高等学校教材

Elasticity
弹性力学（第2版）

吴家龙 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

Elasticity

弹性力学（第2版）

TANXING LIXUE

吴家龙 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书第一版是普通高等教育“九五”教育部重点教材。本次修订删除了部分过于偏理论或在教学中很少涉及的内容，对文字表述作了适当修改，并对部分章节的习题作了调整和充实。

全书共十四章和两个补充材料，按应力、应变分析、应力应变关系、弹性力学问题的建立和一般原理、平面问题的解答、空间问题的解答、热应力、弹性波的传播、弹性薄板的弯曲和弹性力学的变分解法的顺序编排。在内容的选择和叙述方法上，既充分注意理论的系统性、完整性和严密性，更注重深入浅出，重点突出，难点分散，联系工程实际，强调问题的物理本质，便于学生理解和掌握。两个附录为：笛卡儿张量简介和弹性力学基本方程的曲线坐标形式。

本书主要作为高等学校工程力学专业本科生和工科研究生教材，也可作为土建类、机械类等专业本科生的教材和教学参考书，以及相关研究人员和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/吴家龙编著.—2版.—北京：高等教育出版社，
2011.8
ISBN 978-7-04-032710-6
Ⅰ.①弹… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①弹性力学-高等学校-教材
Ⅳ.①O343
中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第140624号

策划编辑 水 渊 责任编辑 黄 强 封面设计 赵 阳 版式设计 马敬茹
插图绘制 郝 林 责任校对 俞声佳 责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京铭成印刷有限公司
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 28
字 数 520千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2001年6月第1版
2011年8月第2版
印 次 2011年8月第1次印刷
定 价 43.30元

物 料 号 32710-00

第二版前言

本书作为普通高等教育“九五”教育部重点教材出版，至今已超过九年。为适应当前教学的需要，作者征求了校内外一些专家的意见，对本书作如下的修改：

（一）删除一部分“过于偏理论”或在教学中很少涉及的内容，其中包括第二章的“应力二次曲面”，第三章的“应变二次曲面”和“有限变形的几何浅析”，第五章的“在体力为常量时一些物理量的特性”，第十章的“位移通解的其他形式”，以及第十四章的“作为古典变分法革新和发展的有限单元法”等。为更加凸显出用复变函数方法解决孔口问题的优越性，还删除了第八章的“圆域上的复位势公式”和“圆盘边缘受集中力作用”两节内容。

（二）为便于读者理解，并出于实用的考虑，将第八章的“多连通域上应力和位移的单值条件　多连通无限域情况”这节的标题改为“单孔有限域上应力和位移的单值条件　单孔无限域情况”，并对该节相关推导作了修改。

（三）对少量文字表述作了适当修改，对部分章节的习题作了调整和充实。

清华大学徐秉业教授仔细审阅了本书的修订稿，提出了许多宝贵意见，对此表示衷心的感谢。

吴家龙

2010 年 8 月于同济大学

第一版前言

本书的编写工作始于1964年，后因故中止。1978至1979年间，因同济大学工程力学专业和工科研究生教学的需要，又陆续写完了本书的其余部分，并于1981年印成铅印本，取得了较好的使用效果。在经过近六年的使用后，对本书作了较大的修改和充实，1987年由同济大学出版社出版。同年，经国家教委高等工业学校力学专业教材编审委员会审定，被推荐为工程力学专业的教学用书。1992年，根据同济大学和兄弟院校在使用中提出的意见和建议，及国家教委高等工业学校工程力学专业教材编审委员会的审阅意见，又对本书作了认真的修改，1993年，再由同济大学出版社出了新一版。1995年，本书新一版获第三届全国普通高等学校优秀教材国家教委二等奖。在国家教委制订“九五”教材规划时，本书经申报被列为普通高等教育“九五”教育部重点立项教材，经专家正式评审并按评审意见修改后由高等教育出版社出版。现将本次修改情况简要地说明如下。

在“应变状态理论”这一章中，增加了相对位移张量的概念，并将这章第二节的标题更名为“相对位移张量　转动分量”。在这章的第三节“转轴时应变分量的变换　应变张量”中，原来的推导过于繁琐冗长，现借助于方向导数的概念，不仅使推导简洁明了，而且几何意义也十分清晰。这章还对第四节“主应变　应变张量不变量”和第六节“体应变”的推导作了修改。

