全国中小学骨干教师继续教育

核心课培训教材

QGZXXGGJSJ XJYHXKPXJC

全国中小学教师继续教育
东北师范大学研究中心组织编写

中学数学现代基础与结构

沈呈民 著

东北师范大学出版社

全国中小学骨干教师继续教育
核心课培训教材

中学数学现代基础与结构

沈呈民 著

全国中小学教师继续教育
东北师范大学研究中心组织编写

东北师范大学出版社 长春

图书在版编目(CIP)数据

中学数学现代基础与结构/沈呈民著.-长春:东北师范大学出版社,2002.1
ISBN 7-5602-2302-8

Ⅰ.中… Ⅱ.沈… Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料
Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 098945 号

□出 版 人:贾国祥
□责任编辑:杨述春 □封面设计:李冰彬
□责任校对:张 萌 □责任印制:张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 138 号(130024)
电话:0431—5687213
传真:0431—5691969
网址:http://www.nnup.com
电子函件:sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
吉林工学院印刷厂印刷
2002 年 1 月第 2 版 2002 年 1 月第 2 次印刷
开本:850mm×1168mm 1/32 印张:12.375 字数:320 千
印数:1 001 — 3 000 册

定价:15.00 元

序

当我们迈进21世纪的时候，我们会敏锐地觉察到，科学技术日新月异，知识经济初见端倪，综合国力的竞争日趋激烈。这种竞争说到底就是人才的竞争。人才培养靠教育，而教育的发展归根结底在于高素质师资的培育，主要依赖于教师教育。教师教育面临着严峻的挑战。

当前，我国正处于社会转型时期，从农业社会转向工业社会，从工业社会转向信息社会，即从传统社会转向现代化社会。国家的经济体制、经济增长方式也处于一个转轨时期。在社会转型、经济体制转轨、经济增长方式转型的情况下，历史赋予我们惟一的选择就是实施科教兴国战略。科教兴国，教育为本，发展教育当然师资要先行，这对教师教育提出了严峻的挑战。

《中国教育改革和发展纲要》明确提出了本世纪末大城市市区和经济发达地区要普及高中阶段教育，普及高中教育的关键是教师，所以，高师的培

养能力是供远远小于求。在这种情况下，对教师教育无论是数量的扩大，还是质量的提高，都提出了严峻的挑战。

整个中学教育改革的根本出发点，就是要实行全面提高学生素质的素质教育。而实施以培养创新和实践能力为核心的素质教育的根本，还是在于教师素质的提高。如果教师素质不提高，一切都无济于事。这对教师教育提出了严峻挑战。

其他的高等教育或专门教育发展需要高质量的生源，而高等教育和其他各种专门教育的生源都要由中等教育提供。这必然对中等教育提出了更新更高的要求，而中等教育质量的提高在于中小学教师素质的提高。从这个角度来讲，也对教师教育提出了严峻的挑战。

尤其应该提出的，我国2010年基础教育课程改革目标，构建新的基础教育课程体系，将突出培养学生的创新精神和实践能力，终身学习的愿望和能力，以及对自然和社会的责任感。为造就德、智、体、美等全面发展的社会主义事业建设者和接班人奠定基础。为达此目标，课程体系、结构、内容、形式、评价、管理都要发生重大变化，这对教师提出了新的、更高的要求。当然，对教师教育也提出了严峻的挑战。

当前我国教师现状严重不适应21世纪教育改革与发展需要，必须加强中小学教师继续教育工作，全面提高中小学教师素质。实施中小学教师继续教育，关键是教材建设，编写适应中小学教师继续教育的教材乃当务之急，为此，由教育部师范教育司

批准建立的、面向全国的中小学教师继续教育东北师大研究中心在进行广泛调查研究和第一期试办中小学骨干教师国家级培训班的基础上，组织了一批了解基础教育的著名教授、专家编写出了一套适合中小学教师在职进修、提高的教材。这套教材囊括了：学科知识更新类，如学科前沿介绍、科学概念的形成过程、知识拓宽与应用、高观点下的基本知识与其他学科的联系与综合等；教师职业所需的有关知识和教育理论类，如邓小平理论，教师职业道德，教育与社会，基础教育的国际比较，教师教育等；教育实践类，如基本技术与方法，现代教育技术，教育科研等。

