XIN KE BIAO

一本全

高考数学

总复习全解与精练

主编　曹建华

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

新课标·一本全系列

高考数学总复习全解与精练

主　编　曹建华

编　写　曹建华　陈海兵　段长荣
干　蜓　侯　磊　黄　美
李　喆　李　嫣　刘　侠
刘亚丽　倪桓华　宋向平
郜昭东　涂　政　杨逸峰
于建芳　袁有雯

上海交通大学出版社

内 容 提 要

为了帮助广大高三学生更好地进行考前复习，我们组织了一批多年从事高三数学教学的骨干教师，结合自身的教学经验和研究心得，编写了这本全新视角的高考数学总复习用书，其内容紧扣上海版数学新教材，既注重夯实学生基础知识，又注重学生数学能力的培养。本书中的问题设计重视基础，强调能力立意，将近年来上海高考中出现的探索性问题、开放性问题、应用性问题等新题型渗透在各个章节中。而且本书还很好地兼顾了文理分科的不同要求，适合不同层次的学生选用。

全书分十四章，共四十九讲，在每一讲，我们设置了[知识梳理]、[典型例题]、[规律、方法、技巧总结]、[精练]四个栏目，既适合学生独立复习，也是教师教学的参考教案。每章末附有单元测试卷，便于学生检测复习水平。

图书在版编目(CIP)数据

高考数学总复习全解与精练/曹建华主编. —上海：上海交通大学出版社，2011

(新课标·一本全系列)

ISBN 978-7-313-07591-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曹… Ⅲ.①中学数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 141438 号

高考数学总复习全解与精练

曹建华 主 编

上海交通大学 出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话：64071208 出版人：韩建民

浙江云广印业有限公司印刷 全国新华书店经销

开本：787 mm×1092 mm 1/16 印张：23.75 字数：756 千字

2011 年 7 月第 1 版 2011 年 7 月第 1 次印刷

印数：1～5100

ISBN 978-7-313-07591-8/G 定价：48.00 元

前 言

高考是为普通高校招生而进行的一次选拔考试，它的指导思想是既有利于高校选拔人才，又有利于推动中学教学改革。

为了帮助广大高三学生更好地进行考前复习，我们组织了一批多年从事高三数学教学的骨干教师，结合自身的教学经验和研究心得，编写了这本全新视角的《高考数学总复习全解与精练》，其内容紧扣上海版数学新教材，既注重夯实学生基础知识，又注重学生数学能力的培养。本书中的问题设计重视基础，强调能力立意，将近年来上海高考中出现的探索性问题、开放性问题、应用性问题等新题型渗透在各个章节中。而且本书还很好地兼顾了文理分科的不同要求，适合不同层次的学生选用。

全书分十四章，共四十九讲，在每一讲，我们设置了[知识梳理]、[典型例题]、[规律、方法、技巧总结]、[精练]四个栏目，既适合学生独立复习，也是教师教学的参考教案。每章末附有单元测试卷，便于学生检测复习水平。

欢迎使用本书的读者提出宝贵的意见，使本书更具有科学性、实用性、指导性，使它能够跟踪指引你的复习进程，成为你的良师益友。

本书编写中得到了上海交通大学附属中学领导和老师的关心、支持和帮助，特此鸣谢！

编 者

2011 年 8 月

目　录

目 录

目　录

第一章　集合、命题与条件

第1讲　集　　合

知识梳理

(1) 把某些能确切指定的对象看作一个整体，这个整体叫做一个集合，简称集. 集合中的各个对象叫做这个集合的元素.

对于两个集合 A 与 B，如果 A 的任何一个元素都属于 B（即如果 $a \in A$，那么 $a \in B$），那么就把 A 叫做 B 的子集. 记作 $A \subseteq B$（或 $B \supseteq A$）. 读作“A 包含于 B”（或“B 包含 A”）.

空集：一个不含任何元素的集合，称之为空集. 记作 $\varnothing$.

(2) 集合元素具有的三大特征是：确定性、互异性、无序性.

(3) 集合表示法：列举法、描述法、图示法.

(4) 集合分类：有限集、无限集.

(5) 集合的运算：交集、并集、补集.

(6) 自然数集、整数集、有理数集、实数集分别记为 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$. $\mathbf{R}^+$ 表示正实数集，$\mathbf{Q}^-$ 表示负有理数集等.

(7) n 元集合子集的个数为 2^n 个.

(8) $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$; $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

典型例题

1. **集合概念**

例 1　(1) 用适当符号填空：0 ________ $\{0, 1\}$；$\{a, b\}$ ________ $\{b, a\}$；0 ________ $\varnothing$；$\{3+\sqrt{17}\}$ ________ $\{x \mid x > 6+\sqrt{3}\}$；$\{a, b\}$ ________ $\{x \mid x \subseteq \{a, b\}\}$.

(2) 用列举法表示 $\{y \mid y = x^2 - 1, \mid x \mid \leqslant 2, x \in \mathbf{Z}\} =$ ________.

$\{(x, y) \mid y = x^2 - 1, \mid x \mid \leqslant 2, x \in \mathbf{Z}\} =$ ________.

目标： 本题主要考查集合的基本概念.

提示： (1)判断是元素与集合的关系，还是集合与集合的关系；(2)看清楚代表元素是什么，及代表元素满足什么性质.