在原“弹性力学问题的建立”这章中，增加了“弹性力学的一般原理”一节，并将这章的标题改为“弹性力学问题的建立和一般原理。”在这章的第一节“弹性力学的基本方程及其边值问题”中，原书将应变协调方程也纳入基本方程，修改后明确指出弹性力学的基本方程包括平衡(运动)微分方程、几何方程和物理方程，在应力解法中，才提出应变协调方程并说明其应用。

原书中“弹性力学方程的通解及其应用”的内容过于庞杂，修改后删去了“弹性力学应力通解”的全部内容；在“齐次拉梅方程的通解”这一节中，除原有的“布西内斯克－伽辽金通解”和“纽勃－巴博考维奇通解”保持不变外，还简要地介绍了位移通解的其他形式。该章的标题改为“空间问题的解答”。

在“热应力”这章中，增加了“热传导方程及其定解条件”一节。在“弹性波的传播”这章里，增加了“一般的平面波”和“平面波在平面边界上的反射和折射”两节的内容。在“弹性力学的变分解法”这章的最后，增加了“作为古典变分

法革新和发展的有限单元法”一节，其中通过平面问题线性位移模式的有限单元法，简要地阐述了有限单元法的基本步骤及其与古典变分法之间的本质联系。

本书还对一些章节在文字上作了较大的修改。

为使难点分散，便于学生理解和掌握，本书的体系未作变动。仍将“笛卡儿张量简介”和“弹性力学基本方程的曲线坐标形式”作为补充材料附在正文后面。前者可在讲完了弹性力学的基本方程以后，或在讲“弹性力学的变分解法”之前，再向学生讲授；后者，由于受学时的限制，一般只能供学生作参考之用，但在“空间问题解答”这章中，将直接引用该补充材料所获的结果。多年的教学实践表明，本书的体系安排，是比较适合于多数学校的教学要求的。

鉴于目前各校工程力学专业弹性力学的课时都有所削减，为突出基础和重点内容，本书除原带星号 * 的内容保持不变外，又对部分章节标上了星号 *。对选用本书作为工程力学专业教材的学校，可根据教学时数、学生的基础状况和后继课程的教学需要，作适当的取舍。但这些章节对工科专业研究生来讲，多数仍是重要的教学内容。

本书长期被用作同济大学工科有关专业本科生的教材，内容安排是这样的：第二至第四章，着重介绍弹性力学的基本方程以及它们的物理意义和几何意义，除物理方程直接引出不作推导外，其余的都要作较详细的推导；第五至第七章，除带星号 * 的内容外，一般都可列入教学范围；第九章只讲柱体扭转的应力解部分（不含薄壁杆扭转）；第十章只介绍工程和后继课程中用到的几个重要的结果，不作推导；第十三章重点介绍矩形薄板的弯曲，对圆板只作一般介绍；第十四章只介绍位移变分方程、最小势能原理及其在近似计算中的应用。根据我们多年的教学实践，讲授上述这些内容只需 51 至 54 学时，且能取得较好的教学效果。

清华大学徐秉业教授和河海大学卓家寿教授认真地审阅了本书的修改计划和修改后的原稿，并提出了许多宝贵意见；同济大学的夏志皋、唐寿高教授也为本书的修改提供了不少帮助，对此，一并表示衷心的感谢。

吴家龙
1999 年 6 月于同济大学

主要符号表

x,y,z	直角坐标
ρ,φ,z	柱坐标
ρ,φ	极坐标
r,θ,φ	球坐标
$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$	坐标单位矢量
$\boldsymbol{v}$	物体内微分截面或边界上外法线方向的单位矢量
l,m,n	外法线的方向余弦
I_x,I_y	横截面对 x 轴和 y 轴的惯性矩
$I_z=I$	横截面对 z 轴的惯性矩
I_{p}	极惯性矩
g	重力加速度
ρ_1,ρ	密度
q	连续分布荷载的集度
F_x,F_y,F_z	单位体积体力的直角坐标分量
F_ρ,F_φ,F_z	单位体积体力的柱坐标分量
F_r,F_θ,F_φ	单位体积体力的球坐标分量
$\boldsymbol{f}_v$	任意微分截面上的应力矢量
f_v	$\boldsymbol{f}_v$ 的大小
f_{vx},f_{vy},f_{vz}	$\boldsymbol{f}_v$ 的直角坐标分量
$\bar{f}_x,\bar{f}_y,\bar{f}_z$	单位面积面力的直角坐标分量
M	弯矩;扭矩
σ_v,τ_v,f_v	任意微分截面上的正应力、切应力和总应力
$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$	直角坐标系中的正应力分量
$\tau_{yz},\tau_{zy},\tau_{xz}$	直角坐标系中的切应力分量
$\tau_{zx},\tau_{xy},\tau_{yx}$	
$\sigma_\rho,\sigma_\varphi,\sigma_z$	柱坐标系中的正应力分量
$\tau_{\varphi z},\tau_{z\varphi},\tau_{\rho z}$	柱坐标系中的切应力分量
$\tau_{z\rho},\tau_{\rho\varphi},\tau_{\varphi\rho}$	
$\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_\varphi$	球坐标系中的正应力分量
$\tau_{\theta\varphi},\tau_{\varphi\theta},\tau_{r\varphi}$	球坐标系中的切应力分量
$\tau_{\varphi r},\tau_{r\theta},\tau_{\theta r}$	
$\sigma_\rho,\sigma_\varphi,\tau_{\rho\varphi},\tau_{\varphi\rho}$	极坐标系中的应力分量;平面曲线坐标中的应力分量

