“十二五”国家重点图书出版规划项目

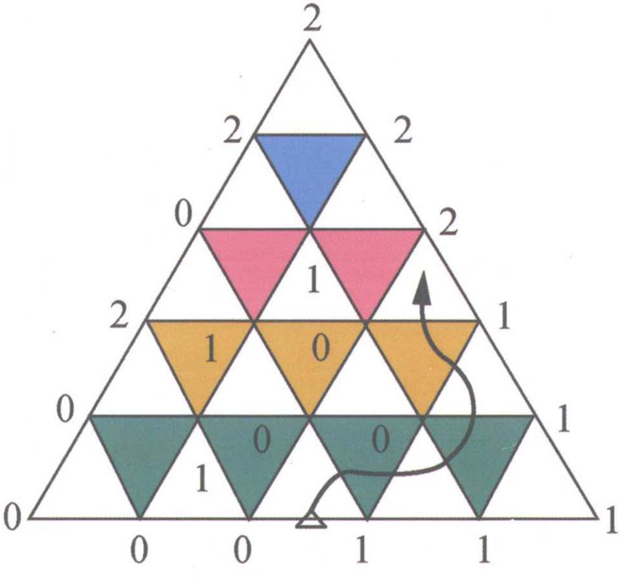
走向数学丛书

SCIENCE & HUMANITIES

同伦方法纵横谈

TALKS ON HOMOTOPY METHOD

著　王则柯



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

同伦方法纵横谈 / 王则柯著. — 大连:大连理工大学出版社，2011.5
(走向数学丛书)
ISBN 978-7-5611-6170-8

Ⅰ. ①同… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①同伦论 Ⅳ. ①O189.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 065909 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
沈阳新华印刷厂印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm　印张:8.25　字数:141 千字
2011 年 5 月第 1 版　　2011 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦　王　伟　　责任校对:任俊杰　李　慧
封面设计:孙　元　宋明亮

ISBN 978-7-5611-6170-8　　定　价:25.00 元

续编说明

自从1991年“走向数学”丛书出版以来，已经出版了三辑，颇受我国读者的欢迎，成为我国数学传播与普及著作的一个品牌。我想，取得这样可喜的成绩主要原因是：中国数学家的支持，大家在百忙中抽出宝贵时间来撰写此丛书；天元基金的支持；与湖南教育出版社出色的出版工作。

但由于我国毕竟还不是数学强国，很多重要的数学领域尚属空缺，所以暂停些年不出版亦属正常。另外，有一段时间来考验一下已经出版的书，也是必要的。看来考验后是及格了。

中国数学界屡屡发出继续出版这套丛书的呼声。大连理工大学出版社热心于继续出版；世界科学出版社（新加坡）愿意出某些书的英文版；湖南教育出版社也乐成其事，

尽量帮忙。总之，大家愿意为中国数学的普及工作尽心尽力。在这样的大好形势下，“走向数学”丛书组成了以冯克勤教授为主编的编委会，领导继续出版工作，这实在是一件大好事。

首先要挑选修订重印一批已出版的书；继续组稿新书；由于我国的数学水平距国际先进水平尚有距离，我们的作者应面向全世界，甚至翻译他们的优秀著作。

我相信在新的编委会的领导下，丛书必有一番新气象。

我预祝丛书取得更大成功。

王　元

2010 年 5 月于北京

编写说明

从力学、物理学、天文学，直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学. 一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三四年有数学课. 可见数学之重要与其应用之广泛.

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏. 我以为要克服这个鸿沟还是有可能的. 近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握. 我想，如果知道讨论对象的具体背景，则有可能掌握其实质. 显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到. 若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了

解.这就促使我们设想出一套"走向数学"小丛书,其中每本小册子尽量用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面,使工程技术人员、非数学专业的大学生,甚至具有中学数学水平的人,亦能懂得书中全部或部分含义与内容.这对提高我国人民的数学修养与水平,可能会起些作用.显然,要将一门数学深入浅出地讲出来,决非易事.首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解.从整体上说,我国的数学水平还不高,能否较好地完成这一任务还难说.但我了解很多数学家的积极性很高,他们愿意为"走向数学"撰稿.这很值得高兴与欢迎.

