

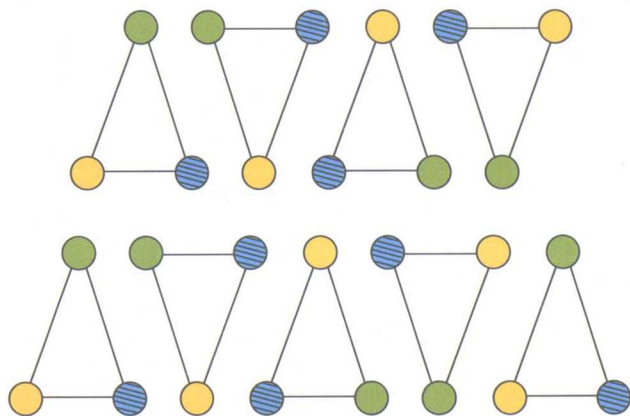
“十二五”国家重点图书出版规划项目
走向数学丛书



波利亚计数定理

POLYA'S ENUMERATION THEOREM

著 萧文强



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

波利亚计数定理

POLYA'S ENUMERATION THEOREM

著 萧文强



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

波利亚计数定理 / 萧文强著. — 大连:大连理工大学出版社, 2011.5
(走向数学丛书)
ISBN 978-7-5611-6148-7

I. ①波… II. ①萧… III. ①波利亚计数定理 IV. ①O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 060166 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:<http://www.dutp.cn>

沈阳新华印刷厂印刷

大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm

印张:5

字数:81 千字

2011 年 5 月第 1 版

2011 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦 王 伟

责任校对:任俊杰 李 慧

封面设计:孙 元 王坤祥

ISBN 978-7-5611-6148-7

定 价:20.00 元

续编说明

自从 1991 年“走向数学”丛书出版以来,已经出版了三辑,颇受我国读者的欢迎,成为我国数学传播与普及著作的一个品牌。我想,取得这样可喜的成绩主要原因是:中国数学家的支持,大家在百忙中抽出宝贵时间来撰写此丛书;天元基金的支持;与湖南教育出版社出色的出版工作。

但由于我国毕竟还不是数学强国,很多重要的数学领域尚属空缺,所以暂停些年不出版亦属正常。另外,有一段时间来考验一下已经出版的书,也是必要的。看来考验后是及格了。

中国数学界屡屡发出继续出版这套丛书的呼声。大连理工大学出版社热心于继续出版;世界科学出版社(新加坡)愿意出某些书的英文版;湖南教育出版社也乐成其事,

尽量帮忙。总之,大家愿意为中国数学的普及工作尽心尽力。在这样的大好形势下,“走向数学”丛书组成了以冯克勤教授为主编的编委会,领导继续出版工作,这实在是一件大好事。

首先要挑选修订重印一批已出版的书;继续组稿新书;由于我国的数学水平距国际先进水平尚有距离,我们的作者应面向全世界,甚至翻译他们的优秀著作。

我相信在新的编委会的领导下,丛书必有一番新气象。我预祝丛书取得更大成功。

王 元

2010年5月于北京

编写说明

从力学、物理学、天文学，直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学。一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三四年有数学课。可见数学之重要与其应用之广泛。

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏。我以为要克服这个鸿沟还是有可能的。近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握。我想，如果知道讨论对象的具体背景，则有可能掌握其实质。显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到。若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了

解. 这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书, 其中每本小册子尽量用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面, 使工程技术人员、非数学专业的大学生, 甚至具有中学数学水平的人, 亦能懂得书中全部或部分含义与内容. 这对提高我国人民的数学修养与水平, 可能会起些作用. 显然, 要将一门数学深入浅出地讲出来, 决非易事. 首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解. 从整体上说, 我国的数学水平还不高, 能否较好地完成这一任务还难说. 但我了解很多数学家的积极性很高, 他们愿意为“走向数学”撰稿. 这很值得高兴与欢迎.

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社的支持, 得以出版这套“走向数学”丛书, 谨致以感谢.

王 元

1990 年于北京

序 言

一本书的序言,通常是读者最先看却是作者最后写的一段!写毕全书,松一口气.我才下笔写这篇序言,所以我可以告诉读者,你将会在这本小书里碰到什么.

