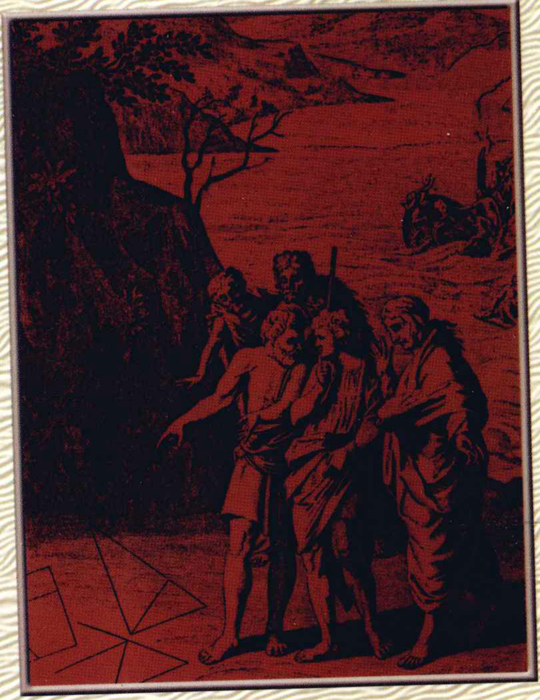
吴振奎数学经典系列

中学数学证明方法



吴振奎 编著

◎一点逻辑知识

◎几个数学名词

◎分析法、综

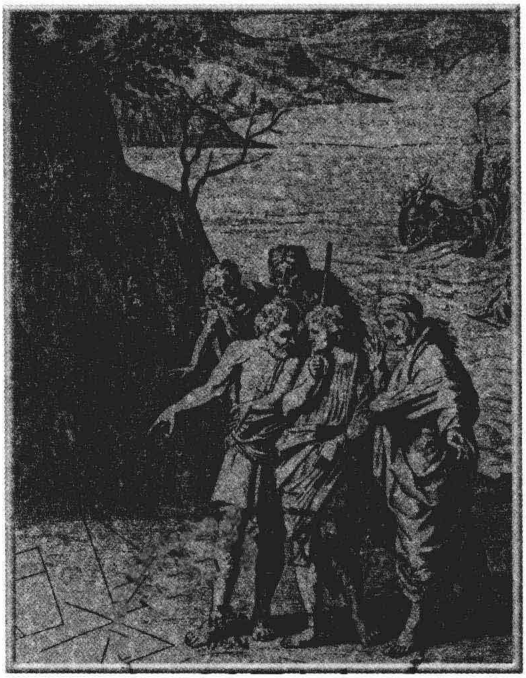
◎反证法、同

◎一些特殊技

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

吴振奎数学经典系列

中学数学证明方法



吴振奎 编著

◎一点逻辑知识

◎几个数学名词

◎分析法、综合

◎反证法、同一

◎一些特殊技巧

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书介绍了中学数学中的常见证明方法，并对一些证明技巧作了扼要的叙述．书中还安排了一定数量的例题和练习，其中较难者给了提示．

本书适合中学师生及师范院校数学系数学教育专业师生使用．

图书在版编目（CIP）数据

中学数学证明方法/吴振奎编著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.6

ISBN 978-7-5603-3352-6

Ⅰ．①中…　Ⅱ．①吴…　Ⅲ．①中学数学课-教学参考资料　Ⅳ．①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 152678 号

策划编辑　刘培杰　张永芹

责任编辑　唐　蕾　杨万鑫

出版发行　哈尔滨工业大学出版社

社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006

传　　真　0451-86414749

网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn

印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司

开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 31.25　字数 333 千字

版　　次　2012 年 1 月第 1 版　2012 年 1 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5603-3352-6

定　　价　58.00 元

前言

数学是研究空间形式与数量关系的一门科学.由于在自然界里、在生产实践中存在着大量的数与形问题,所以数学在实际中有着广泛的应用,是一种必不可少的工具.

数学也是中学的一门重要基础学科.学习中学数学,不仅要掌握基础知识,还要演证大量的习题.在这些习题中,除了有要求计算的题目之外,还有一些要求证明论断是否正确的问题,也就是所谓证明题.

