南大助学 智慧起航
zx.njupco.com

主编
朱建廉

高中数理化生公式定理大全

南京大学出版社

高中数理化生公式定理大全

主编
朱建廉

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数理化生公式定理大全 / 朱建廉主编. —南京：南京大学出版社，(2011.12 重印)

ISBN 978-7-305-08884-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①理科(教育)—课程—公式—高中—教学参考资料②理科(教育)—课程—定律—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 193012 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

书　　名 高中数理化生公式定理大全
主　　编 朱建廉
责任编辑 王渭雅　倪　琦　　编辑热线 025-83592409
照　　排 南京紫藤制版印务中心
印　　刷 南京新洲印刷有限公司
开　　本 880×1230　1/32　印张 16.75　字数 777 千
版　　次 2011 年 10 月第 1 版　2011 年 12 月第 2 次印刷
ISBN 978-7-305-08884-1
定　　价 27.00 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

前　言

在理科教学中,概念、原理和公式等既是重要的学习内容,也是分析问题和解决问题的工具.

教学实践表明,一些同学理科学习能力不强、学习效果不佳,其重要原因在于对基本的概念、原理和公式的意义理解不透,对复杂的概念、原理和公式的关系缺少辨析.显然,只有精准的、系统的概念、原理和公式才能成为分析问题和解决问题的利器.

本书各学科的编写内容以新课程标准为指导,以学科核心概念、原理和公式的构建为目标,整合不同版本教材和各种教学资源,合理划分学科知识板块体系.每一单元内容下设"考点梳理"、"知识体系"、"知识提要与例题解析"等栏目."考点梳理"是对该单元考试内容和形式的扼要说明,旨在帮助读者把握重点和方向;"知识体系"则以条目、表格、框图等形式建立各知识点间的内在逻辑关系,力图清晰、简明;"知识提要与例题解析"是本书的重点和主体,精选基础性和典型性的学习内容,对所涉概念、原理和公式的内涵与外延进行分析和归纳,力求详略得当、重点突出、简单实用."知识提要与例题解析"中,还根据学科内容特点和需要,以"注意"、"例题"等形式,对难点、疑点、热点和重点内容进行了进一步的诠释和具体分析,以加深读者的理解和体验.

参加本书编写的有:张松年(数学)、黄皓燕(物理)、陈益(化学)和王苏豫(生物).另外,陈益老师还协助主编针对全书的统稿做了大量工作.同时感谢金陵中学和兄弟学校相关教研组的同行,因为他们的配合与支持,使得本书顺利付梓.

本书编者都是具有丰富教学经验和深厚学科素养的资深教师,相信他(她)们的辛勤劳动能为读者提升学习能力和提高学习成绩提供助力.

恳请读者在使用本书过程中对书中的错误和缺憾不吝指教,以便不断调整和完善.

目　录

第一部分　数　学

第一篇　代数 …………………………… 3
第一章　集合 …………………………… 3
第二章　函数 …………………………… 6
第三章　不等式 ………………………… 10
第四章　数列 …………………………… 16
第五章　计数原理 ……………………… 19
第六章　概率与统计 …………………… 23
第七章　复数 …………………………… 29
第二篇　三角函数 …………………… 33
第一章　任意角的三角函数 …………… 33
第二章　三角恒等变形 ………………… 47
第三章　解三角形 ……………………… 51
第三篇　平面向量与解析几何 ……… 57
第一章　平面向量 ……………………… 57
第二章　直线的方程 …………………… 60
第三章　圆的方程 ……………………… 65
第四章　圆锥曲线 ……………………… 69
第四篇　立体几何与空间向量 ……… 79
第一章　直线与平面 …………………… 79
第二章　空间几何体 …………………… 91
第三章　空间向量 ……………………… 97
第五篇　导数与定积分 ……………… 104
第一章　函数的导数 …………………… 104
第二章　定积分 ………………………… 110
第六篇　逻辑、推理与证明 ………… 112
第一章　命题与逻辑用语 ……………… 112
第二章　推理与证明 …………………… 115
第七篇　几何证明选讲 ……………… 121
第八篇　矩阵与变换 ………………… 125
第九篇　极坐标与参数方程 ………… 130
第一章　曲线的极坐标方程 …………… 130
第二章　参数方程 ……………………… 134