解： (1) $0 \in \{0, 1\}$，$\{a, b\} = \{b, a\}$，$0 \notin \varnothing$，$\{3+\sqrt{17}\} \not\subseteq \{x \mid x > 6+\sqrt{3}\}$，$\{a, b\} \in \{x \mid x \subseteq \{a, b\}\}$；

(2) $\{y \mid y = x^2 - 1, \mid x \mid \leqslant 2, x \in \mathbf{Z}\} = \{-1, 0, 3\}$；

$\{(x, y) \mid y = x^2 - 1, \mid x \mid \leqslant 2, x \in \mathbf{Z}\} = \{(0, -1), (1, 0), (-1, 0), (2, 3), (-2, 3)\}$.

注意： (2)中性质一样，但代表元素不一样，那么所产生的集合就不一样.

例 2　(1) 已知集合 $A = \left\{x \,\middle|\, x = \sin\dfrac{n\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}\right\}$，则 A 的子集有________个.

(2) 满足 $\{a, b\} \subseteq M \subseteq \{a, b, c, d\}$ 的所有集合 M 的个数是　　(　　)

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 4

目标： 本题主要考查子集的概念.

提示： (1) x 为函数 $x = \sin\dfrac{n\pi}{3}$ $(n \in \mathbf{Z})$ 的值域，可以考虑一个周期内 n 取整数时的函数值，即 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 时函数值；(2)由条件知 M 中必包含 a，b，且其余元素只能取 c，d，所以可以认为 M 为 $\{c, d\}$ 的

子集.

解: (1) $A=\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$,所以 A 的子集有 8 个;

(2) 满足条件的 $M=\{a, b\}$, $M=\{a, b, c\}$, $M=\{a, b, d\}$, $M=\{a, b, c, d\}$,所以选 D.

注意: 要知道有 n 个元素的集合的子集个数有 2^n 个.

例 3 (1) 设集合 $A=\{y \mid y=x^2-6x+8\}$, $B=\{y \mid y=-x^2-6x+1\}$,则 $A\cap B=$ ________;

(2) 设集合 $A=\{x \mid x=y^2-6y+8\}$, $B=\{x \mid y=-x^2-6x+1\}$,则 $A\cap B=$ ________;

(3) $A=\{(x, y) \mid y=x^2-6x+8\}$, $B=\{(x, y) \mid y=-x^2-6x+1\}$,则 $A\cap B=$ ________.

目标: 本题主要考查集合的列举法的概念.

提示: (1)A、B 为相应函数的值域;(2)A 为后面函数的值域,而 B 为后面函数的定义域;(3)A、B 为后面方程的解.

解: (1) $A=\{y \mid y\geqslant -1\}$, $B=\{y \mid y\leqslant 10\}$,所以 $A\cap B=\{y \mid -1\leqslant y\leqslant 10\}$;

(2) $A=\{x \mid x\geqslant -1\}$, $B=\{x \mid x\in \mathbf{R}\}$,所以 $A\cap B=\{x \mid x\geqslant -1\}$;

(3) $A=\{(x, y) \mid y=x^2-6x+8\}$, $B=\{(x, y) \mid y=-x^2-6x+1\}$

$\begin{cases} y=x^2-6x+8 & (1) \\ y=-x^2-6x+1 & (2) \end{cases}$ (1) 代入(2) 有 $2x^2=-7$,所以方程组无解,所以 $A\cap B=\varnothing$.

注意: 要理解集合的描述法的含义,即代表元素的形式.

例 4 集合 $M=\{1, 2, \cdots, 2\,008\}$,若 $X\subseteq M$, $X\neq\varnothing$, a_x 为 X 中最大数与最小数的和(若集合 X 中只有一个元素,则此元素既为最大数,又为最小数),那么,对 M 的所有非空子集,全部 a_x 的平均值为________.

目标: 本题主要考查集合的拆分.

提示: 直接算比较麻烦,M 有 $2^{2\,008}-1$ 个满足条件的子集,既然求每个集合最大值与最小值的和,就构造两个集合的对应,对应法则是使得两个集合最大值与最小值对应.

解: 定义 $\min(M)$ 为集合 M 中最小元素,$\max(M)$ 为集合 M 中最大元素,将集合 M 的 $2^{2\,008}$ 个子集分成 $2^{2\,007}$ 组,其中去掉$\varnothing$,全集为一组,假设 M_1 与 N_1 为一组,配对原则为:任取 $x\in M_1$,都有$(2\,009-x)\in N_1$. 则 $\max(M_1)+\min(N_1)=2\,009$, $\min(M_1)+\max(N_1)=2\,009$,所以$(\max(M_1)+\min(N_1)+\min(M_1)+\max(N_1))/2=2\,009$,全集的 $a_x=2\,009$,所以全部 a_x 的平均值为 $2\,009$.

注意: 构造集合的对应的技巧是解本题的关键.

2. **集合的运算**

例 5 设 A, B 是非空集合,定义: $A\times B=\{x \mid x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B\}$. 已知 $A=\{x \mid y=\sqrt{2x-x^2}\}$, $B=\{x \mid x=2^y(y>0)\}$,则 $A\times B$ 等于 ( )

A. $[0, 1]\cup(2, +\infty)$　　B. $[0, 1)\cup(2, +\infty)$

C. $[0, 1]$　　D. $[0, 2]$

目标: 在集合与函数的准备知识的基础上,给出新的定义,主要培养学生的学习能力.

提示: 由定义知需先求出集合 A, B,显然集合 A 为对应函数的定义域,集合 B 为对应函数的值域,再由 $A\times B$ 的定义来求其运算结果.

解: $A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x \mid x>1\}$, $A\cup B=\{x \mid x\geqslant 0\}$, $A\cap B=\{x \mid 1<x\leqslant 2\}$,所以 $A\times B=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x>2\}$,所以选 A.