总之，中小学教师继续教育的课程是多类型、多规格、多层次、多渠道的动态结构，既有文字教材，又有音频、视频教材，还有网上资源。其类型和结构，将构成丰富多彩的教材体系。本套教材充分体现了从教师可持续发展的高度，把现代自然科学和人文社会发展科学的最新成果反映到课程和教材体系中来；用现代教育思想、理论、技术和新的学科知识发展动态指导教师教育实践，充分重视教师教学经验和实践基础，将优秀教师科研成果课程化，发展教师主体意识和创新精神。在教材编写中，努力做到三个层面的整合：第一个层面，根据学科自然发展与中小学教学实践要求，对专业学科知识进行整合；第二个层面，以本专业学科为载体，教育学科知识和专业学科知识的整合；第三个层面，以教学设计为重点，信息技术与教学内容、方法和手段的整合。

我们完全相信，这套教材的出版，会使中小学教师继续教育教材建设得到补充和完善，也将会推动中小学教师继续教育工作的深入开展。

通过这套书，假如能吸引更多的中小学教师投入到中小学教师继续教育中来，我想正是编者和本“研究中心”所乐于见到的，焉知就不会有起骨干作用的颗颗灿烂的基础教育的新星，从继续教育的行列中升起呢？

我们期待着，衷心热切地期待着。

张贵新

写于全国中小学教师继续教育

东北师大研究中心

——2001年5月

目　录

第一章 数学的发展历史

数学是怎样产生和发展起来的？数学研究的对象是什么？它有什么特点？这是研究中学数学应首先搞清楚的问题．只有了解数学的发展历史，才能认识中学数学的地位和作用．只有认清数学的对象和特点，才能更好地理解和掌握中学数学．

§1.1 数学的产生与发展

数学，由于人们日常生活和生产实践活动的需要，在古代便已产生了．随着生产的发展，社会实践在数学发展中起了决定性作用．社会实践不断地给数学提出新的研究问题；社会实践从总体上影响着数学的发展方向；社会实践提供了检验数学结论的真理性标准．现在数学已发展成为分支众多的庞大系统．了解数学的产生和发展历史，对整体认识数学是会有帮助的，对中学数学的教学也是有益处的．

第一部分 世界数学史简介

首先简单介绍一下世界数学史．对数学发展的全部历史还没有一个一致的公认的分期法，一般可分为下面五个时期．这里介绍每个时期的分期时间、该时期的特点、主要的成就、杰出的代

表人物等.

一、数学萌芽时期（数学产生时期）

时间 远古—公元前6世纪前，这是原始社会和奴隶社会的初期.

特点 ①数学萌芽时期是实际材料的积累时期．这个时期的数学知识是片段的、零碎的、经验型的，没有形成体系.

②这个时期缺少逻辑因素，主要的结果不是逻辑推理.

主要成就

数学萌芽时期的主要成就以埃及、巴比伦、印度和中国的数学为代表．人类在长期生产实践的经验积累中提出了数的概念和运算，并积累了几何的一些知识，这个时期算术和几何没有分开，彼此交错着．代数只有一个开端，三角学思想只是一个胚芽状态.

1．数的概念与运算的产生

数的概念和记数方法的产生，可以追溯到有文字记载以前，如搬弄手指，用小木棍，木上刻痕，结绳记事等办法来记数．最初将数与具体对象相联系；再把有相同数量的不同对象抽象出具体的数；然后概括出一般的数的概念；最后才引进表示数字的符号.

数的运算伴随着数的概念相继产生．数的发展为数的运算的发展提供了可能性．人们不仅发现和掌握了单个数之间的关系，而且开始了简单的运算，如二加三等于五．有些印第安人把数“二十六”说成“我们在两个十上面加上六”，这里也反映出计算物体的具体方法.