第二部分　物　理

第一篇　力学 ………………………… 139
第一章　力与平衡 ……………………… 139
第二章　直线运动 ……………………… 146
第三章　牛顿运动定律 ………………… 151
第四章　曲线运动与万有引力 ………… 157
第五章　机械能与动量 ………………… 166
第六章　机械振动与机械波 …………… 175
第二篇　电磁学 ……………………… 184
第一章　电场 …………………………… 184
第二章　恒定电流 ……………………… 193
第三章　磁场 …………………………… 205
第四章　电磁感应 ……………………… 214
第五章　交变电流 ……………………… 222
第六章　电磁场与电磁波 ……………… 229
第三篇　热学 ………………………… 233
第一章　分子动理论与热力学定律 …… 233
第二章　气体性质 ……………………… 238
第四篇　光学 ………………………… 243
第一章　几何光学 ……………………… 243
第二章　光的本性 ……………………… 248
第五篇　原子物理与近代物理 ……… 253
第一章　原子物理与核物理 …………… 253
第二章　相对论初步 …………………… 258

第三部分　化　学

第一篇　化学基本概念 ………………… 263
第一章　物质的组成和分类 ……… 263
第二章　物质的量 ………………… 266
第三章　氧化还原反应 …………… 272
第四章　离子反应 ………………… 274
第二篇　无机化合物及其应用 ……… 277
第一章　金属单质和化合物及其应用 ………………………… 277
第二章　非金属单质和化合物及其应用 ………………………… 286
第三篇　化学反应原理 ……………… 297
第一章　化学反应与能量 ………… 297
第二章　电化学基础 ……………… 299
第三章　化学反应速率与化学平衡 ………………………… 305
第四章　溶液中的离子平衡 ……… 310
第四篇　有机化学基础 ……………… 322
第一章　烃 ………………………… 322
第二章　烃的衍生物 ……………… 328
第三章　糖类、油脂、蛋白质 ……… 335
第四章　有机物的组成和结构 …… 338
第五章　有机合成 ………………… 340
第六章　合成有机高分子化合物 … 343
第五篇　物质结构与性质 …………… 347
第一章　物质结构　元素周期律 … 347
第二章　原子结构与性质 ………… 356
第三章　分子结构与性质 ………… 362
第四章　晶体结构与性质 ………… 368
第六篇　化学实验 ………………… 375
第一章　化学实验基础知识和技能 ………………………… 375
第二章　物质的检验、分离和提纯 ………………………… 382
第三章　化学实验方案的设计与评价 ………………………… 387

第四部分　生　物

第一篇　分子与细胞 ……………… 395
第一章　细胞的分子组成 ………… 395
第二章　细胞的结构 ……………… 404
第三章　细胞的代谢 ……………… 414
第四章　细胞的增殖 ……………… 426
第五章　细胞的分化、衰老和凋亡 ………………………… 431
第二篇　遗传与进化 ……………… 436
第一章　遗传的细胞基础 ………… 436
第二章　遗传的分子基础 ………… 441
第三章　遗传的基本规律 ………… 452
第四章　生物的变异 ……………… 460
第五章　人类遗传病 ……………… 468
第六章　生物的进化 ……………… 473
第三篇　稳态与环境 ……………… 480
第一章　植物的激素调节 ………… 480
第二章　动物生命活动的调节 …… 486
第三章　人体的内环境与稳态 …… 494
第四章　种群和群落 ……………… 504
第五章　生态系统 ………………… 513
第六章　生态环境的保护 ………… 521

第一部分

数　学

第一篇　代数

第一章　集合

考点梳理

1. 集合的含义与表示.

2. 集合间的基本关系.

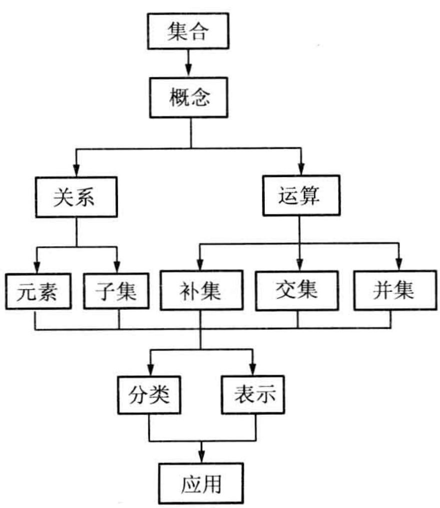
3. 集合的基本运算.