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社的支持,得以出版这套"走向数学"丛书,谨致以感谢.

王　元

1990年于北京

前言

不动点算法，同伦算法，或同伦方法，及其计算复杂性理论，即成本理论，是20世纪70年代开始发展起来的互相关联的应用数学的新领域. 数理经济学的讨论，是这一发展的重要背景；以往最抽象的拓扑学，在这一领域返朴归真，驱散让人畏而远之的迷雾，展示其人见人爱的几何魅力. 在这一发展过程中，斯卡夫、库恩、伊夫斯、斯梅尔、李天岩等国际知名教授和我国一些学者，都做出了有声有色的贡献.

非常难得的是，这些新领域的进展，主要得益于新颖的思想，而不是依靠高深知识的堆砌. 本书的大部分内容，就是在中学数学的基础上，从最浅显最富启发的例子入手，一环扣一环，介绍不动点算法、同伦算法及其计算复杂性理论的主要进展. 除了科学内容本身之外，我们还着重发掘科学研究方法论的丰富内涵. 将来真正进入这些研究领域的读者终究不会很多，但是科学故事和科研方法的启迪，将使绝大多数读者终身受益.

这是一本关于科学新发展的科学普及著作. 由于这些领域的研究正方兴未艾，国外专家连大学本科水平的教科书都来不

及写，更不必说比较通俗普及的著作了．我们本身从事这些研究，比较特别的是，我们也喜欢写科普的和通俗的文章和著作．我自己是学拓扑学出身的．拓扑学原来的具体方法的确比较难以把握，但是现在拓扑学能够在数理经济学等应用科学领域发挥那么大的作用，主要得益于它清晰简明的几何思想和整体处理问题的方式．这也是十几年来我和我的研究生能够在这些领域做出一些贡献的原因．

我们写这本书，还冀望读者分享我们研究工作的心得，那就是：拓扑学并非那么高深莫测，拓扑学提供生动朴素的和富于启发的几何思维．读者将会看到，同伦方法就是沿着曲线或者折线走，从一个房间走到另一个房间，而计算复杂性讨论的就是数一下走过多少个房间．这样的讨论，不是很具体很有趣吗？

在这本书里，读者会看到许多人物故事．作为一本普及读物，我们有时候甚至觉得，对于不少读者来说，书中所写的科学研究中的人物故事，可能比书中介绍的具体的研究成果更有价值．这些人物故事，许多都出自我们个人之间的交往．这是从一个侧面了解科学研究的规律，了解科学家之成为科学家的珍贵记录．

我早期的一些研究生，都曾致力于不动点算法、同伦方法、计算复杂性理论以及相关的论题，他们是：高堂安、马建瓴、钟信、易艳春、朱政辉、史宏超、陈向新．他们对这本书有很多贡献，我们在此表示感谢．我们还感谢湖南教育出版社．我们的有关研究一直得到国家自然科学基金和国家教委博士学科点专项基金的资助，在此一并感谢．

王则柯

识于丁丑年夏

目　录

一

神奇的同伦方法：库恩多项式求根算法

多项式的求根，是纯粹数学中最古老的问题之一，也是数值分析中最古老的问题之一. 就纯粹数学而言，根与系数关系的韦达定理、三次方程的卡丹公式、高斯的代数基本定理、天才的阿贝尔和伽罗华的群论，都渊源于多项式的求根问题. 就数值分析而言，任何一本数值分析教科书，有关各种多项式的求根方法已不胜枚举，而当今的计算数学学术刊物，有关多项式求根问题的新进展仍然屡见不鲜.

§1.1 多项式方程求根的魔术植物栽培算法

1974 年 6 月，第一次不动点(fixed points)算法及应用国际会议在美国召开. 欧洲、日本和美国的几十位数学家参加了这次会议. 美国普林斯顿大学的库恩(Harold W. Kuhn)教授宣读了一篇用不动点算法解代数方程的论文[6]，引起大家很大的兴趣.