由于数学中证明问题的多样性,证明的方式和方法也有所不同.熟悉各种证明方法,了解它们的逻辑关系,能迅速、准确地解决不同类型的命题.本书将中学数学中常见的证明方法作了归纳、整理和叙述,以供师生们参考.为了加深对方法的理解,每节后面安排了数量较多的习题,其中有些题目相对来说略难,读者可根据情况选择其中的一部分练习.

吴振奎

2011年8月

目录

第 1 章　一点逻辑知识　//1
1.1　概念//2
1.2　判断//3
1.3　推理与三段论式//3
1.4　形式逻辑中的四个规律//5
第 2 章　几个数学名词　//7
2.1　命题//7
2.2　定义、公理、定理及四种命题//8
2.3　充要条件//11
2.4　充要条件与四种命题的关系//12
2.5　枝形推理图//13
2.6　存在唯一性//14
2.7　证明与证明方式方法//15
第 3 章　分析法　//19
习题　//35
第 4 章　综合法　//48
习题　//68
附　分析与综合//84
第 5 章　比较法　//109
习题　//121
附　叠合法与抽屉原理//126
第 6 章　反证法　//141
6.1　归 谬 法//143
6.2　穷 举 法//162
习题　//168

第 7 章　同一法　//176
习题　//190
附　待定系数法//199
第 8 章　归纳法　//208
习题　//241
第 9 章　一些特殊技巧　//258
9.1　借助辅助线、辅助图形或图表//259
9.2　借助某些式子本身的特殊变形及运算//277
9.3　借助代数、几何、三角等学科方法的串联、并用及互助//286
9.4　利用一些定理或性质的特殊判断得到或简化证明过程//313
9.5　借助于物理学上的结论和方法//333
9.6　高等数学方法的应用//340
9.7　一些特殊处理方法//347
习题　//371
第 10 章　如何寻求证明　//417
习题　//431
第 11 章　关于举反例　//465
附　一种悖论//471
本书用到的数学符号　//484
编辑手记　//486

一点逻辑知识

第1章

数学证明方法中的一些依据，是属于**逻辑学**的，因此我们在没有谈证明方法之前，先学习一点逻辑知识.

什么是逻辑学呢？“逻辑”一词出于希腊语“logos”，有思维、思考、理性之意，我们这里所指的逻辑是指思维构造的正确性，即思维确定，无矛盾，推理有据，首尾一贯等. 逻辑学（它是形式逻辑和辩证逻辑的总称）正是关于思维正确构造规律与形式的科学，因而数学中广泛地应用着逻辑学中的规律与形式.

我们下面先介绍一些逻辑学中的名词，它们在数学中也常用到.

1.1 概 念

概念是反映事物本质属性的一种思维形式,即事物属性在人头脑中的反映.

中学数学中有大量的概念,如:点、直线、平面等.

概念包括**外延**和**内涵**. 概念的外延是指适合该概念的一切对象的全体. 如在"三角形"这个概念的外延中包含一切类型的三角形:锐角三角形、直角三角形、等腰三角形、等边三角形等. 概念的内涵是指概念所包含的对象的一切共同本质属性的总和. 如"矩形"这个概念内涵中包含三个本质属性:① 四边形,② 两组对边互相平行,③ 有一个内角是直角.

概念的外延与内涵之间既存在矛盾又有着密切的联系,即一个概念的内涵越广大,则它的外延就越狭小;反之,概念的内涵越狭小,它的外延就越广大. 如若矩形内涵的三个属性中再添加一个属性,如一组邻边相等,则此总和表达一个新的概念 —— 正方形. 这是一个比矩形外延小的概念,这个概念中不再包括邻边不相等的矩形.

概念有确定性,但又有其灵活性. 确定性是指在一定条件下的确定;灵活性是指随人们的认识不断深化,概念的含义也在发展变化. 如"角"的概念,最初限于平面,且在 180° 以内,有锐角、直角、钝角等;而后发展到 180°(平角) 至 360°(周角) 以内的角;进而到正的任意角. 规定了方向之后,又有了负角概念. 及至立体几何,又有了空间直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角,等等.