① 理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.

② 理解给定集合的一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.

③ 会用 Venn 图表示集合的关系及运算.

知识体系



知识提要与例题精解

1. 集合的概念、元素

一定范围内某些确定对象的全体构成一个集合. 集合中的每一个对象叫做这个集合的元素. 集合的元素与集合之间的关系是"属于"关系,用符号"$\in$"表示. 如果一个对象表示某集合的元素,那么就用符号"$\notin$"表示. 如 $1\in\{1,2\}$, $3\notin\{1,2\}$.

例　用列举法写出英文单词"blackboard"中的字母组成的集合.

解析　英文单词"blackboard"中的字母组成的集合用列举法表示为$\{a,b,c,d,k,l,o,r\}$.

注意　尽管单词"blackboard"中字母 a,b 都出现了两次,但集合中 a,b 都出现只能算一个元素.

2. 集合的性质

(1) **确定性**:根据某一明确的标准来判断某个对象是某集合的元素或不是此集合的元素,两种情况有且仅有一种成立.

(2) **互异性**:对于给定的集合,集合中的元素是互异的,即集合中的任意两个元素都是不同的对象. 因此,集合中的元素无重复的现象.

(3) **无序性**:集合与其元素的排列顺序无关.

例　下面各组对象分别构成集合吗?

① 科学家;② 大于 0 的偶数;③ 完美的图形.

解析　①③中的对象不构成集合. 这是因为对象"科学家"、"完美的图形"是模糊而

不确定的. ②中的对象构成集合. 这是因为对象“大于 0 的偶数”是确定的. 就一个数而言，要么它是大于 0 的偶数，要么它不是大于 0 的偶数，不可能有第三种情况出现.

注意　一般地，由形容词、副词作为限定词的对象以及代词、带有形容词性质的名词表示的对象都没有确定性. 因此，这样的一组对象都不能表示集合.

3. 集合的表示方法

(1) 具体的表示方法

① **列举法**：一般地，将集合中的元素一一列举出来，置于“{}”内，元素之间用逗号“,”隔开. 如$\{1,2,3,4,5\}$等.

② **描述法**：用$\{x \mid P\}$的形式表示满足条件 P 的元素构成的集合，大括号内竖线左边的 x 叫做此集合的代表元素，竖线右边的 P 是元素 x 所具有的公共属性.

注意　竖线左边既不是集合的一个元素，也不代表集合的全体元素，只是代表该集合中元素的一般形式.

(2) 抽象的表示方法

① 用大写的拉丁字母表示集合，如集合 A，集合 B，集合 C，…

② Venn 图：画一条封闭的曲线，用它的内部表示集合.

例 1　用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid x$ 是 15 的约数$, x\in\mathbf{N}\}$；

(2) $\{(x,y) \mid x+y=3, x-2y=0\}$；

(3) $\{x \mid x=(-1)^n, n\in\mathbf{N}\}$；

(4) $\{(x,y) \mid x+y=4, x\in\mathbf{N}^*, y\in\mathbf{N}^*\}$.

解析　(1) $\{1,3,5,15\}$；

(2) $\{(2,1)\}$；

(3) $\{-1,1\}$；

(4) $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.

注意　集合(2)中的元素是有序数组，不能写成$\{2,1\}$或$\{(1,2)\}$.

例 2　分别用描述法表示下列集合：

(1) 偶数集；

(2) 正奇数集；

(3) $\{1,4,7,10,13\}$；

(4) $\{-2,-4,-6,-8,-10\}$.

解析　(1) $\{x \mid x=2n, n\in\mathbf{Z}\}$；

(2) $\{x \mid x=2n-1, n\in\mathbf{N}^*\}$或$\{x \mid x=2n+1, n\in\mathbf{N}\}$；

(3) $\{x \mid x=3n+1, n\in\mathbf{N}, n\leqslant 4\}$；

(4) $\{x \mid x=-2n, n\in\mathbf{N}^*, n\leqslant 5\}$.

4. 几个特殊集合的记号

自然数集——$\mathbf{N}$；正整数集——$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；整数集——$\mathbf{Z}$；有理数集——$\mathbf{Q}$；实数集——$\mathbf{R}$；空集——$\varnothing$.