众所周知,伟大的数学家高斯在1799年首先证明了代数基本定理:一个 n 次复系数代数方程有且仅有 n 个根. 可是,当时他的证明还不是构造性的,也就是说,只肯定根的存在,但没有同时告诉求解的方法. 近200年来,特别是电子计算机问世以来,人们已经发展了不少数值求根方法. 这些方法大致上属于同一类型:以迭代为特点. 有些方法还依赖于根的分布理论. 然而,库恩的方法却是别开生面的.

一个方形的培养皿,它的边缘上长着 n 个新芽(图1.1). 还有一个立体的大篱笆,越往上越密. 把篱笆放在培养皿上面,一个数学过程马上就要开始了. 随便你给出一个 n 次复系数多项式 $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$,把 f 的信息传给大篱笆,于是培养皿上的 n 个新芽如同 n 条生长着的藤一样,很快地向上攀援,每条藤恰恰指向多项式 $f(z)$ 的一根,多项式 $f(z)$ 的 n 个根就全部找到了(图1.2).

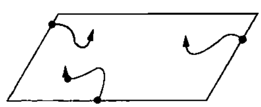


图1.1 三个芽的库恩培养皿

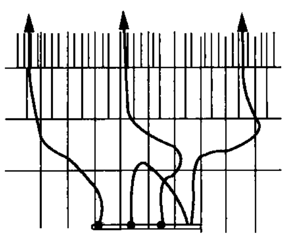


图1.2 库恩的大篱笆和他的魔术植物

1.1.1 库恩算法探胜

这是数学还是园艺学? 莫非是编神话? 不,这是库恩那篇严谨的数学论文的真实的几何形象.

让我们仔细看看,库恩的培养皿和大篱笆是怎样建造的;多

项式 $f(z)$的信息是怎样传给大篱笆的;在这种信息的刺激下,n 条藤又是怎样攀援上去的.

大家知道,多项式 $f(z)$是复数域 C 上的一个复值函数,它的根就是复数平面 C 上使得 $f(z_0)=0$ 的那些点 z_0. 几何上,$w=f(z)$是复平面 C 到另一复平面 C'之间的一个变换,它的根就是复平面 C 上被 f 变换到复平面 C'的原点的那些点.

库恩把一系列复平面 C_{-1},C_0,C_1,C_2,…,像摩天大楼面一样排好,在上面画线,把它们全部分割成三角形(图 1.3). 从 C_0 开始,每向上一层,线的密度就增加一倍,并且除 C_{-1}略有不同之外,其余各层的剖分规律完全相同. 库恩就是要用这些越来越细的三角形网格,使多项式的根就范.

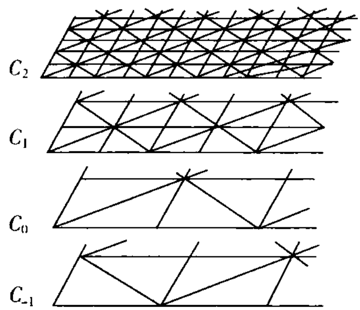


图 1.3

相邻两层之间,按照一定的规则,连起许多直的斜的"钢筋",把两层之间的空间全部划分成一个一个四面体. 图 1.4 展示了 C_{-1} 和 C_0 之间一个立方体的剖分情况,立方体被分割成 5 个四面体. 把这 5 个四面体分离开看看,就成了图 1.5. C_0 以上任两层 C_k 和 C_{k+1}之间的一个立方体的剖分情况,则如图 1.6 所示. 这些剖分规则,是高度规律性的.