数的计算过程中产生了数的运算法则．人们在实践中发现，计算若干个数的和与计算的顺序无关，这就是数的运算的结合律.

这样逐渐形成了具有一定关系和规律的数的系统，这就是算术所研究的对象（算术这个词起源于希腊，表示“计算的艺术”）.

在古埃及的纸草书和古巴比伦的楔形文字文献记载中已经包

含着解算术题的方法，如自然数和分数的记法，掌握了自然数、分数的四则运算，还能进行平方、立方及开平方、开立方等．在这一时期人们不仅已经能自由地运用自然数与度量的概念，还创建了解算术题的某些方法．中国春秋战国时代，已经掌握了整数和分数的四则运算，并普遍用了“九九歌”．

2. 制订了各种记数制

有十进制、二十进制，也有十二进制和六十进制等．巴比伦主要是用六十进制，在实际应用中，巴比伦人还采用二、四、六、十、十二、二十四等进制来表示面积、重量及钱币．中国殷周已采用了十进位记数法，这是对世界数学的最古老的、最伟大的贡献．它比埃及的十进制先进，埃及的十进制缺乏位值制的概念，它比巴比伦的位值制也先进．

3. 几何图形的出现和面积体积的简单计算

几何也是从生产实践活动中产生的．几何概念和知识的产生可追溯到古埃及．正如希腊的科学史家欧德莫斯（Eudemus. 公元前 4 世纪）约在公元前 320 年的著作《几何学史》中所写的：“几何是埃及人发现的，从测量土地中产生的．因为尼罗河水泛滥，经常冲去界限（几何学译为测地术），所以这种测量对埃及人是必需的．”几何不仅与测地有关，而且与建筑特别是和建造金字塔有关．

在埃及纸草书上有 19 个关于土地面积和谷仓容积的问题．埃及人不仅会计算三角形、矩形、梯形的面积，给出了圆面积计算公式，而且还能计算立方体、柱体体积．

4. 简单代数方程的解法

巴比伦迈出了代数学的第一步，能用一些特别的术语和符号来表示未知数，会使用符号，能够解一元一次方程、一元二次方程，用配方法解二次方程是从巴比伦时代开始的．他们甚至还能解三次、四次方程和个别指数方程，解方程过程中有求解步骤．

二、初等数学时期（常量数学时期）

时间 公元前6世纪—公元17世纪中叶（1665年牛顿发现微积分）.

特点 ①数学有了自己的研究对象（数与图形），建立了自己的理论体系，产生了推理证明，使数学从经验时期过渡到演绎时期. 初等代数、初等几何、三角学都成为独立的学科.

②数学形成了自己的独特的研究方法，这个时期的研究方法是常量数学的方法.

主要成就

几何学的发展主要是公元前6世纪到公元2世纪，代数学的发展主要是2世纪到17世纪，三角学的发展主要是公元前1世纪到15世纪.

这个时期的主要成就可分三个阶段来阐述.

希腊数学时期

公元前6世纪到公元641年（亚历山大城陷于阿拉伯人手中），古希腊人研究了前人（埃及和巴比伦人）积累的大量资料，通过整理深化，开始对命题加以证明，使数学思想发生了根本性的变化. 从此数学由具体的经验阶段过渡到抽象的理论阶段. 几何学发展到了惊人的程度，建立了著名的欧氏几何，这是数学史上的一大创举.