注意　集合本身就有“所有”性，不能将“正数的集合”说成“所有正数的集合”.

5. 区间的概念

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，规定：

$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$——闭区间；

$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$——开区间；

$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$——左闭右开区间；

$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$——左开右闭区间；

$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$——“$+\infty$”读作“正无穷大”；

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$——“$-\infty$”读作“负无穷大”；

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

其中 a,b 是相应区间的端点. 方括号表示该区间端点取到，圆括号则表示该区间端点取不到. 而“∞”只是一个记号，不代表具体的数. 因此，在$\pm\infty$处使用圆括号.

6. 集合的分类

集合分为有限集和无限集两种. 如果一个集合中的元素个数是有限的，称其为有限

集;如果一个集合不是有限集,称其为无限集.

7. 集合的关系

集合的关系有子集关系和非子集关系两种,其中子集关系又分为真子集关系和相等关系两种.

(1) 子集的概念及表示

对于两个集合 A 和 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 为集合 B 的子集,记为:$A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$). 如图 1-1-1 所示.

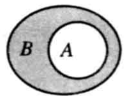


图 1-1-1

若对任意 $x\in A$,都有 $x\in B$,则 $A\subseteq B$.

如果 $A\subseteq B$,并且 $A\neq B$,这时集合 A 称为集合 B 的真子集,记为 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

规定:空集是任何集合的子集,空集是任何非空集合的真子集,即对任何集合 A,都有 $\varnothing\subseteq A$;对任何非空集合 B,都有 $\varnothing\subsetneqq B$.

(2) 相等集合

如果一个集合的元素与另一个集合的元素完全相同,那么称这两个集合相等.

对于两个集合 A 和 B,如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,那么 $A=B$.

例　已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,且 $B\subseteq A$,求 m 的所有取值组成的集合.

解析　当 $m+1>2m-1$,即 $m<2$ 时,$B=\varnothing$,此时必有 $B\subseteq A$ 成立.

因此 $m<2$ 满足条件.

当 $B\neq\varnothing$,且 $B\subseteq A$ 时,由图 1-1-2

知 $\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1, \\ m+1\geqslant -2, \\ 2m-1\leqslant 5. \end{cases}$

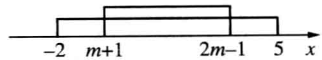


图 1-1-2

解得 $\begin{cases} m\geqslant 2, \\ m\geqslant -3, \\ m\leqslant 3. \end{cases}$ $2\leqslant m\leqslant 3$,

综上所述,$m<2$ 或 $2\leqslant m\leqslant 3$,即 $m\leqslant 3$. 故所求的集合为 $\{m\mid m\leqslant 3\}$ 或 $(-\infty,3]$.

注意　(1) 借助于图形来分析、解决集合问题是一种常用、有效的方法,处理与连续数集有关的问题时,一般将研究的集合在数轴上表示出来;

(2) 空集是任何集合的子集,在处理子集的有关问题时,务必注意这一特殊情况. 本例题就是要分别考虑集合 B 为空集或不为空集的两种情况来进行讨论.

8. 集合的运算及性质

(1) 常见的集合的运算有补集、交集和并集三种

① 补集:设 $A\subseteq S$,由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 S 的子集 A 的补集,记为 $\complement_S A$,即 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$,且 $x\notin A\}$,如图 1-1-3 所示.

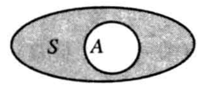


图 1-1-3

通常把含有所要研究的各个集合的全部元素的集合看做一个全集,全集通常用字母 U 表示. 如在实数范围内讨论问题时,可以把实数集 $\mathbf{R}$ 看做全集 U.

② 交集:由所有属于集合 A,且属于集合 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$,且 $x\in B\}$. 如图 1-1-4 所示.

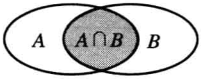


图 1-1-4

③ 并集:由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$,或 $x\in B\}$. 如图 1-1-5 所示.