注意: 要正确理解题目定义中 $A\times B$ 的含义.

例 6 设集合 $A=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 6\}$, $B=\{x \mid m-1\leqslant x\leqslant 2m+1\}$,已知 $B\subseteq A$,求:

(1) 实数 m 的取值范围;

(2) 当 $A\subsetneqq \mathbf{Z}$ 时,求 A 的子集个数.

目标: 主要考查子集的概念.

提示: $B\subseteq A$,首先考虑 B 为 $\varnothing$,此时 $m-1\leqslant x\leqslant 2m+1$ 无解,即 $m-1>2m+1$.

B 不为 $\varnothing$ 时 $m-1\leqslant 2m+1$,再由 B 包含于 A 得到对应端点的位置关系.

解: (1) 当 $m-1>2m+1$ 即 $m<-2$ 时, $B=\varnothing$, 满足 $B\subseteq A$; 当 $\begin{cases}m-1\leqslant 2m+1,\\ m-1\geqslant -1,\\ 2m+1\leqslant 6,\end{cases}$ 即 $0\leqslant m\leqslant \dfrac{5}{2}$ 时, 也满足 $B\subseteq A$, 所以, $0\leqslant m\leqslant \dfrac{5}{2}$ 或 $m<-2$.

(2) 当 $A\subsetneqq \mathbf{Z}$ 时, $A=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, 此时 A 的子集个数为 $2^8=256$ 个.

例 7 集合 $A=\{x\mid x^2-(m+3)x+2(m+1)=0,\ m\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid 2x^2+(3n+1)x+2=0,\ n\in\mathbf{R}\}$,

(1) 若 $A\cap B=A$, 求 m, n 的值;

(2) 若 $A\cup B=A$, 求 m, n 的值.

目标: 主要考查集合运算性质的应用.

提示: 依据 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$, $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$ 两个性质依次由两个集合的包含关系, 进一步考虑集合 A, B 的情况.

解: (1) 若 $A\cap B=A$, 则 $A\subseteq B$. $\because$ $x^2-(m+3)x+2(m+1)=0$, $\therefore$ $x=2$ 或 $x=m+1$, 即 $2\in A$, $\because$ $A\subseteq B$ $\therefore$ $2\in B$, $\therefore$ $2\times 2^2+(3n+1)\times 2+2=0$, $\therefore$ $n=-2$, 由 $2x^2-5x+2=0$, 可得 $x=2$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$, 所以 $B=\left\{2,\ \dfrac{1}{2}\right\}$. 由 $A\subseteq B$, 则 $m+1=2$ 或 $m+1=\dfrac{1}{2}$, 即 $m=1$ 或 $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=-2$.

(2) 若 $A\cup B=A$, 则 $B\subseteq A$. A 中方程有 2, $m+1$ 两根,

① 当 $B=\varnothing$ 时, $B\subseteq A$, 此时 $\Delta=(3n+1)^2-16<0$, 即 $-\dfrac{5}{3}<n<1$, 此时 $m\in\mathbf{R}$.

② 当 B 为单元集时, $\Delta=0$, 即 $n=1$ 或 $n=-\dfrac{5}{3}$, 当 $n=1$ 时, 由 $2x^2+4x+2=0$, 得 $B=\{-1\}$, 由 $B\subseteq A$ 有 $-1\in A$, 即 $-1=m+1$, $m=-2$; 当 $n=-\dfrac{5}{3}$ 时, 由 $2x^2-4x+2=0$, 得 $B=\{1\}$, 由 $B\subseteq A$ 有 $1\in A$, 即 $1=m+1$, $m=0$.

③ 当 B 为二元集时, $\Delta>0$, 即 $n>1$ 或 $n<-\dfrac{5}{3}$, $B=A=\{2,\ m+1\}$,

即 $\begin{cases}2+m+1=-\dfrac{3n+1}{2},\\ 2(m+1)=1.\end{cases}$ 可得 $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=-2$.

综上 $\begin{cases}m=-\dfrac{1}{2}\\ n=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-2\\ n=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=0\\ n=-\dfrac{5}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\dfrac{5}{3}<n<1,\\ m\in\mathbf{R}.\end{cases}$

注意: 确定 $A\cap B=A$ 与 $A\cup B=A$ 的实质含义.

例 8 设集合 $A=\{(x,\ y)\mid y=2x-1,\ x\in\mathbf{N}^*\}$, $B=\{(x,\ y)\mid y=ax^2-ax+a,\ x\in\mathbf{N}^*\}$, 问是否存在非零整数 a, 使 $A\cap B\neq\varnothing$? 若存在, 请求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

目标: 主要考查交集的概念.

提示: 集合 A, B 是所对应方程的解, 若两集合交集非空则联立方程组应有解, 因此联立方程组后 $\Delta\geqslant 0$, 从而确定 a 的范围, 再由 a 为整数确定 a 的具体值, 这样方程组就可以求解了, 若求得的解为自然数即可, 否则不存在.

解: 假设存在, 则 $\begin{cases}y=2x-1 & (1)\\ y=ax^2-ax+a & (2)\end{cases}$ (1) 代入(2), $ax^2-(a+2)x+a+1=0$, $\Delta=(a+2)^2-4a(a+1)\geqslant 0$, 即 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant a\leqslant \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 由 a 为非零整数有 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时, 由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1$ 或 $x=2$, 满足 $A\cap B\neq\varnothing$;

当 $a=-1$ 时, 由 $-x^2-x=0$ 得 $x=0$ 或 $x=-1$, $\because$ $0,\ -1\notin\mathbf{N}^*$, $\therefore$ $a\neq -1$.