1. 希腊数学的鼻祖——泰勒斯

泰勒斯（Thales. 约公元前624—约公元前547）出生于小亚西亚西南部爱奥尼亚地区的滨海城市米利都（Miletus）. 他对数学划时代的贡献是开始了命题的证明，是论证数学的发祥人. 他曾去过埃及，是把几何学这一专门知识带回希腊的第一个人. 他本人发现了许多命题，并对其中一部分给出了证明. 下列命题的发现与证明应归功于他：任何圆周都被直径平分；等腰三角形的底

角相等；两直线相交时，对顶角相等；若已知三角形的一边和两邻角，则此三角形完全确定；半圆周角是直角．据说，他曾用手杖的投影与金字塔的投影作比较的方法计算过金字塔的高度，也就是说他已经熟悉相似三角形的基本性质．关于三角形三内角之和的知识也要归功于他．他把几何学作为一门演绎科学确定下来了．

2．毕达哥拉斯学派的重要工作

毕达哥拉斯（Pythagoras．公元前 572—公元前 497）出生于小亚西亚半岛西边萨摩斯岛，是西方理论数学的创始人．毕达哥拉斯学派发展了数学命题的逻辑证明方法．

在几何方面，毕达哥拉斯学派证明了泰勒斯提出的“三角形的三内角之和等于两直角”的论断．毕达哥拉斯给出了三元数，即可作直角三角形三条边的三数组．例如，当 m、n（$m>n$）为任意整数时，$2mn$，m^2-n^2，m^2+n^2 构成毕达哥拉斯三元数．

比毕达哥拉斯定理还早的是我国的“勾股定理”，它是我国古代数学家商高（大约公元前 12 世纪）给出的．在《周髀算经》（公元前 157 年以前）卷上之一记载商高回答周公问时说：将一线段折三段围成直角三角形，“直角三角形，一直角边（勾）为三，另一直角边（股）为四，则斜边（弦）就是五……”．对一般的勾股定理在《周髀算经》卷上之二记载，在陈子（大约公元前 6 或 7 世纪的人）回答方荣问答时，陈子提出“欲求斜边长可用勾股各自乘，并而开方除之”的方法（这里“开方除之”即“开方”），这是勾股定理在我国的最早的一般形式的记载．从陈子算起，比毕达哥拉斯定理早一个世纪，从商高算起，比毕达哥拉斯定理早约 500 年．毕达哥拉斯对此定理的证明早已失传．