$$\Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_\rho+\sigma_\varphi+\sigma_z=\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_\varphi$$

$\boldsymbol{U},\boldsymbol{u}$	位移矢量
u,v,w	位移的直角坐标分量
u_ρ,u_φ,w	位移的柱坐标分量
u_r,u_θ,u_φ	位移的球坐标分量
u_ρ,u_φ	位移的极坐标分量
$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$	直角坐标系中的正应变分量
$\gamma_{yz},\gamma_{xz},\gamma_{xy}$	直角坐标系中的切应变分量
$\varepsilon_\rho,\varepsilon_\varphi,\varepsilon_z$	柱坐标中的正应变分量
$\gamma_{\varphi z},\gamma_{\rho z},\gamma_{\rho\varphi}$	柱坐标中的切应变分量
$\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_\varphi$	球坐标系中的正应变分量
$\gamma_{\theta\varphi},\gamma_{r\varphi},\gamma_{r\theta}$	球坐标系中的切应变分量

$$\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_\rho+\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z=\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi$$

$\varepsilon_\rho,\varepsilon_\varphi,\gamma_{\rho\varphi}$	极坐标中的应变分量
I_1,I_2,I_3	应力张量不变量
J_1,J_2,J_3	应变张量不变量
E	弹性模量(或杨氏模量)
G	切变模量
ν	泊松比
$\mu=G,\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	拉梅弹性常数
$U(x,y)$	艾里应力函数
$\varphi_1(z),\psi_1(z)$	复位势,即复应力函数
$\Phi(x,y)$	柱体扭转和弯曲的应力函数
α	单位长度的扭转角
$\varphi(x,y)$	圣维南扭转函数
$\Phi(x,y,z)$	拉梅应变势;热弹性应变势
$\boldsymbol{\varphi}(x,y,z)$	伽辽金矢量
$\varphi_3(x,y,z),\varphi_3(r,z)$	乐甫应变函数
τ	温度
T	变温;绝对温度;周期
L	波长;梁和柱的长度;拉格朗日函数
c_1,c_2,c_3	弹性波的速度
M_x,M_y	板横截面单位宽度上的弯矩
M_{xy},M_{yx}	板横截面单位宽度上的扭矩
F_{Sx},F_{Sy}	板横截面单位宽度上的横向剪力
F_{Sx}^{t},F_{Sy}^{t}	板横截面单位宽度上总的分布剪力
$w(x,y)$	板弯曲时的挠度
D	板的抗弯刚度;扭杆横截面的几何性质

v_ε	应变能密度
V_ε	应变能
v_c	应变余能密度
V_c	应变余能
v_i	内能密度
V_I	内能
v_F	自由能密度
E_k	动能
E_p	弹性体的总势能
E_c	弹性体的总余能
E_p^*	广义总势能
E_c^*	广义总余能
W	外力功;物体重量
S	哈密顿作用量

目　　录

第一章　绪　论

§1－1　弹性力学的任务和研究方法

弹性力学又称弹性理论，是固体力学的一个分支，它的任务是研究弹性体在力和温度变化等外界因素作用下所产生的应力、应变和位移，从而解决各类工程中所提出的强度、刚度和稳定问题，使经济与安全这对矛盾得到更好的统一。它是一门理论性和实用性都很强的学科。

