圜之等度多界形也。如第一圖自甲心至庚、辛、壬三角作甲庚、甲辛、甲壬三線。卽成六三角形。其庚甲乙、庚甲丙兩三角形之庚乙、庚丙二線。爲合尖切圜之線。其度必等。見四卷第七節。而庚甲乙、辛甲丁兩形之庚甲乙、辛甲丁二角爲對角。其度又等。庚



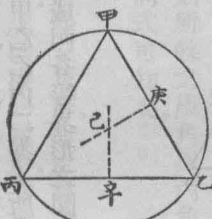
乙甲辛丁甲之二角爲輻線切線所成之角其度又皆爲直角相等見四卷第五節則其餘一角亦必等而其乙甲、甲丁二界又同爲一圜之輻線其度必等則其他界亦必俱等可知再辛丙、辛丁、二線壬丁、壬乙、二線俱爲合尖切圜之線其度相等而辛甲丙與壬甲乙兩三角形壬甲丁與庚甲丙兩三角形必俱與前每相當之角等則此六三角形俱相等矣六三角形俱相等則其庚乙、乙壬、壬丁、丁辛、辛丙、丙庚、相等之六界兩兩相合卽成庚壬、庚辛、辛壬之三界其度安得不等乎故庚辛壬三角形爲函圜等界形也其第二圖函圜四角形第三圖函圜五角形或更欲作多界形其理皆同

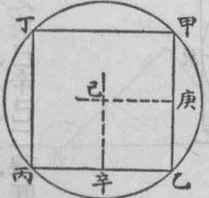


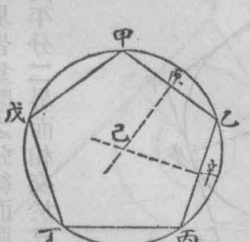


第二十三

作函等度多界形之圜法如甲乙丙三角形或甲乙丙丁四角形或甲乙丙丁戊五角形欲作函此三形之圜則任用此三形之甲乙、乙丙二界平分於庚、辛二處乃自庚、辛二處各作垂線至各形中心相



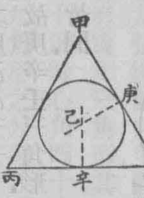


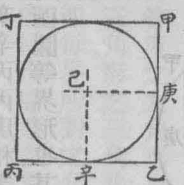


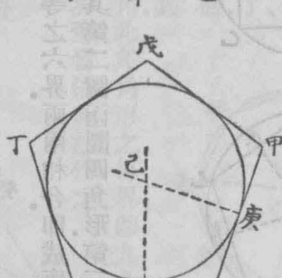
交爲己。卽以己爲心。以各形之角爲界作圓。卽成函此三形之圓也。何也。各形之界皆爲圓之弦線。而弦線上所作之垂線。必皆交於圓心。今甲乙、乙丙、二界上所作之庚己辛己二線。既平分二界而相交於己。則己必爲圓心。故以己爲心作圓。卽成函各等界形之圓也。

第二十四

作函於等度多界形之圓法。如甲乙丙三角形。或甲乙丙丁四角形。或甲乙丙丁戊五角形。欲在此三形內各作一圓。則照前節平分甲乙、乙丙、二界。作己庚、己辛、二垂線。引長相交於己。卽以己爲心。以庚辛爲界作圓。卽成多界形內所函之圓也。何也。己庚、己辛、二線。是平分甲乙、乙丙、二線之垂線。引長之。必相交於各形之中心。今既相交於己。則己必爲各形之心。凡形心作垂線至各界。其度必等。卽如圓之輻線。故以己爲心。庚辛爲界所作之圓。卽爲各等界形所函之圓也。







第二十五

有一三角形。一圓形。於此圓內作切圓界三角形。與原有之三角形同式法。如有甲乙丙一三角形。丁戊