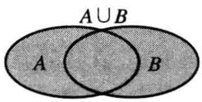


图 1-1-5

(2) 集合的运算的性质

① 对任意集合 A,B,若 $B=\complement_U A$,则 $A=\complement_U B$,即 $\complement_U(\complement_U A)=A$;

② 对于全集 U,有 $\complement_U U=\varnothing$,$\complement_U\varnothing=U$;

③ 对任意集合 A,B,都有 $A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$,$A\subseteq A\cup B$,$B\subseteq A\cup B$,$A\cap B\subseteq A\cup B$;

④ 若集合 A,B 都是集合 U 的子集,则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$,$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$;

⑤ 设集合 A,B 都是集合 U 的子集,有若 $A\subseteq B$,则 $\complement_U B\subseteq\complement_U A$.

例 设集合 $M=\{a^2,a+1,-3\}$,$N=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$. 若 $M\cap N=\{-3\}$,求实数 a 的值.

解析 因为 $M\cap N=\{-3\}$,所以 $-3\in N$.

由 $a-3=-3$,得 $a=0$,此时 $M=\{0,1,-3\}$,$N=\{-3,-1,1\}$,有 $M\cap N=\{1,-3\}$,与 $M\cap N=\{-3\}$矛盾. 因此 $a=0$ 不满足条件;

由 $2a-1=-3$,得 $a=-1$,此时 $M=\{1,0,-3\}$,$N=\{-4,-3,2\}$,有 $M\cap N=\{-3\}$. 因此 $a=-1$ 满足条件;

由 $a^2+1=-3$,得 $a^2=-4$,无实数解.

综上,$a=-1$.

第二章　函　　数

考点梳理

1. 函数的概念、基本性质.

① 了解构成函数的要素,会求一些简单函数的定义域和值域,了解映射的概念.

② 会根据不同的需要选择恰当的方法(如,图像法、列表法、解析法)表示函数.

③ 了解简单的分段函数,并能简单应用.

④ 通过二次函数,理解函数的单调性、最大(小)值及其几何意义;结合具体函数,了解奇偶性的含义.

⑤ 学会运用函数图像理解和研究函数的性质.

2. 指数与对数,指数函数、对数函数的图像与性质,幂函数.

① 理解有理指数幂、对数的含义,了解实数指数幂的意义,掌握幂的运算.

② 理解指数函数、对数函数、幂函数的概念和意义,能借助具体指数函数、对数函数、幂函数的图像,探索并理解这几类函数的单调性与特殊点.

3. 函数与方程.

① 结合二次函数的图像,判断一元二次方程根的存在性及根的个数,从而了解函数的零点与方程根的联系.

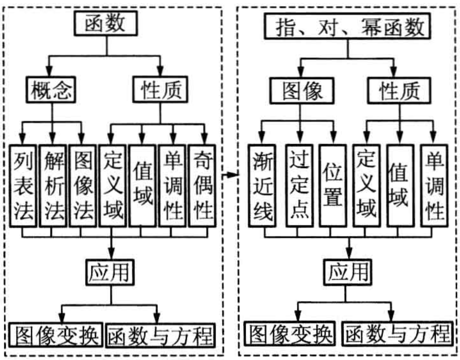
② 根据具体函数的图像,能够借助计算器用二分法求相应方程的近似解,了解这种方法是求方程近似解的常用方法.

4. 函数模型及其应用.

① 会比较指数函数、对数函数以及幂函数增长差异;结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义.

② 通过一些社会生活中普遍使用的函数模型(指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等)的实例,了解函数模型的广泛应用.

知识体系



知识提要与例题精解

1. 函数的定义、定义域、值域

设 A,B 是两个非空数集,如果按某种对应法则 f,对于集合 A 中的每一个元素 x,在集合 B 中都有唯一的元素 y 和它对应,这样的对应叫做从 A 到 B 的一个函数,通常记为 $y=f(x),x\in A$. 其中集合 A 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域,定义域中的每一个数 x 叫做自变量,每一个自变量 x 对应的 y 值叫做函数值,所有的函数值 y 组成的集合 C 叫做函数 $y=f(x),x\in A$ 的值域,$C=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$,且 $C\subseteq B$.

例　分别指出下列常见函数的定义域和值域.

(1) $f(x)=ax+b(a\neq0)$;

(2) $f(x)=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$;

(3) $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$;

(4) $f(x)=\sqrt{x}$.