弹性，几乎是所有固体的一种固有的物理属性，而**完全弹性体**，则是指在引起其变形的外界因素被消除以后能完全恢复原状的物体，简称为**弹性体**。大量的实验表明，像钢一类材料的物体，如果其内各点的应力不超过弹性极限，则是一种理想的完全弹性体，而且应力和应变之间呈线性关系；但也有一些材料，例如橡皮和某些有色金属，却具有非线性的弹性性质。我们称前者为物理线性的，而后者为物理非线性的。

弹性力学与材料力学相比，在任务、研究对象和研究方法等方面，既有相同之处，也有不同之处。

如前述，弹性力学的任务是要解决构件的强度、刚度和稳定问题，而材料力学所研究的范围，还涉及疲劳、蠕变、塑性变形以及构件破坏规律等问题。

从研究对象来看，弹性力学既研究杆状构件，又研究诸如深梁、板壳以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构；材料力学基本上只研究杆状构件，这种构件在拉压、剪切、扭转和弯曲情况下的应力和变形，是材料力学的主要研究内容。

从研究方法看，弹性力学根据六条基本假设，从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发，经过严密的数学推导，得到弹性力学的基本方程和各类边界条件，从而把问题归结为线性偏微分方程组的边值问题。而材料力学在研究杆状构件的拉伸、压缩、扭转和弯曲问题时，也要用到弹性力学的六条基本假设，同时也要从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发，但为了简化计算，大都还对构件的应力分布和变形状态作出某些附加的假设。

例如，在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下弯曲时，引进了“平截面假设”，由此得出的结果是，横截面上的弯曲应力沿梁高按直线分布。但用弹性力学方法求解这一问题时，就毋需引进这个假设，相反地，还可以利用弹性力学的

结果来校核这个假设是否正确，并说明由于引进了这个假设以后，对于具有不同的跨度和高度之比的梁来说所引起的误差，从而可以确定这个假设所带来的条件性和局限性。

又例如，在材料力学里计算带孔构件拉伸时，假定拉应力在净截面上是均匀分布的。但在弹性力学里，就不需要作出这个假定，而且它的计算结果表明，净截面上的拉应力远非均匀分布，而要在孔边附近发生高度的应力集中现象，孔边的最大拉应力会比平均应力高出若干倍。

弹性力学作为一门基础技术学科，是近代工程技术的必要基础之一。在造船工业中，船体结构的强度、刚度计算，要直接应用弹性力学的理论和方法。在航空工业中，尤其是航天工业的发展，不断地对弹性力学提出新的任务，并由此形成了新的分支——空气弹性力学。在重型机器、精密机械和化工机械中，对于机器部件在各种工作条件下的强度和刚度的研究，也广泛地应用弹性力学的结论和公式。在水利工程和土建工程中，工程技术人员往往直接利用弹性力学方法作为设计的理论基础。在地震学中，根据弹性波在地壳中传播的研究结果，计算出震源所在的位置，并研究地震波传播的规律。

弹性力学又可作为一门基础理论学科。物理学家在研究光波理论时引用了弹性力学。近几十年来，人们还把弹性力学的理论和方法应用于生物力学等边缘学科的研究。

解决工程中提出的弹性力学问题有理论计算和实验两大手段。由于理论计算遇到了复杂的偏微分方程和偏微分方程组的定解问题，所以人们早就寻找各种近似的计算方法，以克服这些数学上所出现的困难。随着电子计算机、尤其是微型计算机的发展和普及，弹性力学(包括固体力学的其他分支)的各种数值方法和半解析数值方法也有了迅猛的发展。其中最具代表性的有：以弹性力学基本方程为控制方程的差分法，以弹性力学的变分原理为控制方程的有限单元法和以弹性力学边界积分方程为控制方程的边界元法。差分法是弹性力学中一种比较古老的数值方法，目前在水工结构等工程问题中仍常被采用。有限单元法被用于解决弹性力学问题至今只有近 50 年的历史。由于它所具有的灵活性和通用性，因此备受工程界的欢迎。它的发展，是用弹性力学解决工程问题的重大突破。但由于它是一种纯数值的方法，因此不可避免地带来了自由度多、内存量大的不足。随后发展起来的各种半解析数值方法克服了以上这些缺点，更便于在微机上实现，这为用弹性力学解决工程问题开辟了更为广阔的前景。

§1-2 弹性力学的基本假设

在弹性力学中，为了能通过已知量(如物体的几何形状和尺寸、物体所受的