1.2　判　断

判断是对某种事物进行肯定或否定的思维形式. 概念与概念以一定方式连起来就构成判断.

数学中的判断通常叫做命题(见第 2 章). 如数学中的每一公理、定理、性质、法则等都是一个判断(命题).

判断不一定都正确. 检验一个判断正确与否,除了进行必要的论证外,还要对具体情况作具体分析. 这首先要了解判断的前提(或范围),如讨论方程 $ax^2+bx+c=0$ 有无根,有几个根的问题,必须先明确是在有理数,还是在实数、复数范围内讨论.

其次应注意判断质与量的区别,注意事物的发展变化,明晰量变到质变的过程. 如讨论 $\dfrac{1}{x-a}$ 在整个实数范围内的符号问题时,当 $x>a$ 时,分式值是正的;当 $x<a$ 时,分式值是负的;而当 $x=a$ 时,分式无意义.

判断按其质与量、前提与结论可分为多种形式,[①] 在数学中常用到的判断是所谓假言判断,即"若什么,则什么"形式的判断. 假言判断反映事物间较复杂的或因果的关系.

1.3　推理与三段论式

推理是从已有的一些判断推出另一个新的判断的

① 判断按质可分为:肯定判断、否定判断;按量可分为:全称判断、特称判断、单称判断;按关系来分划可分为:假言判断、定言判断、选言判断,等等.

思维形式. 它揭示个别与一般、特殊与普遍怎样联系，一般怎样从个别中抽出，普遍怎样从特殊中寻求，等等.

数学中的判断或命题证明常需要一系列相互联系的推理来完成.

形式逻辑中常用的推理方法有**演绎法**和**归纳法**. 演绎法是从一般到特殊，从全体到个别的推理方法，它常用三段论式来完成；归纳法是从特殊到一般，从个别到全体的推理方法.

下面我们先来谈一下所谓**三段论式**. 三段论式是人们在思维中经常用到的逻辑论式，它是事物通常关系的反映. 三段论式是由两个称做前提的判断和一个称做结论的判断组成的. 第一个前提通常包含着一个一般规则，叫大前提；第二个前提指论式中的条件，叫小前提. 结论是由两个前提推出的判断. 例如论式

矩形两对角线长相等	**大前提**
正方形是矩形	**小前提**
正方形两对角线长相等	**结 论**

在数学推理叙述中，常常省略了大前提，或将大前提在推理后面用括号注明. 如上论式常叙述为：

因为正方形是矩形，所以正方形对角线相等.（矩形对角线相等）

三段论式的依据是：如果某性质属于（或不属于）某一类事物，则这性质定属于（或不属于）该类事物中的任何一部分.

三段论式中各判断间的关系，可以用各概念的外延间的关系表示出来，如概念 P 的外延包含着概念 Q 的外延，而概念 R 的外延又包含在概念 Q 的外延中，则

概念 R 的外延必包含在概念 P 的外延中.

我们可以用图来表示这些关系. 如上例中用 P 表示具有相等对角线的四边形的外延, Q 是矩形的外延, R 是正方形的外延, 则可见图 1.1(它常被称为欧拉(Euler) 圆或维恩(Venn) 图).

对于否定的情形, 可由图 1.2 说明.

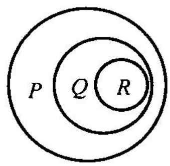


图 1.1

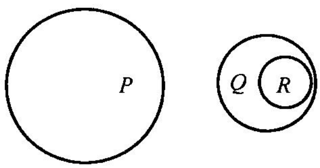


图 1.2

推理的要求是: 重视前提, 过程严密, 方法得当, 合乎逻辑.

1.4　形式逻辑中的四个规律

逻辑思维中的基本规律是人们进行正确思维和论辩时必须遵守的基本规则, 这是客观事物在人们头脑中的正确反映. 形式逻辑中的思维规律是客观事物在相对稳定下的规律性的反映.