综上所述, 存在 $a=1$ 使得 $A\cap B\neq\varnothing$.

注意: 可以利用数形结合, 问题实质为直线与抛物线有交点的问题.

例 9 设 $f(x)=x^2+px+q$, $A=\{x \mid f(x)=x,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid f(x-1)=x+1,\ x\in\mathbf{R}\}$, $C=\{x \mid f(f(x))=x,\ x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 如果 $A=\{2\}$,求 B;

(2) 证明 A 是 C 的子集.

目标: 主要考查集合的互异性.

提示: 由 $A=\{2\}$ 可得一元二次方程 $f(x)=x$ 有两相等的根 2,从而由韦达定理确定 p,q 的值,p,q 值确定了集合 B 所对应的方程就可以求解了;由子集的定义得 A 中的任意元素都为 C 中的元素,即只需证 A 中元素满足 C 中的方程,由 A 中元素满足的性质进行推理即得证.

解: (1) $\because A=\{x \mid x^2+(p-1)x+q=0,\ x\in\mathbf{R}\}=\{2\}$, $\therefore \begin{cases}2+2=1-p\\ 2\times 2=q\end{cases}$, $\therefore p=-3, q=4$, $\therefore f(x-1)=(x-1)^2-3(x-1)+4=x^2-5x+8$,由于 $f(x-1)=x+1$,则 $x^2-6x+7=0$,解得 $x=3\pm\sqrt{2}$, $\therefore B=\{3+\sqrt{2},\ 3-\sqrt{2}\}$.

(2) 任取 $x\in A$,则 $f(x)=x$, $\therefore f(f(x))=f(x)=x$, $\therefore x\in C$, $\therefore A\subseteq C$.

注意: 要确切理解一元二次方程的根与系数的关系.

例 10 设集合 $S\subsetneqq\mathbf{N}^*$, $S\neq\varnothing$,且满足下面两个条件:① $1\notin S$; ②若 $x\in S$,则 $2+\dfrac{12}{x-2}\in S$.

(1) S 能否为单元素集合,为什么?

(2) 求出只含有两个元素的集合 S;

(3) 满足题设条件的集合 S 共有几个?为什么?能否列出来?

目标: 主要考查子集的相关知识.

提示: (1)假设可以为单元集,由"若 $x\in S$,则 $2+\dfrac{12}{x-2}\in S$"得 x 与 $2+\dfrac{12}{x-2}$ 相等,解出值满足条件即可为单元集,否则不可以;(2)由"若 $x\in S$,则 $2+\dfrac{12}{x-2}\in S$"得集合 S 中元素无限产生,若为二元集,则将 $2+\dfrac{12}{x-2}$ 代入 $2+\dfrac{12}{x-2}$ 中的 x 产生值应为 x,这样才能使得集合中元素循环产生,只有两个元素;(3)由于 $S\subsetneqq\mathbf{N}^*$,则 x, $2+\dfrac{12}{x-2}$ 均为自然数,所以 $x-2$ 为 12 的因数,从而分析出 x 的具体取值,同(2)会有成对出现的 x,从而解决问题.

解: (1) 若 S 为单元集,则 $x=2+\dfrac{12}{x-2}$,即 $(x-2)^2=12$, $x\notin\mathbf{N}^*$,所以 $x\notin S$,所以 S 不能为单元集.

(2) 由 $x\in S$, $2+\dfrac{12}{x-2}\in S$,可知 x, $2+\dfrac{12}{x-2}$ 均属于 $\mathbf{N}^*$,所以 $x=3, 4, 5, 6, 8, 14$, $\therefore$ 二元集 $S=\{3, 14\}$, $\{4, 8\}$, $\{5, 6\}$.

(3) 满足条件的 S 有 7 个,除第(2)小题中求出的 3 个以外还有 $\{3, 14, 4, 8\}$, $\{3, 14, 5, 6\}$, $\{4, 8, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5, 6, 8, 14\}$.

注意: 要正确理解题目的条件.

规律、方法、技巧总结

学习集合这一章,关键在搞清集合中元素的构成,并且注意元素互异性在集合中的应用,解决集合常见的思想方法是利用集合中元素满足的条件进行解题,另外还要注意集合一些运算性质在具体问题中的应用.

精练

一、填空题

1. 满足 $M\subsetneqq\{0, 1, 2\}$ 的集合共有________个.

2. 定义 $M-N=\{x \mid x\in M,\ 且\ x\notin N\}$,若 $M=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $N=\{2, 3, 5\}$,则 $M-N=$________.

3. 设集合 $M=\{-1, 0, 1\}$, $N=\{a, a^2\}$,则使 $M\cup N=M$ 成立的 a 的值________.

4. 已知集合 $A=\{x \mid x^2+(p-1)x+4=0\}$ 中只有一个元素 2,则实数 $p=$ ________.

5. 若 $a>0$,要使不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 的解集不是空集,则 a 的取值范围是________.

6. 若不等式 $x^2-ax+1\leqslant 0$ 和 $ax^2+x-1>0$ 均不成立,则 a 的取值范围是________.

7. 已知 $U=\{(x, y) \mid x, y\in\mathbf{R}\}$, $A=\left\{(x, y)\,\middle|\,\dfrac{y-4}{x-2}=3\right\}$, $B=\{(x, y) \mid y=3x-2\}$,则 $\complement_U A\cap B=$ ________.