在数论方面，毕达哥拉斯学派对数形关系进行了研究．他们借助几何图形（或格点）来表示数称为形数．形数是联系算术和几何的纽带，体现了数形结合的思想．如

三角形数

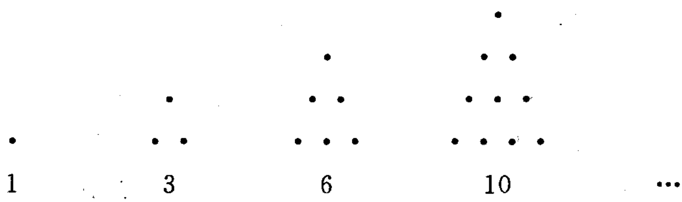

图 1.1

第 n 个三角形数为

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad （如图 1.1）$$

四角形数

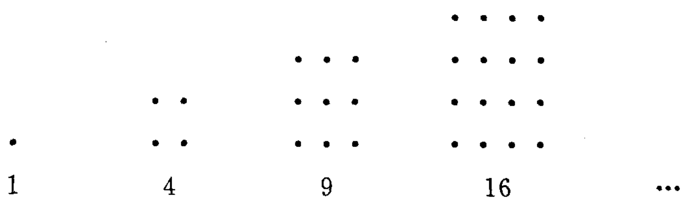

图 1.2

第 n 个四角形数为　　$n\times n=n^2$　（如图 1.2）

五角形数

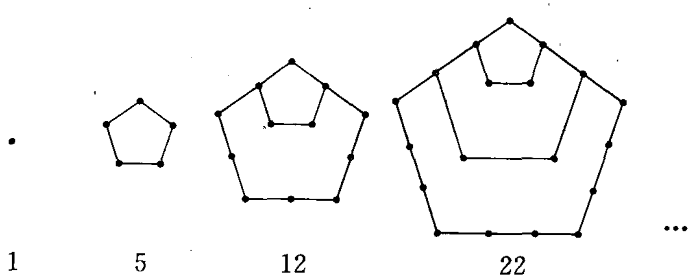

图 1.3

第 n 个五角形数为

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}(3n^2-n)\text{（如图 1.3）}$$

六角形数

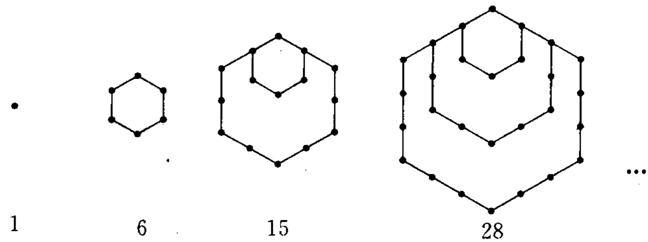

图 1.4

第 n 个六角形数为

$$n\times(2n-1)=2n^2-n\quad\text{（如图 1.4）}$$

在代数方面，毕达哥拉斯学派发现了二次方程式的“几何作图”的代数解法，创立了“比例论”.

毕达哥拉斯学派在数学上最卓越的贡献是发现了无理数. 毕达哥拉斯学派认为:“宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比”，他们把“万物皆数”做为最高信条. 他们认为任意线段的长度彼此是可通约的. 而毕达哥拉斯的学生希伯索斯（Hipposus）却发现边长为 1 的正方形的对角线并不能用整数比来表达（不能表达或没有比，被不恰当的译成“无理数”），出现了新数 $\sqrt{2}$. 由于希伯索斯的发现违背了毕达哥拉斯主流派的信条，据说他被投尸大海，葬身鱼腹. 无理数的发现引起了所谓数学史上的第一次危机. 毕达哥拉斯学派建立了无理数，扩大了数域，为数学的发展做出了贡献.

3. 尺规作图的三大不能问题

公元前 480 年，雅典成为地中海最大的商业及文化中心，形成了哲人学派（提倡学术自由辩论），他们在数学上研究的中心是“古典数学三大作图难题”. 以下三个问题仅限制在使用直尺和圆

规的条件下作图.

“三等分任意角”(将任意角分成为三等分).

“倍立方”(求作一立方体，使其体积是已知立方体的二倍).

“化圆为方”(求作一正方形，使其面积等于一已知圆).

上述三大难题自公元前 400 年左右提出来后，两千多年来以经久不息的魅力激励着数学家们去钻研，促进了数学的发展.

18 世纪，人们把几何作图问题，即对尺规作图的可能性的问题的研究，转化为一个代数方程的根能否通过对系数进行加减乘除和开方运算求出的问题. 1637 年法国数学家笛卡尔 (Descartes. 1596—1650) 首先提出倍立方问题不可能用尺规作出. 1837 年法国数学家万齐尔 (Waotzel. 1814—1848) 给出三等分任意角尺规作图不可能的证明. 1882 年德国数学家林德曼 (Lindemann. 1852—1939) 最后证明了化圆为方也不可能用尺规作图解决.

1895 年著名德国数学家克莱因 (F. Klein. 1849—1925) 总结了这方面的研究成果，给出了三大几何问题不可能解决的简单明晰的方法，彻底解决了两千多年来的悬案.

公元前 3 世纪雅典衰落，亚历山大城成为希腊的学术中心. 在这里汇集了西方和东方数学成就和思想，迎来了希腊数学的黄金时代.

这个时期有下边三位数学家做出了杰出的贡献.

4. 欧几里得几何《原本》的产生

希腊伟大的数学家欧几里得 (Euclid. 约公元前 330—公元前 275) 生于雅典. 他著的几何《原本》，是用公理法建立起来完整的数学演绎体系的最早的典范，是世间少有的鸿篇巨著. 他不仅创立了欧氏几何学，而且开创了古典数论的研究. 他采用了独特的编写方式，先给出了公理、公设、定义，然后给出一系列的命题的证明. 内容丰富，结构严谨，文字简练，概念清晰，判断准确，推理周密，论证有力.

《原本》共十三卷，131 个定义，5 个公设，5 个公理，465 个