中学数学中研究的量大多是些常量, 因而中学数学中广泛地应用着形式逻辑, 充分利用其四个基本规律. 这四个规律其中的三个(下面的前三个), 早在公

元前4世纪，已由古希腊哲学家亚里士多德（Aristotle）规定下了；到了17世纪，德国数学、哲学家莱布尼茨（G. W. Leibniz）补充了第四个.

（1）**同一律**. 在同一论证过程中概念和判断必须保持同一性，用公式表为：A 是 A.

同一律反映着事物间相对稳定的性质，它是所有肯定判断的逻辑基础.

（2）**矛盾律**. 同一论证过程中，两个相互矛盾的（相反的）判断其中至少有一个是错（假）的. 用公式表为：A 不是$\overline{A}$.

矛盾律是和同一律直接联系着的，它是用否定形式表现同一律以肯定形式所表现的论断. 它是否定判断的逻辑基础.

（3）**排中律**. 在同一论证过程中，两个相互矛盾的判断必有一个是真的，因而中间的可能不存在（由矛盾律其中至少有一个是假的）. 用公式表为：或 A、或$\overline{A}$，二者必居其一.

排中律排除了论辩中的似是而非和模棱两可，是寻求真理的逻辑基础.

（4）**充足理由律**. 在同一论证过程中，任何一个真实的判断都要有充足的理由. 所谓充足的理由是：明显的事实、公理、已得的规律（定理、推论、算式等）、原理和学说. 公式为：所以有 A，因为 B，C，$\cdots$.

几个数学名词

第2章

上一章我们简单地介绍了一些逻辑知识,下面再来介绍几个中学数学中常用到的数学名词.

2.1 命　题

命题是一个有意义的论断. 它揭示一个对象的确定的特征或一些对象之间的关系. 一个命题通常是由前提(又称条件)和结论(又叫终结)两部分构成.

数学中的任一判断均构成一个命题.

例如:“等腰三角形的两底角相等”及“若 x_1,x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根,则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,且 $x_1\cdot$

$x_2=\frac{c}{a}$”便是两个命题.这里的“等腰三角形”和“x_1，x_2是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两个根”分别是这两个命题的前提，而“两底角相等”和“$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,且$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$”分别是这两个命题的结论.命题有时可能是不正确的.

若把一些命题按一定方式连起来,又可构成新的命题.假设我们把两个命题分别记为A和B,将它们用“与”、“或”、“若……则”和“非”诸字连起来可构成几个新命题.可用符号分别记为:

(1) $\overline{A}$(读做非A或不是A),它表示对命题A的否定,即可视为“当A假时它真”.

(2)$B\&A$(读做A与B),它表示当且仅当A和B都真时它真.

(3)$A\vee B$(读做A或B),它表示当且仅当A和B至少有一真时命题真.

(4)$A\rightarrow B$(读做若A则B),它表示当且仅当A真B假时命题假.

(5)$A\Leftrightarrow B$(读做A与B等价),它表示A与B同真同假,即若A则B,且若B则A.它有时又记为$A\sim B$或$A\leftrightarrow B$.

2.2　定义、公理、定理及四种命题

在数学中,用已知概念来说明一个名称或术语意义的命题称为这个名称或术语的定义.

例如:“90°的角叫直角”是直角的定义,“只含有一个未知数,且未知数最高次数是1的方程,称为一元

一次方程”,是一元一次方程的定义等.

公理是被实践证实是真确,不加证明而采用的命题. 它又叫公准.

例如:“过两点可引且仅可引一条直线”及“若 $a=b$,则 $a+c=b+c$(等量加等量和相等)”等都是公理.

定理是由已知真实命题经过逻辑推理(包括计算)而证明是真确的命题.

例如:“直角三角形中,若 c 代表斜边,a,b 代表两直角边,则 $c^2=a^2+b^2$”叫“勾股定理”.

再如“在 $\triangle ABC$ 中,若 a,b,c 分别表示角 A,B,C 所对的边,则 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$”称为“正弦定理”等.