8. 集合 $M=\{x \mid x=12m+8n+4l(m, n, l\in\mathbf{Z})\}$ 与 $N=\{x \mid x=20p+16q+12r(p, q, r\in\mathbf{Z})\}$ 的关系是________.

二、选择题

9. 已知集合 $P=\{0, m\}$, $Q=\{x \mid 2x^2-5x<0, x\in\mathbf{Z}\}$,若 $P\cap Q\neq\varnothing$,则 m 等于 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 1 或 $\dfrac{5}{2}$　　D. 1 或 2

10. 已知集合 $A=\{x \mid x=6k, k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x \mid x=3k+1, k\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{x \mid x=9k+1, k\in\mathbf{Z}\}$, $a\in A$, $b\in B$,则 ( )

A. $a+b\in A$　　B. $a+b\in B$　　C. $a+b\in C$　　D. $a+b\in(A\cap B\cap C)$

11. 若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$,则 $a-b=$ ( )

A. -10　　B. -14　　C. 10　　D. 14

12. 若直线 $y=kx+1$ 与曲线 $x=\sqrt{y^2+1}$ 有两个不同的交点,则 k 的取值所构成的集合 ( )

A. $\{k \mid -\sqrt{2}<k<-1\}$　　B. $\{k \mid -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}\}$

C. $\{k \mid 1<k<\sqrt{2}\}$　　D. $\{k \mid k<-\sqrt{2}$ 或 $k>\sqrt{2}\}$

三、解答题

13. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-2x-3>0\}$, $B=\{x \mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$,且 $A\cup B=\mathbf{R}$, $A\cap B=\{x \mid 3<x\leqslant 4\}$,求 a, b 的值.

14. 已知集合 $A=\{2, 4, 6, 8, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 5, 8\}$,又知非空集合 C 是这样一个集合:各元素都加 2 后,就变为 A 的一个子集;若各元素都减 2 后则变为 B 的一个子集,求集合 C.

15. 若 $A=\{x \mid |x^2-2x|\leqslant x\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\left|\dfrac{x}{1-x}\right|\leqslant\dfrac{x}{1-x}\right\}$, $C=\{x \mid ax^2+x+b<0\}$,若 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$, $(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$,求实数 a, b 的值.

16. 对于函数 $f(x)$,若 $f(x)=x$,则称 x 为 $f(x)$ 的"不动点";若 $f[f(x)]=x$,则称 x 为 $f(x)$ 的"稳定点",函数 $f(x)$ 的"不动点"和"稳定点"的集合分别记为 A 和 B,即 $A=\{x \mid f(x)=x\}$, $B=\{x \mid f[f(x)]=x\}$.

(1) 求证: $A\subseteq B$;

(2) 若 $f(x)=ax^2-1(a\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R})$,且 $A=B\neq\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

17. 已知集合 $A=\{x \mid x>1\}$, $B=\left\{y \,\middle|\, y=\lg\frac{2}{x+1},\ x\in A\right\}$, $C=\left\{z \,\middle|\, z=\frac{m^2x-1}{mx+1},\ x\in A\right\}$,若 $C\cap B=C$,求实数 m 的取值范围.

18. 设 $A=\{(x, y) \mid y^2=x+1\}$, $B=\{(x, y) \mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$, $C=\{(x, y) \mid y=kx+b\}$,问是否存在自然数 k, b,使$(A\cup B)\cap C=\varnothing$,试证明你的结论.

第2讲　命题与条件

知识梳理

(1) 命题:判断真假的语句(命题通常用陈述句表示).正确的命题叫做真命题;错误的命题叫做假命题.

(2) 一般的,命题都有这四种形式:

原命题:如果 α,那么 β.　逆命题:如果 β,那么 α.

否命题:如果 $\bar{\alpha}$,那么 $\bar{\beta}$.　逆否命题:如果 $\bar{\beta}$,那么 $\bar{\alpha}$.

(3) 可以互相推出的两个命题叫等价命题.显然,互为逆否命题的两个命题为等价命题.

(4) 一般的,用 α, β 表示两件事,如果 $\alpha\Rightarrow\beta$(即 α 成立能推出 β 也成立),那么 α 叫做 β 的充分条件.如果 $\beta\Rightarrow\alpha$(即 β 成立能推出 α 也成立),那么 α 叫做 β 的必要条件.(必要条件顾名思义就是:"没有 α 就一定没有 β",即"$\bar{\alpha}\Rightarrow\bar{\beta}$",由原命题与逆否命是真同假知:"$\bar{\alpha}\Rightarrow\bar{\beta}$"$\Leftrightarrow$"$\beta\Rightarrow\alpha$")如果 $\alpha\Rightarrow\beta$ 且 $\beta\Rightarrow\alpha$,即 $\alpha\Leftrightarrow\beta$,则 α 叫做 β 的充分必要条件.

(5) 关于否定的对应:"等于"对应"不等于";"是"对应"不是";"都是"对应"不都是"或"至少有一个不是";"都不是"对应"至少有一个是".

典型例题

1. 命题

例1　下列结论正确的是　(　　)

A. 当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时,$\lg x+\frac{1}{\lg x}\geqslant2$　　B. 当 $x>0$ 时,$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geqslant2$

C. 当 $x\geqslant2$ 时,$x+\frac{1}{x}$ 的最小值是 2　　D. 当 $0<x\leqslant2$ 时,$x-\frac{1}{x}$ 无最大值

目标: 主要考查结合不等式相关知识判断命题的正误.