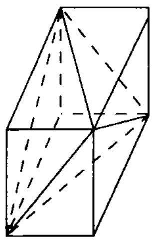


图 1.4

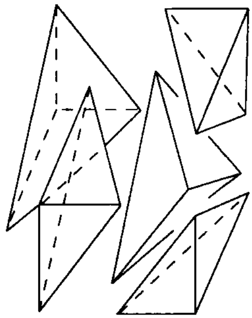


图 1.5

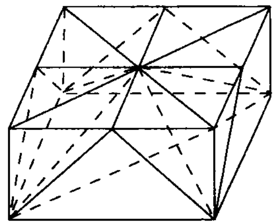


图 1.6

剖分以后，留下这些“钢筋骨架”，就是库恩的越往上越密的大篱笆(这时我们知道，图 1.2 的篱笆没有画出密密麻麻的对角斜线).

现在，在 C_{-1} 上取一个边长 $2m$ 格的方块 Q_m，它的边缘(记作 ∂Q_m)上有 $8m$ 个顶点.(顶点即网格三角形的顶点.)

大家知道，对于每一个复数 z，它的 n 次幂 z^n 还是一个复数. 用三条射线把复平面 C' 分成相等的三个扇形部分Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ(图 1.7). 如果一个顶点所代表的复数 z 的 n 次幂 $w=z^n$ 落在Ⅰ

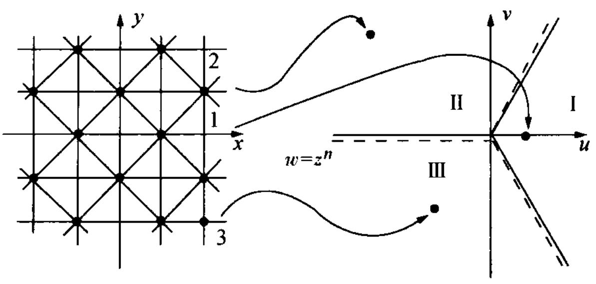


图 1.7　$m=2(n=3)$时的培养皿 Q_m 及标号

里，就给这个顶点标号 1；落在Ⅱ里，就标号 2；落在Ⅲ里，就标号

3. 这样,就可以把 C_{-1} 上 Q_m 内的顶点全部按照幂函数 $w=z^n$ 标好号.

幂函数 $w=z^n$ 把 C 平面上绕原点一圈的正方形周界,变成 C' 平面上绕原点 n 圈的一条曲线. 所以,当 m 较大($m \geqslant 3n/2\pi$)时,∂Q_m 上的顶点,按照逆时针方向,只能循序渐进地标号,即相邻顶点标号只能有 1→1,1→2,2→2,2→3,3→3,3→1 六种情况,并且 1→2 的棱恰有 n 条,相应于 C' 平面上的曲线由 Ⅰ 进入 Ⅱ n 次(图 1.8). 库恩在这 n 个1→2棱的中点各栽一个芽,就成了他的培养皿.

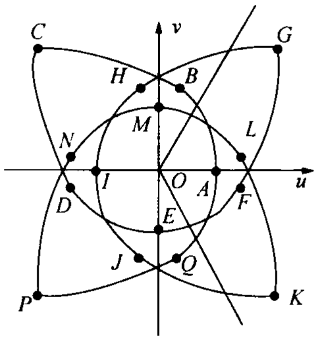


图 1.8

那么所给的多项式 $f(z)$ 的信息又怎样传给大篱笆呢? 只要对 C_0 及 C_0 以上每一层面上每个顶点 z 算一下 $f(z)$,和上面一样,如 $f(z)$ 落在 Ⅰ,z 就标号 1;如 $f(z)$ 落在 Ⅱ,z 就标号 2;如 $f(z)$ 落在 Ⅲ,z 就标号 3,这样一来,篱笆上的所有顶点都可以有一个标号 1 或 2 或 3. 这些简单的 1,2,3 数字. 就构成 f 的全部信息. 我们注意,培养皿(在 C_{-1} 上)是按照 $w=z^n$ 标号的,而大篱笆(C_0 以上)是按照 $w=f(z)$ 标号的,它们的信息是不同的.

现在,这 n 个芽怎样生长呢? 看图 1.9,库恩规定,从1→2棱