书的题目已经说明了书的内容,就是介绍波利亚(Pólya)计数定理和它的应用.波利亚计数定理是枚举某些有限构形个数的一件重要的基本工具,它计算了一个置换群作用在一个集合上产生的等价类的个数.由于很多计数问题都能纳入这个表述架构,波利亚计数定理的应用非常广泛.就数学内容而言,这条定理结合了群、母函数、权的概念,构思优美.本书并没有假定读者具备这三个概念的知识,第二章逐步引入群的概念,并通过众多例子阐述群的基本性质.第三章介绍群在集上的作用,也用了大量例子说明一个重要的公式,这个公式可以说是波利亚计数定理的前奏.第四章引入权的概念,把前一章的思想推广,本书的主

角——波利亚计数定理——也就登场了。第五章介绍这条定理的一项重要应用，是化学上同分异构体的计数问题，在叙述过程中同时介绍了母函数的概念。最后加了一个附录，叙述群这个概念怎样从古典代数的解方程问题产生，希望通过了解前人的业绩提高读者的学习兴趣。

本书没有假定读者具备太多的专门数学知识，原则上——一位高中学生按着章节读下去而且愿花一点气力弄明白其中的内容，是完全可以读懂的。关键就在“愿花一点气力”这句话上面。要弄明白一些数学，读者需要亲自动手干、动脑思考；动了手动了脑弄个明白后，那份愉悦只有自知！为了写作本书我不时获得这份愉悦，但限于个人的数学修养和表达技巧，我未必能成功地把这份愉悦直接传达给每一位读者。如果读者因为看不明白某些段落自己动手动脑弄明白后感到那份愉悦，那我也算起了一点催化剂的作用！当然，如果内容有什么错漏，欢迎读者给我指正。

最后，我将感激清华大学（原为中国科技大学，现在已经在清华大学工作）的冯克勤教授鼓励我为《走向数学》丛书写其中一本，让我有这个机会学习。我也得感激英国南安普敦大学的罗伊德（E. K. Lloyd）教授惠寄资料，讲解波利亚的理论与列尔菲尔的理论两者之间的关系和它们的应用。在此谨向他们两位致谢。

目 录

续编说明	1
编写说明	3
序 言	5
一 几个问题	1
§ 1.1 球棒组合玩具 / 1	
§ 1.2 涂色的积木 / 3	
§ 1.3 同分异构体 / 5	
§ 1.4 开关电路 / 6	
二 对称和群	9
§ 2.1 构形计数与对称 / 9	
§ 2.2 几何上的对称 / 12	
§ 2.3 两个应用的例子 / 14	
§ 2.4 什么是群? / 19	
§ 2.5 群的一些基本性质 / 23	
§ 2.6 两种常见的群 / 27	
§ 2.7 置换群 / 31	
三 “伯氏引理”	41

波利亚计数定理

§ 3.1	群在集上的作用 / 41
§ 3.2	轨和稳定子群 / 47
§ 3.3	伯氏引理的证明 / 50
§ 3.4	伯氏引理的应用 / 52
§ 3.5	空间的有限旋转群 / 68
四	波利亚计数定理 73
§ 4.1	怎样推广伯氏引理至波利亚计数定理? / 73
§ 4.2	波利亚计数定理的应用 / 82
§ 4.3	伯氏引理的另一种推广 / 93
五	同分异构体的计数 105
§ 5.1	引言 / 105
§ 5.2	母函数的运用 / 106
§ 5.3	烷基 $C_N H_{2N+1} X$ 的计数 / 112
§ 5.4	烷烃 $C_N H_{2N+2}$ 的计数 / 118
附录	群的故事 126
参考文献 141

几个问题

§ 1.1 球棒组合玩具

大家也许见过一种类似积木的玩具,元件是一些不同颜色的球和不同长短的棒,球的表面有很多洞,利用这些洞可以就着不同的角度把球和棒相接,由此砌成各种模型,如风车、房子、桥梁、桌子、椅子、动物……也可以砌成各式各样的美术构形.现在问:把一个黑球、一个红球、四个白球用棒连成一个正六边形,球在端点,共有多少个不同的构形呢?