提示: A, B, C 三选项全是考察基本不等式,要注意不等式左边两项的范围,结合 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图像解决问题;D 仍结合 $y=x-\frac{1}{x}$ 的图像,考虑 $0<x\leqslant2$ 时函数值的取值范围.

解: $\because x>0$, $x\neq1$, $\therefore \lg x>0$ 或 $\lg x<0$,不能推出 $\lg x+\frac{1}{\lg x}\geqslant2$, $\therefore$ A 错;B 等价于课本中"两个正数的算术平均数大于等于其几何平均数",$\therefore$ B 正确;C 中 $x+\frac{1}{x}$ 的最小值为 $2\frac{1}{2}$;D 中 $x-\frac{1}{x}$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$.综上所述,选 B.

注意：基本不等式成立的条件.

例 2 设有两个命题：

① 关于 x 的不等式 $x^2+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立；

② $f(x)=-(5-2a)^x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上单调递减.

若命题①②中有且只有一个是真命题，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-2,2)$ B. $(-\infty,2)$ C. $[-2,+\infty)$ D. $(-\infty,-2]$

目标：考查等价命题的应用.

提示：①等价于函数 $y=x^2+2ax+4$ 的图像恒在 x 轴上方，由于函数开口向上，即 $x^2+2ax+4=0$ 无解，$\Delta<0$；②问题等价于 $f(x)=(5-2a)^x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上单调递增.

解：①正确有 $\Delta=4a^2-16<0$，即 $-2<a<2$；②正确有 $5-2a>1$，即 $a<2$. 只有一个正确有①正确②错误或①错误②正确，①正确且②错误无解，①错误②正确可得 $a\leqslant-2$，综上所述，$a\leqslant-2$，所以选 D.

注意：正确理解二次函数与指数函数的性质.

例 3 已知 $f(1,1)=1$，$f(m,n)\in\mathbf{N}^*(m,n\in\mathbf{N}^*)$，且对任何 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 都有：

① $f(m,n+1)=f(m,n)+2$；② $f(m+1,n)=2f(m,n)$，给出以下三个结论：

(1) $f(1,5)=9$；(2) $f(5,1)=16$；(3) $f(5,6)=26$. 其中正确的个数为 ( )

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

目标：结合给出的新定义判断命题的真假.

提示：观察 $f(m,n+1)=f(m,n)+2$，随着 $f(m,n)$ 的 n 增加 1，其值增加 2，可以类比等差数列；$f(m+1,n)=2f(m,n)$，随着 $f(m,n)$ 的 m 增加 1，其值变为原来 2 倍，可以类比等比数列，利用数列的思想方法可以解决相应问题.

解：由题意有 $f(m,n)=f(m,1)+2\times(n-1)$，$f(m,n)=f(1,n)\times2^{m-1}$，所以 $f(1,5)=f(1,1)+4\times2=9$，

$f(5,1)=f(1,1)\times2^4=16$，$f(5,6)=f(5,5)+2=f(5,1)+4\times2+2=26$，所以选 A.

注意：正确理解开放性题目的条件的含义.

例 4 (1) 试判断命题"一次函数 $f(x)=kx+h\ (k\neq0)$，若 $m<n$，$f(m)>0$，$f(n)>0$，则对任意 $x\in(m,n)$ 都有 $f(x)>0$"是真命题还是假命题?并说明理由；

(2) 利用(1)小题结论，试判断命题"若 a,b,c 均为实数，且 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，则 $ab+bc+ca>-1$"是真命题还是假命题?并说明理由.

目标：考查与函数有关的命题.

提示：(1) 已知"$f(m)>0$，$f(n)>0$"，所以判断"当 $x\in(m,n)$ 时 $f(x)$ 的正负"可比较 $f(x)$ 与 $f(m)$ 和 $f(n)$ 的大小关系，通过比差法判断 $f(x)-f(m)$ 与 $f(x)-f(n)$ 的符号；类比(1)，(2)中可构造一次函数，$ab+bc+ca>-1$ 等价于 $ab+bc+ca+1>0$，由于 $ab+bc+ca+1>0$ 中 a,b,c 的位置是对称的所以可以以任意字母为自变量，令 $f(b)=(a+c)b+ac+1$，即构造函数 $f(x)=(a+c)x+ac+1$，然后利用(1)的结论来证明.

解：(1) 真命题. 设 $x\in(m,n)$，

当 $k>0$ 时，$f(x)-f(m)=kx+h-km-h=k(x-m)>0$，$\therefore f(x)>f(m)>0$，$\therefore f(x)>0$；

当 $k<0$ 时，$f(x)-f(n)=kx+h-kn-h=k(x-n)>0$，$\therefore f(x)>f(n)>0$，$\therefore f(x)>0$.

(2) $ab+ac+bc>-1$ 即为 $ab+ac+bc+1>0$，令 $f(x)=(a+c)x+ac+1$，

$f(1)=a+c+ac+1=(1+c)(1+a)$，$\because |a|<1$，$|c|<1$，$\therefore f(1)>0$，

$f(-1)=-a-c+ac+1=(1-a)(1-c)$，$\because |a|<1$，$|c|<1$，$\therefore f(-1)>0$，而 $|b|<1$，$\therefore f(b)=ab+bc+ac+1>0$，$\therefore$ 命题为真命题.

注意：正确理解一次函数的性质.

2. 条件

例 5 命题 A：两曲线 $F(x,y)=0$ 和 $G(x,y)=0$ 相交于点 $P(x_0,y_0)$，命题 B：曲线 $F(x,y)+\lambda G(x,y)=0$（λ 为常数）过点 $P(x_0,y_0)$，则 A 是 B 的________.