定理又常分为引理(又叫预理)、定理和推论. 由它引导而推出定理的命题(它仅仅是为了证明该定理所作的准备)叫引理. 而由定理直接得到的命题(它常常是指对应定理的某些简单的特殊情形)叫推论.

数学中的命题也是由前提与结论两部分组成. 若对一个命题(称为原命题)的前提与结论互换或否定,便可推衍出与之对应的三个其他命题(当然并非它们都一定真确),即逆命题、否命题和逆否命题.

(1) **原命题**. 任一已知命题都可视为原命题. 若命题形如“若 A 则 B”,由上面介绍我们知道,A 称为前提或条件,B 称为结论.

(2) **逆命题**. 若一命题的条件是某原命题的结论(或结论的一部分),而它的结论是原命题的条件(或条件的一部分),则称它为原命题的逆命题. 可用“若 B

则 A" 表示.①

(3) **否命题**. 若一命题的条件与结论分别是某原命题的条件与结论的反面,这个命题称为原命题的否命题. 可用"若$\overline{A}$ 则$\overline{B}$" 表示.

(4) **逆否命题**. 若一命题的条件与结论分别是某原命题的结论与条件的反面,这个命题称为原命题的逆否命题. 可用"若$\overline{B}$ 则$\overline{A}$" 表示.

下面我们举例说明.

原命题是:正三角形三内角相等;

其逆命题是:三内角相等的三角形是正三角形;

其否命题是:不是正三角形,其三内角不等;

其逆否命题是:三内角不等的三角形不是正三角形.

从命题的结构来看,原命题与其逆否命题等效(同真同假),而逆命题与否命题等效,这一点可用后面讲到的反证法证明.②但是一个命题的逆命题不一定与它的原命题等效,即是说一个命题(原命题) 真,其逆命题不一定真.

例如:"若 $a > 0, b > 0$,则 $ab > 0$" 真,但其逆命题(它只是其中之一)"若 $ab > 0$,则 $a > 0, b > 0$" 就

---

① 我们应当较为广泛地理解这种表示法,当 A 和 B 都只含一条事项时(此时称为简单命题),不言而喻;但当 A 和 B 所含事项不止一种时,应将原命题中条件与结论理出若干事项,然后取出同样多的事项进行交换,得原命题的逆命题. 对于下面谈到的几种命题情况类同.

② 证若$\overline{B}$ 则$\overline{A}$ 不成立,则它的否定情形成立,即若$\overline{B}$ 则 A(排中律). 但已知:若 A 则 B(原命题),故若$\overline{B}$ 则 B(传递律),矛盾! 从而若$\overline{B}$ 则$\overline{A}$ 真. 这一点也正是反证法的逻辑依据.

不真.

又如“若 $4 \mid a$，则 a 是偶数” 真，而其逆不真，因为有不能被 4 整除的偶数存在. 同样可知，一命题的否命题不一定与它的逆否命题等效. 它们之间的关系可用图 2.1 表示.

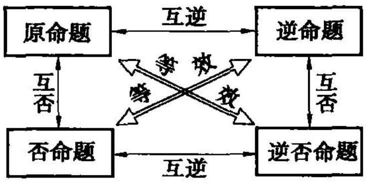


图 2.1

若问：何时原命题与其逆命题等效？我们在回答这个问题之前，先谈谈与它有关的数学中的所谓充要条件.

2.3　充要条件

充要条件是指一个命题中充分条件和必要条件的简称，它是构成许多数学命题的最重要的概念. 下面分别谈一下这两个条件.

(1) **充分条件**：若条件 B 具备时，事件 A 必然出现（成立），即若有命题“若 B 则 A”（记为 $B \to A$）成立，则条件 B 就称为事件 A 的充分条件. 充分条件仅仅是充分的，它不一定必要，即是说当条件 B 没有被满足，或者用较弱的条件 B' 代替条件 B，事件 A 也可能出现. 简言之：“*有之必然，无之未必不然.*”

例如：若一整数 n 以“0 0” 结尾，则 $4 \mid n$. 这里以“0 0” 结尾是整数能被 4 整除的充分条件，但它不是必要的，我们只需注意到 12 不是以“0 0” 结尾的整数，而