(图 1.1)

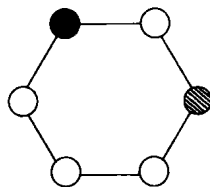


图 1.1

如果那个正六边形是固定的,答

案容易算出来. 先放黑球, 有 6 种不同的摆法; 其次放红球, 只有 5 种不同的摆法; 余下的端点自然要放白球了, 合起来共有 $6 \times 5 = 30$ 种不同的构形. 细心的读者会说: “这个答案跟正六边形扯不上关系! 换了是别的形状, 只要球是放在六个可区别的位置上, 不管那是正六边形的六个端点, 或是一字长蛇上的六个点, 答案仍然是 30 种.” 对的, 把一个黑球、一个红球、四个白球用棒连成一个正八面体, 球在端点, 如果那个正八面体是固定的, 答案同样是 30 种不同的构形(图 1.2(a)). 又把一个黑球、一个红球、四个白球用棒连成一个三棱柱体, 球在端点, 如果那个三棱柱体是固定的, 答案同样是 30 种不同的构形(图 1.2(b)). 不过, 只要你动手砌一砌, 你便知道实际情况可不一样, 因为没有规定人家不准转动或者翻转那些构形呀! 容许转动或者翻转构形, 便没有 30 种不同的构形了. 对六边形而言, 只有 3 种(图 1.3(a)); 对正八面体而言, 只有 2 种(图 1.3(b)); 对三棱柱体

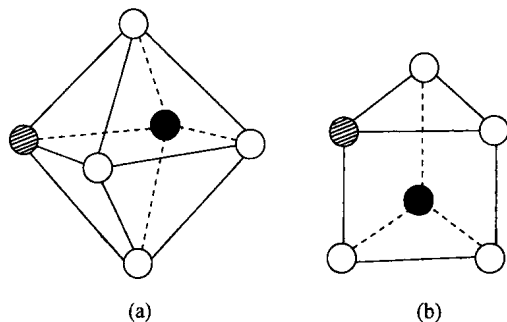


图 1.2

而言,只有 5 种(图 1.3(c)).

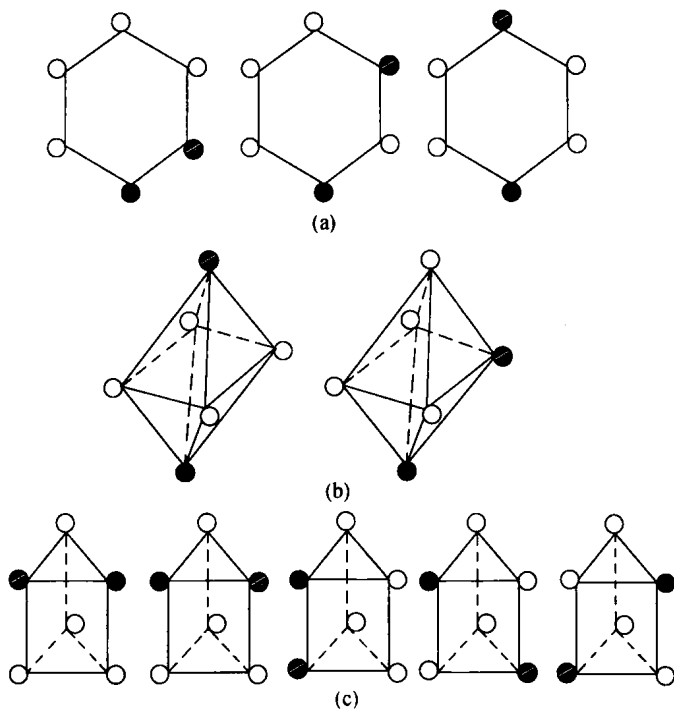


图 1.3

为什么同样是摆放一个黑球、一个红球、四个白球,三道问题的答案却互不相同呢? 一般而言,怎样计算有多少个真正不同的构形呢?