目标： 考查充分条件与必要条件定义的应用.

提示： 命题 A 说明 $F(x_0, y_0)=0, G(x_0, y_0)=0$，命题 B 说明 $F(x_0, y_0)+\lambda G(x_0, y_0)=0$，然后再看两个命题是否可以互推.

解： 由命题 A 有 $F(x_0, y_0)=0, G(x_0, y_0)=0$，$\therefore F(x_0, y_0)+\lambda G(x_0, y_0)=0$，曲线 $F(x, y)+\lambda G(x, y)=0$ 过 $P(x_0, y_0)$，即 $A\Rightarrow B$，由命题 B 有 $F(x_0, y_0)+\lambda G(x_0, y_0)=0$，当 $\lambda=0$ 时，$G(x_0, y_0)$ 不一定为 0，$\therefore B\not\Rightarrow A$，$\therefore A$ 是 B 的充分非必要条件.

注意： 正确理解方程与曲线的关系.

例 6 函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在反函数的充分必要条件是 ( )

A. $a\in(-\infty, 1]$ B. $a\in[2, +\infty)$

C. $a\in[1, 2]$ D. $a\in(-\infty, 1]\cup[2, +\infty)$

目标： 考查充分条件与必要条件的理解与应用.

提示： 存在反函数必须为一一映射，所以 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[1, 2]$ 为一一映射，即 $[1, 2]$ 为函数 $f(x)$ 的单调区间.

解： $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在反函数，则 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是单调的，即当 $a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是单调的，$f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上存在反函数，所以选 D.

注意： 确切理解存在反函数的函数在定义域区间是一一映射的.

例 7 判断命题甲是命题乙的什么条件，并说明理由(填入充分非必要条件、必要非充分条件、充要条件、既非充分又非必要条件).

(1) 甲：集合 $A=B$， 乙：$A\cap C=B\cap C$；

(2) 甲：$x_1>3, x_2>3$， 乙：$x_1+x_2>6, x_1x_2>9$；

(3) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 R，

甲：$f(x)$、$g(x)$ 都是奇函数， 乙：$f(x)$ 和 $g(x)$ 的积是偶函数；

(4) 设有集合 $M=\{(x, y)\mid x^2+y^2<2\}$，$N=\{(x, y)\mid |x|<\sqrt{2}, |y|<\sqrt{2}\}$，

甲：点 $P\in M$， 乙：点 $P\in N$；

(5) 已知 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ 是各项大于零的数列，

甲：$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ 是公比不为 1 的等比数列，

乙：$a_1+a_8>a_4+a_5$.

目标： 结合数学相关知识来判断推出关系.

提示： (2)根据不等式的性质甲可以推出乙，反之没有对应不等式性质可以推出，就尽量举满足乙而不满足甲的数；(4)M, N 的代表元素为有序实数对，所以可以看其在坐标系内的图像，然后由图像看其包含关系，从而确定是否可以互推；(5)比较 a_1+a_8 与 a_4+a_5 的大小可以比差，由甲显然可以对比差后的式子因式分解，然后可以比较大小，从而确定甲是否可以推出乙，反之若数列不确定，由乙显然推不出甲.

解： (1)充分非必要；(2)充分非必要；(3)充分非必要；(4)充分非必要；(5)由甲设数列公比为 q，则 $a_1+a_8-a_4-a_5=a_1(1-q^3)(1-q^4)>0$，$\therefore$ 甲 $\Rightarrow$ 乙，反过来取 $a_1=1, a_8=5, a_4=2, a_5=3$，乙 $\not\Rightarrow$ 甲，所以甲为乙的充分非必要条件.

注意： 正确判断命题的推出关系.

例 8 写出 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-a$ 为奇函数的充要条件.

目标： 充要条件在函数中的应用.

提示： 函数为奇函数等价于"$f(-x)=-f(x)$ 对定义域内任意 x 均成立"即等价于"$f(-x)+f(x)=0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 均成立"，然后由等式恒成立确定 a 的取值.

解： $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)$ 为奇函数的充要条件是 $f(-x)+f(x)=0$，即 $\dfrac{1}{2^x+1}-a+\dfrac{1}{2^{-x}+1}-a=\dfrac{1}{2^x+1}+\dfrac{2^x}{2^x+1}-2a=1-2a=0$，$a=\dfrac{1}{2}$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-a$ 为奇函数的充要条件.

注意： $y=f(x)$ 为奇函数的充要条件 $f(-x)+f(x)=0$.

例 9 已知关于 x 的一元二次方程

$$mx^2-4x+4=0, \quad ①$$

$$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0. \quad ②$$

求使方程①②都有实根的充要条件.

目标: 考查充要条件在方程中的应用.

提示: 分别求出每个一元二次方程有实根 m 的取值范围,"方程①②都有实根"即求对应 m 的取值范围的交集.

解: 方程①有实数根的充要条件是 $m\neq 0$, $\Delta_1=(-4)^2-16m\geqslant 0$,即 $m\leqslant 1$ 且 $m\neq 0$;方程②有实数根的充要条件是 $\Delta_2=(4m)^2-4(4m^2-4m-5)\geqslant 0$,即 $m\geqslant -\frac{5}{4}$. $\therefore$ 方程①②都有实数根的充要条件是 $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$ 且 $m\neq 0$.

注意: 二次方程有实根的充要条件.

例 10 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=p^n+q(p\neq 0$ 且 $p\neq 1)$,求数列$\{a_n\}$成等比数列的充要条件.

目标: 考查充要条件在数列中的应用.