解析　(1) 一次函数 $f(x)=ax+b\ (a\neq0)$ 的定义域、值域都是 $\mathbf{R}$;

(2) 反比例函数 $f(x)=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$ 的定义域、值域都是集合 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

(3) 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$;

若 $a>0$,则 $f(x)$ 的值域是 $\left[c-\dfrac{b^2}{4a},+\infty\right)$,若 $a<0$,则 $f(x)$ 的值域是 $\left(-\infty,c-\dfrac{b^2}{4a}\right]$;

(4) 无理函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域、值域都是 $[0,+\infty)$.

注意　在没有特别强调的前提下,函数的定义域就是使得对应法则(一般由关系式表示)有意义的实数的集合.

2. 函数的表示方法

常用的函数的表示方法有:列表法、解析法、图像法三种.

(1) 列表法——用列出表格来表示两个变量之间的关系的方法.

(2) 解析法——用一个等式来表示两个变量的函数关系的方法.

(3) 图像法——用图像表示两个变量间的函数关系的方法.

例 1　画函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ 的图像.

解析　函数 $f(x)$ 的图像由一条射线(不

包含端点)、一个点、一段抛物线组成,如图 1-2-1 所示.

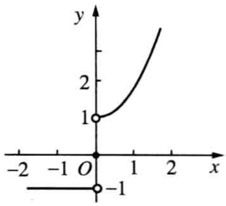


图 1-2-1

注意　分段函数是一个函数,不是几个函数,只是在定义域的不同子集上,自变量的值域函数值的对应方式不一样而已.分段函数的值域是其在定义域的各个子集上的函数值的集合的并集.

例 2　分别在下列条件下,求出相应的函数 $f(x)$ 的解析式:

(1) $f(x+1)=x^2+x$;

(2) $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$.

解析　(1) 令 $t=x+1$,则 $x=t-1$.

由题意,得 $f(t)=(t-1)^2+(t-1)=t^2-t$,所以 $f(x)=x^2-x(x\in\mathbf{R})$.

(2) 设 $t=\sqrt{x}+1$,则 $x=(t-1)^2(t\geqslant 1)$.

由题意,得 $f(t)=t^2-1$,所以 $f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$.

注意　已知 $f[g(x)]$ 的解析式,求 $f(x)$ 的解析式,通常用换元法,即令 $g(x)=t$,用 t 表示 x,代入已知表达式得 $f(t)$,最后把 t 换成 x,从而得 $f(x)$ 的解析式.要特别提醒的是:函数的解析式包括对应法则和定义域两个部分,往往对应法则不能准确表示函数关系.因此,在求函数的解析式时,一般需要注明自变量 x 的取值范围,以免求出的解析式不完整.

3. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A,区间 $I\subseteq A$.

如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么就说函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调(递)增函数,区间 I 称为函数 $y=f(x)$ 的单调(递)增区间.

如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,那么就说函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调(递)减函数,区间 I 称为函数 $y=f(x)$ 的单调(递)减区间.

函数的单调增区间、单调减区间统称为函数的单调区间.函数在其定义域上单调(递)增或单调(递)减的性质统称为函数的单调性.

例　判断函数 $y=\dfrac{x}{x-1}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内的单调性.

解析　任取 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$,且 $x_1<x_2$,则 $y_1-y_2=\dfrac{x_1}{x_1-1}-\dfrac{x_2}{x_2-1}=\dfrac{x_2-x_1}{(x_1-1)(x_2-1)}>0$,故 $y_1>y_2$.所以函数 $y=\dfrac{x}{x-1}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调递减.

注意　用定义判断函数在区间上的单调性的基本步骤是:

① 在指定区间内任取两个值 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$;

② 作差 y_1-y_2,通过因式分解等方法,把 y_1-y_2 尽可能地写成若干个能确定符号的因子相乘或相除;

③ 根据每个因子的符号来确定 y_1-y_2 的符号;

④ 根据定义下结论.

4. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 A,对任意的 $x\in A$,如果都有 $f(-x)=f(x)$,那么称函数 $y=f(x)$ 是偶函数;如果都有 $f(-x)=-f(x)$,那么称函数 $y=f(x)$ 是奇函数.如果函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数,我们就说

函数 $f(x)$ 具有奇偶性. 偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称；反之，图像关于 y 轴对称的函数是偶函数，图像关于原点对称的函数是奇函数.

例　判断下列函数是否为偶函数或奇函数：

(1) $f(x)=-x^2-1$；

(2) $f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$；

(3) $f(x)=(x-1)^2$.