§ 1.2 涂色的积木

给你一块立方积木和红、绿两种油漆,让你把立方

积木的六个面各涂上一种色,共有多少种不同的花式呢(图 1.4(a))? 单凭试验,很多人都知道共有 10 种不同的花式,其中一种是六面涂红色、一种是五面涂红色、两种是四面涂红色、两种是三面涂红色、两种是两面涂红色、一种是一面涂红色、一种是没有一面涂红色. 有位朋友比较懒惰,他不愿把整个面涂色,只在那个面的中间涂上一条红线或者绿线;为了避免这些彩色线条相接,他把线的横直逐面相隔开(图 1.4(b)). 你猜共有多少种不同的花式呢? 是否还是 10 种呢? 不是! 固然,相应于刚才那 10 种不同的花式现在还是 10 种不同的花式(把整个面涂什么色看做中间涂同样颜色的线条便成),但还有 2 种花式跟那 10 种花式是不相同的,读者有兴趣找出吗? 为什么同样是一块立方积木,涂色方法又复相似,答案却不相同呢? 一般而言,怎样计算有多少个不同的花式呢?

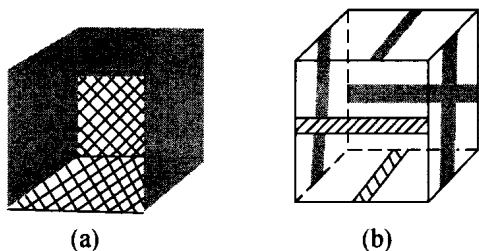


图 1.4

§ 1.3 同分异构体

化学上有种现象,叫做同分异构,早于 1811 年已被法国化学家盖吕萨克(J. L. Gay-Lussac)在实验中证实了,并于 1827 年由瑞典化学家伯齐力阿斯(J. J. Berzelius)正名引入化学中.按照他的定义,同分异构体是具有相同的化学组成和分子量但具有不同性质的物质.这种现象的解释,却要再过半个世纪后才随着结构理论的出现而被揭露.原来虽然两个化合物的结构式相同,它们的原子在分子中所处的位置却可以不相同,这便导致两者具有不同的性质了.例如丁烷的结构式是 C_4H_{10} ,它的四个碳原子有两种不同的摆法(图 1.5),由此产生两种同分异构体.一般而言,给定一个 N 烷烃的结构式是 $C_N H_{2N+2}$,可以有多少个同分异构体呢?

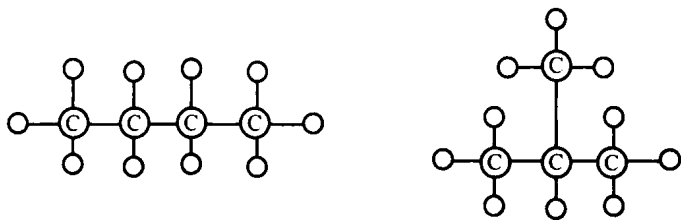


图 1.5

这类问题,其实即是开首提到的球棒组合玩具的构形

计数问题,在第五章里我们会作更详细的讨论.开首提到的正六边形和三棱柱体,还真是化学史上的例子呢!据德国化学家凯库勒(F. A. Kekulé)自述,他在1865年某天梦见一条自吞尾巴的长蛇,顿悟苯的环状结构.苯的结构式是 C_6H_6 ,凯库勒认为它的六个碳原子排成一个正六边形(图1.6(a)),但同时期的另一位德国化学家拉登伯格(A. Ladenburg)却认为苯的六个碳原子排成一个三棱柱体(图1.6(b)).一个区别这两种猜测的方法是考虑当某些氢原子给换成别的基时,每一种可能的结构导致多少个同分异构体,于是回到开首那个构形计数问题了.

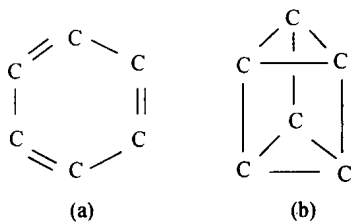


图 1.6

§ 1.4 开关电路

电子控制装置中的开关电路,可以由三种基本门电路组成,就是与门、或门及非门.基本门电路是由电子元件组成的开关,有若干个输入和一个输出.读者不必深究甚至不必知悉这些开关的技术细节,不妨就把输入输出的信号看