提示: 先求出数列$\{a_n\}$的通项,然后使其满足等比数列的定义,从而确定字母 p, q 满足的条件.

解: 当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=p+q$;当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(p-1)p^{n-1}$.

由于 $p\neq 0$, $p\neq 1$, $\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时,$\{a_n\}$是等比数列. 要使$\{a_n\}(n\in \mathbf{N}^*)$是等比数列,则$\frac{a_2}{a_1}=p$,即 $(p-1)p=p(p+q)$, $\therefore q=-1$,即$\{a_n\}$是等比数列的必要条件是 $p\neq 0$,且 $p\neq 1$,且 $q=-1$.

再证充分性:

当 $p\neq 0$ 且 $p\neq 1$ 且 $q=-1$ 时,$S_n=p^n-1$, $a_n=(p-1)p^{n-1}$, $\frac{a_n}{a_{n-1}}=p\ (n\geqslant 2)$,

$\therefore$ $\{a_n\}$是等比数列.

注意: 由 S_n 求 a_n 的具体求法:$a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1} & n\geqslant 2\\ S_1 & n=1\end{cases}$.

例 11 试求关于 x 的方程 $(x-2k)^2=ax$ 在区间$(2k-1, 2k+1]$ $(k\in\mathbf{N}^*)$上有两个不相等实数根的充要条件.(即求 a 的取值范围)

目标: 考查充要条件与二次函数、一次函数相结合解决问题的应用.

提示: 所要解决问题不需要求出方程的具体的根,所以问题可以转化为考虑函数交点的问题.

解: 问题等价于 $y=(x-2k)^2$ 与 $y=ax$ 在$(2k-1, 2k+1]$有两个不同的交点,如图 1-1. $\therefore 0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}$.

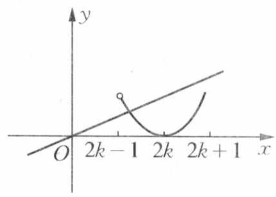

图 1-1

注意: 本题还可以利用二次函数来确定二次方程根的分布,或者利用变量分离及函数求值域的方法来解.

规律、方法、技巧总结

确定四种命题的关键是清楚四种命题的结构关系,涉及到否定时还要考虑清楚对事件的否定. 判断两者条件关系的关键是看互相是否具有推出关系. 一个命题的真假的判断比较麻烦时,可以通过判断其等价命题逆否命题来解决.

精练

一、填空题

1. 已知三个不等式:① $ab>0$; ② $-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$; ③ $bc>ad$. 以其中两个命题为条件,余下一个为结论,

可以组成________个真命题.

2. 已知 A 与 B 是两个命题,如果 A 是 B 的充分不必要条件,那么 $\bar{a}$ 是 $\bar{b}$ 的________条件.

3. 设命题甲:$\begin{cases}2<x+y<4\\0<xy<3\end{cases}$,命题乙:$\begin{cases}0<x<1\\2<y<3\end{cases}$,那么甲是乙的________条件.

4. "$m=\frac{1}{2}$"是直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 互相垂直的________条件.

5. 在 $\triangle ABC$ 中,"$\angle A>30^\circ$"是"$\sin A>\frac{1}{2}$"的________条件.

6. 设集合 $M=\{x\mid f(x)=0\}$, $N=\{x\mid g(x)=0\}$,则方程 $[f(x)]^2+[g(x)]^2=0$ 的解集是________.

7. 命题:"若 $ab=0$,则 a, b 中至少有一个为零"的逆否命题是:________________________________.

8. 已知不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x<2\right\}$,对于其中的实数 a, b, c 有如下 5 个判断:① $a>0$, ② $b>0$, ③ $c>0$, ④ $a+b+c>0$, ⑤ $a-b+c>0$,则其中正确的判断有________.

二、选择题

9. 如果 $a<0$, $-1<b<0$,那么下列不等式中正确的是 ( )

A. $a<ab^2<ab$　　B. $ab^2<a<ab$　　C. $a<ab<ab^2$　　D. $ab^2<ab<a$

10. "$\cos\alpha\neq-\frac{1}{2}$"是"$\alpha\neq\frac{2\pi}{3}$"的 ( )

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 非充分也非必要条件

11. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为任意非零向量,有以下条件:① $|\vec{a}|=|\vec{b}|$; ② $(\vec{a})^2=(\vec{b})^2$; ③ $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$,其中可以作为 $\vec{a}=\vec{b}$ 的必要且非充分条件的是 ( )

A. ①　　B. ①②　　C. ②③　　D. ①②③

12. 集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-1}{x+1}<0\right\}$、$B=\{x\mid |x-b|<a\}$,若"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的充分条件,则 b 的取值范围可以是 ( )

A. $-2\leqslant b<0$　　B. $0<b\leqslant 2$

C. $-3<b<-1$　　D. $-1\leqslant b<2$

三、解答题

13. 判断下列命题的正误.

(1) 在 $\triangle ABC$ 中,$A>B$ 是 $\sin A>\sin B$ 的充要条件;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中,$A>B$ 的必要条件是 $\tan A>\tan B$;

(3) α, β 均为第一象限角,$\alpha>\beta$ 的充分条件是 $\sin\alpha>\sin\beta$;

(4) α, β 均为第一象限角,$\sin\alpha>\sin\beta$ 是 $\cos\alpha>\cos\beta$ 的既不充分也不必要条件.

14. 设实数集合 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$, $B=\{x\mid mx+1=0\}$,写出 $B\subsetneqq A$ 的一个充分非必要条件.