解析　(1) 函数 $f(x)=-x^2-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=-(-x)^2-1=-x^2-1=f(x)$，所以，函数 $f(x)=-x^2-1$ 是偶函数.

又 $f(-1)=f(1)=-2$，即 $f(-1)\neq -f(1)$，所以函数 $f(x)$ 不是奇函数.

(2) 因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x+\sqrt{x^2+1}>x+|x|\geqslant 0$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$f(-x)=\log_2(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$$

$$=\log_2(-x+\sqrt{x^2+1})=\log_2\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\log_2\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=-f(x),$$

所以，函数 $f(x)$ 是奇函数.

又 $f(-1)=\log_2(\sqrt{2}-1)$，$f(1)=\log_2(\sqrt{2}+1)$，所以 $f(-1)\neq f(1)$，故函数 $f(x)$ 不是偶函数.

(3) 函数 $f(x)=(x-1)^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $f(1)=(1-1)^2=0$，$f(-1)=(-1-1)^2=4$，所以 $f(1)\neq f(-1)$，且 $f(1)\neq -f(-1)$.

因此，函数 $f(x)=(x-1)^2$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

注意　函数的奇偶性是函数在定义域上的整体性质，即：要说明一个函数是奇(或偶)函数，需要严格按照定义证明，对于定义域中的每一个 x 都有 $f(-x)=-f(x)$［或 $f(-x)=f(x)$］；要说明一个函数不具有奇偶性只需说明函数的定义域关于数“0”不对称或举出一个反例即可.

5. 映射

一般地，设 A，B 是两个非空集合，如果按某种对应法则 f，对于集合 A 中的每一个元素 x，在集合 B 中都有唯一的元素 y 和它对应，这样的单值对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作：$f:A\to B$.

例　设集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2\}$，试问从 A 到 B 可以建立多少个映射？

解析　从 A 到 B 可以建立 4 个不同的映射：

① $f:a\to 1, b\to 1$；② $f:a\to 1, b\to 2$；

③ $f:a\to 2, b\to 1$；④ $f:a\to 2, b\to 2$.

注意　根据映射的概念，从集合 A 到集合 B 的映射，要求集合 A 中的每一个元素在集合 B 中都要有唯一的元素与之对应，但不要求集合 B 中的元素一定有 A 中的元素与之对应.

6. 函数与方程

对于函数 $y=f(x)$，$x\in A$，方程 $f(x)=0$ 的解称为函数 $y=f(x)$ 的零点.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像是不间断的曲线，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点.

例　已知方程 $x^2-4x-k-2=0$（k 为常数）有两个实数根 α，β，且 $0<\alpha<1<\beta<2$，求 k 的取值范围.

解析　记 $f(x)=x^2-4x-k-2$. 因为

函数 $f(x)$ 的图像是开口朝上的抛物线，所以本题等价于

$$\begin{cases} f(0)=-k-2>0, \\ f(1)=-k-5<0, \\ f(2)=-k-6>0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} k<-2, \\ k<5, \\ k<-6, \end{cases}$$

解得　　$k<-6$.

所以，实数 k 的范围是 $(-\infty,-6)$.

注意　利用二次函数的图像的性质，将函数的零点与方程的实数解、图像与 x 轴交点的横坐标结合起来，体现数形结合的思想方法.

7. 二分法

对于在区间 (a,b) 上连续不断且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 的函数 $y=f(x)$，通过不断把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点的近似值的方法叫做二分法.

例　用二分法求方程 $2^x+x-4=0$ 的近似解(精确到 0.1).

分析　由于方程 $2^x+x-4=0$ 即方程 $2^x=4-x$，从而原方程的解即函数 $y=2^x$ 和 $y=4-x$ 的图像的交点的横坐标，可以先画出这两个函数的图像，观察解所在的区间.

解析　在同一坐标系内画出两个函数 $y=2^x$ 和 $y=4-x$ 的图像，如图 1-2-2 所示. 通过观察，发现两个函数的图像有唯一的交点，其横坐标 x 就是方程 $2^x+x-4=0$ 的解，由图 1-2-2 知 $x\in(1,2)$. 下面用二分法求 x 的近似值：

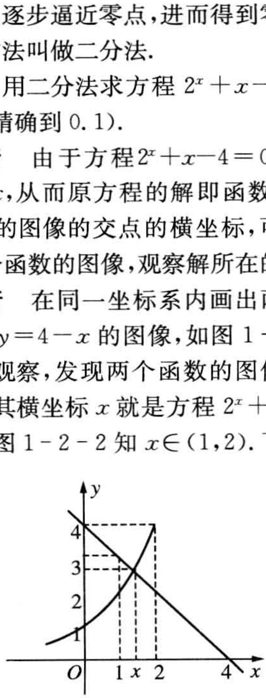


图 1-2-2

$f(1)<0, f(2)>0 \Rightarrow x\in(1,2)$;

$f(1.5)>0, f(1)<0 \Rightarrow x\in(1,1.5)$;

$f(1.25)<0, f(1.5)>0 \Rightarrow x\in(1.25,1.5)$;

$f(1.375)<0, f(1.5)>0 \Rightarrow x\in(1.375,1.5)$;

$f(1.4375)>0, f(1.375)<0 \Rightarrow x\in(1.375,1.4375)$.

由于 $1.375\approx1.4$，$1.4375\approx1.4$，故原方程的近似解为 $x\approx1.4$.

注意　(1) 用二分法求方程的近似解，要做到解所在的区间两端满足精度要求的近似值相等时才能结束；(2) 对于比较复杂的方程，相应的函数图像不容易画，零点不容易判别，常常转化为两个较为简单的函数图像的交点加以解决.

第三章　不等式

考点梳理

1. 基本不等式.

2. 一元二次不等式.

① 了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

② 会解一元二次不等式.

3. 线性规划.

① 了解二元一次不等式的几何意义，能用平面区域表示二元一次不等式组.

② 能从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题，并能加以解决.

4. 基本不等式.

① 了解基本不等式的证明过程.

② 会用基本不等式解决简单的最大(小)问题.

5. 含有绝对值的不等式的求解.

① 理解绝对值不等式的几何意义.

② 会解含有两个绝对值的不等式.

6. 不等式的证明.

① 不等式的基本性质.

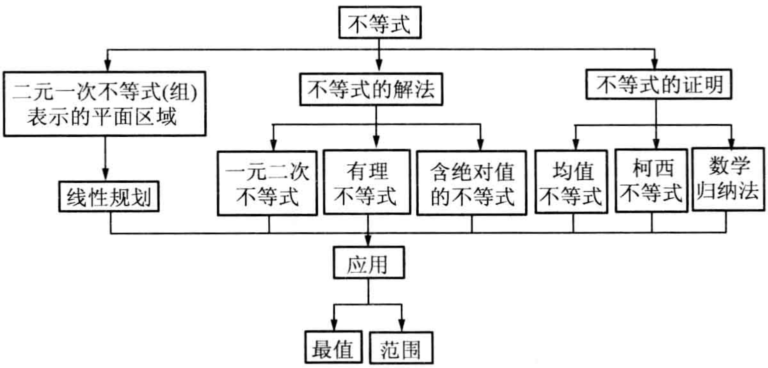
② 了解不等式的证明(比较法、综合法、分析法、反证法、放缩法、数学归纳法).

7. 算术-几何平均不等式与柯西不等式.

① 会用算术-几何平均不等式与柯西不等式证明一些简单的不等式.

② 会用算术-几何平均不等式与柯西不等式求函数的最大(小)值.

知识体系



知识提要与例题精解

1. 基本不等式

对于正数 a,b,称不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$(当且仅当 $a=b$ 时,等号成立)叫做基本不等式.

例　设正数 a,b 满足 $a+b=1$,求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值.

解析　因为正数 a,b 满足 $a+b=1$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\geqslant 4$,当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}>0$,即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号.故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 4.

注意　利用均值不等式求积的最大值(或和的最小值)时,必须满足:

① “正”——各项全为正;

② “定”——各项之和(或积)为常数;

③ “等”——在允许范围内各项能相等,这是最值能否真正达到的关键.如,本例题在说明等号之前,只能说 4 是一个数,而 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 不小于数“4”,说明等号能成立,就是说明“4”也是 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的值,从而是 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值.

2. 一元二次不等式

只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的不等式叫做一元二次不等式.

一般地,当 $a>0$ 时,对于不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$,有: