最新版

全国各类成人高等学校统一招生考试规划教材

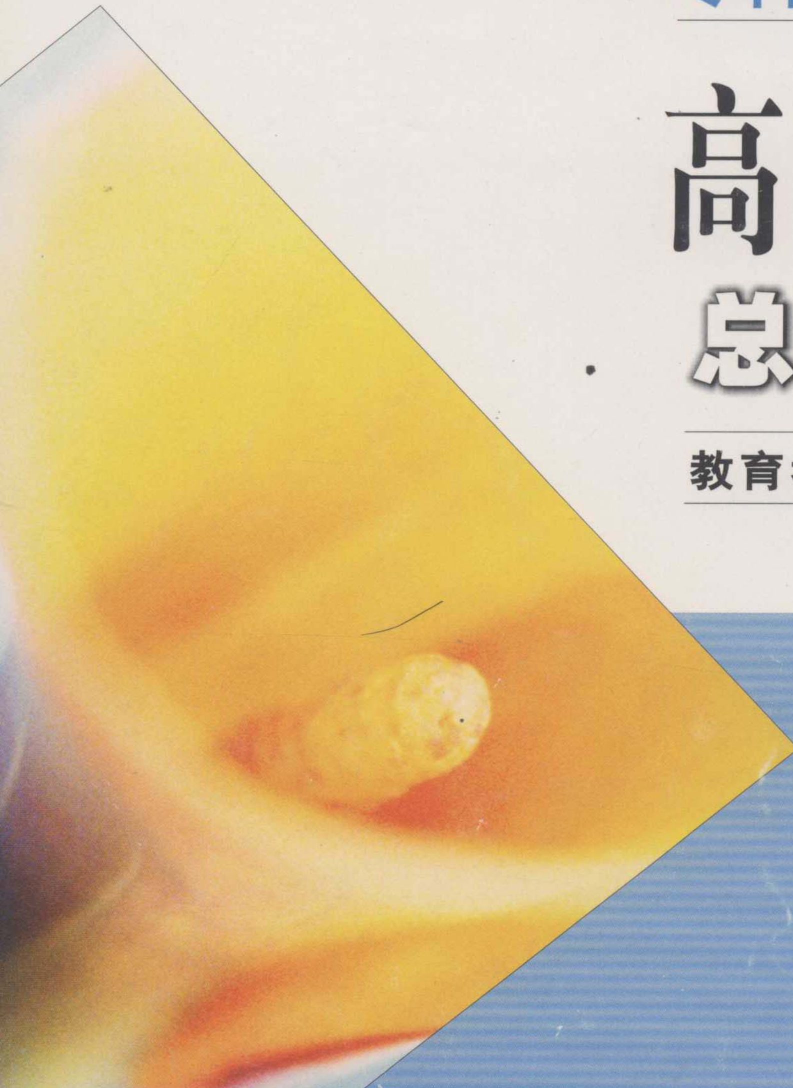
最新复习考试大纲配套教材

专科起点升本科

高等数学(二)

总复习

教育考试研究中心 组编



知识结构框图
考点归纳复习
典型例题分析
标准习题训练
名师答案精解

中国和平出版社 ZHONGGUOHEPINGCHUBANSHE

KAO SHI

责任编辑:李京
封面设计:朱懋

图书在版编目(CIP)数据

成考教程.高等数学(二):专升本、本科/本书编写组编著.
—北京:中国和平出版社,2002.10
ISBN 7-80154-473-0

Ⅰ.成... Ⅱ.本... Ⅲ.高等数学-成人教育:高等教育-入学考试
-自学参考资料 Ⅳ.G724.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 062744 号

中国和平出版社出版、发行
北京市东城区和平里东街民旺甲 19 号
邮编:100013 电话:010－84252779
河南人民印刷包装有限公司
新华书店总经销

850×1168 毫米 1/16 印张 14.875 361 千字
2003 年 5 月 第 2 版 2003 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 7-80154-473-0/G·466
定价:20.00 元

前　言

国家教育部从2003年起调整成人高校招生考试科目设置，对《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》进行了修订和补充。新大纲适用期限为2003年至2004年。

参加成人高考的学生渴求在考前能通过权威规划教材的帮助和标准习题的演练，全面检查自己所学的知识是否扎实，考试大纲所要求的内容是否掌握，已经理解的知识能否完整、确切、简明地进行书面表达；并借此增强考生分析和解决实际问题的能力，帮助考生顺利通过考试。因此，为配合广大考生参加考试，并能顺利过关，我们利用多年积累的成人高考教学辅导资源和经验，全面系统地剖析了各门课程新大纲的内容体系，组织编写了一套“全国各类成人高等学校统一招生考试规划教材优化设计总复习”丛书，推向全国，以满足考生之急需，适应社会之需要。

本书在编写过程中，严格按照考试大纲的要求：包括了所有考试的知识点，并着重突出重点和难点。全书以章为单位，每节设“知识结构框图”、“考点归纳复习”、“典型例题分析”、“标准习题训练”、“名师答案精解”五部分。所有习题均附详细解答，书后附有模拟试卷及2002年度真题，供考生检验学习情况，建议在规定时间内完成。

本丛书的特点如下：

1. 名家亲笔编写：作者是从事该课程教学及辅导工作的大学教师，他们对大纲吃得透，信息灵，经验多，编出的教材权威、实用。

2. 内容新：本书按照2003年《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写，并结合作者实际评卷经验，以及对历年全国统考试题的分析研究，总结出命题的思路，成功把握了明、后两年成人高考命题的新动向。

3. 知识全：本书涵盖了大纲中所有的知识点、考核点，并精心编写“标准习题训练”，训练强度大、解答准确。

4. 针对性强：书后针对新大纲合理设计“模拟试题”，增强考生临场经验，增强本书实用性，短期复习见效快。

本书由刘洁华主编。衷心祝愿本书对您的学习和考试有所帮助，也期望您对编写出版工作提出宝贵意见。

编者

目　　录

第一章　函数、极限和连续

第一节　函数

知识结构框图

- 函数
  - 概念
    - 定义：设 $D\subseteq R$ 为非空集合，如果 $\forall x\in D$，由法则 f，有确定的实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$，自变量 x 的取值范围 D 为函数的定义域，函数值的取值范围 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 为函数的值域
    - 表示法：表格法、图示法、解析法
    - 分段函数：在定义域的不同子集上用不同的表达式来表示的函数
  - 简单性质
    - 单调性：单调递增 $x_1>x_2$；有 $f(x_1)>f(x_2)$
      单调递减 $x_1>x_2$ 有 $f(x_1)<f(x_2)$
    - 奇偶性：奇函数 $f(-x)=-f(x)$；偶函数 $f(-x)=f(x)$
    - 有界性：若 $\exists M>0$ 使得 $\forall x\in D$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，则 $f(x)$ 在 D 上有界
    - 周期性：$\exists$ 不为零的正数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$，T 为 $f(x)$ 的周期
  - 反函数
    - $y=f(x)$ 的定义域、值域分别是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域、定义域
    - $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称
    - 单值、单调函数其反函数也是单值、单调函数
  - 函数的复合运算与四则运算
    - 复合函数：设 $y=f(u)$，$u\in v$，$u=\varphi(x)$，$x\in D$，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域交集非空，则 y 通过 u 的联系成为 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量
    - 四则运算：加、减、乘、除
  - 基本初等函数
    - 常量函数：$y=C$
    - 幂函数：$y=x^a$（a 为常数）
    - 指数函数：$y=a^x(a>0,a\neq1)$
    - 对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$
    - 三角函数：$y=\sin x$　$y=\cos x$　$y=\tan x$　$y=\cot x$　$y=\sec x$　$y=\csc x$
    - 反三角函数：$y=\arcsin x$　$y=\arccos x$　$y=\arctan x$　$y=\operatorname{arccot} x$
  - 初等函数

考点归纳复习

（一）函数的概念

1. 函数的定义

若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使每个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x)$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，集合 D 称为函数的定义域，记作 $D(f)$，函数 y 的取值的集合，称为函数的值域，记作 $Z(f)$.

在函数的定义中，有三个因素：定义域 D，对应法则 f 和值域 Z.

定义域　在数轴上使函数 f 有定义的自变量的取值范围 D，称为函数的定义域，记为 $D(f)$.

求函数的定义域时，应考虑以下情况：

(1) 分式的分母取值不能为零.

(2) 对数符号下的式子(真数部分)只能是正的.

(3) 偶次根的根底式应该为非负数.

(4) 对于表示应用问题的函数关系，其自变量的取值范围应使实际问题有意义.

(5) 反正弦函数、反余数函数符号下的式子只能介于 -1 和 1(包括 -1 和 1)之间.

(6) 若函数式有两项，其定义域应是两项定义域的公共部分.

值域　函数 y 的取值范围，称为函数的值域，记为 $Z(f)$.
当自变量 x 取某一个定值 a 时，函数 $y = f(x)$ 的对应值记为 $f(a)$，有时也记为 $y\big|_{x=a}$

2. 函数的表示法

(1) 解析法

对自变量和常数施加四则运算、乘幂、指数运算、取对数、取三角函数等数学运算所得到的式子称为解析表达式，用解析表达式表示一个函数就称为函数的解析法，也叫公式法.

(2) 表格法

在实际应用中，常把自变量 x 所取的值与对应的函数值列成表格，用以表示函数关系.

(3) 图示法

设 $y = f(x)$ 是一个给定的函数，定义域是 $D(f)$，由于自变量和函数都取实数值，因而我们可以在平面上取定一个直角坐标系 Oxy，用 x 轴上的点表示自变量的值，用 y 轴上的点表示函数值. 于是，在 $D(f)$ 内的每一个 x 及相应的函数值 $f(x)$ 就确定了该平面直角坐标系中的一个点 $P(x,y)$，当 x 在 $D(f)$ 内变动时，点 P 便在坐标平面上移动，一般便得到平面上的一条曲线，这就是用图示法表示函数.

函数的三种表示法各有优缺点，在具体应用时，常常是三种方法配合使用.

3. 函数解析式中几个常见形式

(1) 用公式法表示函数，当自变量在不同的范围内取值时，对应法则不能用同一公式表达，而要用两个或两个以上的公式来表示，这类函数称为分段函数.

(2) 显函数　函数关系用解析式 $y = f(x)$ 表示的称为显函数，如 $y = x^2, y = \sqrt{lgx}$ 等

(3) 隐函数　函数 y 与自变量 x 的对应规则是用一个方程 $F(x,y) = 0$ 表示的函数，称为隐函数.

参数方程表示的函数　如果 x 与 y 的关系通过第三个变量联系起来，如

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

则称这种函数关系为参数方程表示的函数.

(二) 函数的简单性质

性质 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，均有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) [\text{或} f(x_1) \geqslant f(x_2)]$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少)，如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，均有

$$f(x_1) < f(x_2) [\text{或} f(x_1) > f(x_2)]$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上严格单调增加(或严格单调减少)

性质 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任一点 x，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任一点 x，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质：

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数.

(2) 两个偶函数或两个奇函数的乘积为偶函数.

(3) 一个奇函数与一个偶函数的乘积为奇函数.

性质 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在正数 M，使得对于任意的 $x \in X$，都有不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

(1) 如果一个函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界，它的界并不是惟一的.

(2) 函数 $y=f(x)$ 有界与否，是与所在区间紧密联系在一起的.

性质 函数的周期性

若存在一个正数 T，使得对任何 $x \in D$，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 是周期函数，满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

(三) 反函数

1. 反函数的定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，如果对每一个 $y \in W$，有确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x \in D$ 与之对应，则确定了一个新的函数，这个新函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

当然我们也可以说 $y=f(x)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数，也就是说它们互为反函数.

函数 $x = \varphi(y)$ 与 $y = \varphi(x)$ 是同一个函数,所以当 $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数时, $y = \varphi(x)$ 也是 $y = f(x)$ 的反函数.

2. 反函数的存在性

定理 1 如果函数 $y = f(x), D(f) = X, Z(f) = Y$ 是严格单调增加(或减少)的,则它必定存在反函数.并且也是严格单调增加(或减少)的.

$$x = \varphi(y), D(f) = Y$$
$$Z(f) = X$$

3. 求反函数的步骤

(1) 从直接函数 $y = f(x)$ 中解出 $x = \varphi(y)$,看它是否能成为函数;

(2) 如果 $x = \varphi(y)$ 是函数,将字母 x 换成 y,将字母 y 换成 x,得 $y = \varphi(x)$,这就是 $y = f(x)$ 的反函数.

(四) 基本初等函数

1. 常数函数

$$y = c(\text{为常数})$$

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,图形是一条平行于 x 轴的直线,是个偶函数.

2. 幂函数

$$y = x^{\mu}(\mu\ \text{为实数})$$

它的定义域随 μ 值的不同而不同,但不管 μ 的值是多少,它在 $(0, +\infty)$ 内总是有定义的.

当 $\mu > 0$ 时,不论 μ 为何值,它的图形都通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$,在 $(0, +\infty)$ 内严格单调增加且无界.

当 $\mu < 0$ 时,它的图形在 $(0, +\infty)$ 内严格单调减少、无界,且都通过点 $(1,1)$. 曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线.

3. 指数函数

$$y = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,由于不论 x 为何值,总有 $a^x > 0$,且有 $a^0 = 1$,所以它的图形总是在 x 轴的上方,且通过点 $(0,1)$.

当 $a > 1$ 时,函数严格单调增加且无界,曲线以 x 轴的负半轴为渐近线;

当 $0 < a < 1$ 时,函数严格单调减少且无界,曲线以 x 轴的正半轴为渐近线.

以无理数 $e = 2.7182818\cdots$ 为底 $(a = e)$ 的指数函数

$$y = e^x$$

是高等数学中常用的指数函数.

4. 对数函数

a 是常数.

它的定义域是 $(0, +\infty)$,值域 $(-\infty, +\infty)$,它的图像过点 $(1,0)$。

当 $a > 1$ 时,函数单调递增且无界,曲线以 y 轴负半轴为渐近线.

当 $a < 1$ 时,函数单调递减且无界,曲线以 y 轴正半轴为渐近线.

以无理数 e 为底的对数函数

$$y = \log_e x$$

叫做自然对数函数,简记作

$$y = \ln x$$

是高等数学中常用的.

5. 三角函数

(1) 正弦函数 $y = \sin x$

它的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域$[-1,1]$,且为奇函数,$y = \sin x$ 以 2π 为周期.

(2) 余弦函数 $y = \cos x$

它的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域$[-1,1]$,且为偶函数,$y = \cos x$ 以 2π 为周期.

(3) 正切函数 $y = \tan x$

它的定义域为$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,值域为$(-\infty, +\infty)$,且为奇函数,$y = \tan x$ 以 π 为周期.

(4) 余切函数 $y = \cot x$

它的定义域为$(k\pi - \pi, k\pi)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,值域为$(-\infty, +\infty)$,且为奇函数,$y = \cot x$ 以 π 为周期.

(5) 正割函数 $y = \sec x$

它是余弦函数的倒数,定义域为$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,是无界函数,且为偶函数,$y = \sec x$ 以 2π 为周期.

(6) 余割函数 $y = \csc x$

它是正弦函数的倒数,定义域为$(k\pi - \pi, k\pi)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,是无界函数,且为奇数,$y = \csc x$ 为 2π 为周期.

6. 反三角函数

(1) 反正弦函数 $y = \arcsin x$

它的定义域为$[-1,1]$,值域$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,且是单调增函数.

(2) 反余弦函数 $y = \arccos x$

它的定义域为$[-1,1]$,值域$[0,\pi]$,且是单调减函数.

(3) 反正切函数 $y = \arctan x$

它的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,反正切函数是单调递增函数.

(4) 反余切函数 $y = \mathrm{arccot}\, x$

它的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$(0,\pi)$,反余切函数是单调递减函数.

以上五类函数称为基本初等函数,是最基本、最常用的函数,其中指数函数与对数函数互为反函数.

(五) 函数、初等函数

1. 复合函数

设 y 是 u 的函数

$$y = f(u)$$

而 u 又是 x 的函数

$$u = \varphi x$$

又设 X 表示函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域的一个子集,如果对于在 X 上的每一个取值 x 所对应的 u 值,函数 $y = f(u)$ 有定义,则 y 通过 $u = \varphi(x)$ 而成为 x 的函数,记为

$$y = f[\varphi(x)]$$

这个函数叫做由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数,它的定义域为 X,u 叫做中间变量.

所以复合函数实际就是将中间变量代入后所构成的函数.

注意:不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的,例如 $y = \arcsin u$ 及 $u = x^2 + 3$ 就不能复合成一个复合函数,因为对于 $u = x^2 + 3$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内的任何值 x 所对应的 u 值(都大于或等于 3),$y = \arcsin u$ 都没有定义,也就是说 $y = \arcsin(x^2 + 3)$ 对于任何值 x 都没有定义,因为 $y = \arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$,而对于任何值 x,$x^2 + 3$ 都大于或等于 3.

复合函数不仅可以有一个中间变量,还可以有更多的中间变量,如 u,v,w,t 等等.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限项四则运算和复合所构成的函数,统称为初等函数.

初等函数是高等数学研究的主要对象,考生需要掌握两方面的问题:

(1) 由基本初等函数构成初等函数.

(2) 将初等函数分解成由基本初等函数复合四则运算而成的形式.

典型例题分析

【例 1】 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的任一函数,则 $F(x) = F(x) - f(-x)$ 必为 (　　)

A. 偶函数　　　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　　　D. 恒等于零的函数

【解析】 因为

$$F(-x) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)] = -F(x)$$

所以 $F(x)$ 为奇函数.

【答案】 B

【例 2】 函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2 - 6}} + \lg(3x - 8)$ 的定义域是 (　　)

A. $(-\infty, -2) \cup \left(\dfrac{8}{3}, +\infty\right)$　　　　B. $\left(\dfrac{8}{3}, +\infty\right)$

C. $(3, +\infty)$　　　　D. $(-\infty, -2)$

【解析】 由 $x^2 - 2 - 6 > 0$,得 $x > 3$ 得 $x < -2$;由 $3x - 8 > 0$,得 $x > \dfrac{8}{3}$,所以定义域

为$(3, +\infty)$.

【答案】 C

【例 3】 函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形 (　　)

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称

C. 关于直线 $y = x$ 对称　　D. 是同一条曲线

【答案】 D

【例 4】 函数 $y = \log_4\sqrt{x} + \log_4 2$ 的反函数是 (　　)

A. $y = 4^{2x-1}$　　B. $y = 4x - 1$

C. $y = 2^{x-1}$　　D. $y = 4^{x-1}$

【解析】 由 $y = \log_4\sqrt{x} + \log_4 2 = y = \log_4 2\sqrt{x}$ 得 $2\sqrt{x} = 4^y$, $\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cdot 4^y$, $x = \frac{1}{4}\cdot 4^{2y} = 4^{2y-1}$,故反函数 $y = 4^{2x-1}$.

【答案】 A

【例 5】 函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 在区间$(0,1)$内是 (　　)

A. 单调增加有界的　　B. 单调增加无界的

C. 单调减少有界的　　D. 单调减少无界的

【解析】 因为在区间$(0,1)$内,函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的值随 x 的增大而减少,所以是单调减少的,又因为当 $x > 0$ 时,只要 x 的值充分地小,$y = \frac{1}{x^2}$ 的值就可以变得充分地大,也就是说,对于预先给定的任意大的正数 M,只要正数 x 满足关系式 $x \leqslant \frac{1}{\sqrt{M}}$,就有 $\frac{1}{x^2} \geqslant M$,所以 $y = \frac{1}{x^2}$ 在$(0,1)$内是无界的.

【答案】 D

【例 6】 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$,则 $f(x) =$ (　　)

A. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$　　B. $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

C. $\left(\frac{1}{1+x}\right)^2$　　D. $(1-x)^2$

【解析】 用直接法,令 $u = \frac{1}{x}$,则 $x = \frac{1}{u}$,代入已知关系式有

$$f(u) = \left[\frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}+1}\right] = \left(\frac{1}{1+u}\right)^2$$

将 u 代换为 x,得 $f(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^2$.

【答案】 C

【例 7】 设函数 $f(x) = \frac{x(e^x - 1)}{e^x + 1}$,则该函数是 (　　)

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 单调函数

【解析】 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，且

$$f(-x)=\frac{-x(e^{-x}-1)}{e^{-x}+1}=\frac{-x(1-e^{x})}{1+e^{x}}$$

$$\frac{x(e^{x}-1)}{e^{x}+1}=f(x)$$

即 $f(x)$ 为偶函数.

【答案】 B

【例 8】 下列函数对中，表示相同函数的是　　(　　)

A. $f(x)=\ln x^4$ 与 $g(x)=4\ln x$　　$B.f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

$C.f(x)=x+2$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

$D.f(x)=e^{-\frac{1}{2}\ln x}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

【解析】 A 中两个函数定义域不相同；B 中两个函数对应法则不同；C 中两个函数定义域不相同，因此 A、B、C 均可排除，D 为正确答案，事实上 $f(x)=e^{-\frac{1}{2}\ln x}=e^{\ln x^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，与 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 具有相同的定义域与对应法则，因此是同一函数.

【答案】 D

【例 9】 设 $f(x)=\dfrac{x+k}{kx^2+2kx+2}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，则 k 的取值是　　(　　)

A. $0<k<2$　　B. $0\leqslant k<2$

C. $k>2$　　D. $k\geqslant 2$

【解析】 $f(x)$ 的定义域为满足 $kx^2+2kx+2\neq 0$ 的所有 x 取值范围，即当二次曲线 $y=kx^2+2kx+2$ 与 x 轴不相交时，定义域为题设的 $(-\infty, +\infty)$，则 $y=kx^2+2kx+2$ 与 x 轴不相交的条件是 $\triangle=(2k)^2-4\times k\times 2<0$，解得 $0<k<2$，注意 $k=0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{2}$ 的定义域仍为 $(-\infty, +\infty)$.

【答案】 B

【例 10】 设 $y=3^u, u=u^3, v=\tan x$，则复合函数 $y=f(x)=$ ________.

【解析】 将 v, u 表达式依次代入 $y=3^u$，得 $y=f(x)=3tan^2x$

【答案】 $3^{\tan^2 x}$

【例 11】 设 $f(x+1)-f(x)=6x+339$，则 $f(x)=ax^2+bx+339$ 中的 $a=$ ________，$b=$ ________.

【解析】 由 $f(x)=ax^2+bx+339$

有　$$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+339$$

$$\begin{aligned}f(x+1)-f(x)&=ax^2+2ax+a+bx+b+339-ax^2-bx-339\\&=2ax+a+b\end{aligned}$$

由已知条件　　$f(x+1)-f(x)=6x+339$

所以　　$2ax+a+b=6x+339$

于是得 $2a=6, a+b=339$，解得 $a=3, b=336$

【答案】 $a=3, b=336$

【例 12】 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，则 $f(x)=$ ________.

【解析】 由于 $f(x+1)=x^2+3x+5$，令 $x+1=t, x=t-1$，代入 $f(x+1)$ 的表达式

$$f(t)=(t-1)^2+3(t-1)+5=t^2+t+3$$

所以 $f(x)=x^2+x+3$

【答案】 x^2+x+3

【例 13】 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(x^2)$ 的定义域是________.

【解析】 由 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，得，$|x|\leqslant 1$，即 $x\in[-1,1]$

【答案】 $[-1,1]$

【例 14】 求函数 $y=\lg\frac{x}{x-2}+\arcsin\frac{3x-1}{5}$ 的定义域.

【解析】 设 $y_1=\lg\frac{x}{x-2}, y_2=\arcsin\frac{3x-1}{5}$　对于 y_1，要求 $\frac{x}{x-2}>0$，解之得

(1)　　$x>0$，且 $x-2>0$

$$x>2$$

或(2)　　$x<0$，且 $x-2<0$

所以　　$x<0$

因此 y_1 的定义域为 $x>2$ 或 $x<0$.

对于 y_2，由反正弦的定义知，应有

$$\left|\frac{3x-1}{5}\right|\leqslant 1，即 -1\leqslant\frac{3x-1}{5}\leqslant 1$$

所以　　$-5\leqslant 3X-1\leqslant 5$

解之得　　$-\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2$

因此 y_2 的定义域为 $[-\frac{4}{3},2]$

由于 $y=y_1+y_2$，所以函数 y 的定义域是上述两个定义域的交集，即

$$D(f)=\{x\mid x>2 或 x<0\}\cap\{x\mid -\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2\}$$

$$=\{x\mid -\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant 0\}$$

【例 15】 求 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 的周期.

【解析】 因为 $\sin x$ 的周期为 2π；$\sin 2x$ 的周期为 π；$\sin 3x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{3}$，而 $2\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}$ 的最小公倍数 2π，所以函数 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 的周期为 2π.

【例 16】 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$,求 $f[f(x)],f[f[f(x)]]$

【解析】 $f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=x \qquad (x\neq 1)$

所以 $$f[f[f(x)]]=f(x)=\frac{x}{x-1} \qquad (x\neq 1)$$

【例 17】 判定 $y=x\cos x$ 的奇偶性.

【解析】 $y(x)=x\cos x$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,因为

$$\begin{aligned}y(-x)&=(-x)\cos(-x)\\&=-x\cos x=-y(x)\end{aligned}$$

所以 $y=x\cos x$ 是奇函数.

【例 18】 写出下列函数组成的复合函数,并求复合函数的定义域.

(1)$y=\arcsin x \qquad x=1-t^2$

(2)$y=\sqrt{u} \qquad u=\cos v \qquad v=2x$

【解析】 (1) 由 $y=\arccos x \qquad x=1-t^2$ 复合而成的函数为 $y=\arccos(1-t^2)$,

由于 $-1\leqslant 1-t^2\leqslant 1$,从而 $0\leqslant t^2\leqslant 2$, $-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$,复合函数定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

(2) 由 $y=\sqrt{u}$,$u=\cos v$,$v=2x$ 复合而成的函数为

$$y=\sqrt{\cos 2x}$$

由于 $y=\sqrt{\cos 2x}$ 必须 $\cos 2x\geqslant 0$,即

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}$$

从而复合函数定义域为$\left[k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$,其中 $k=0,\pm1,\pm2\cdots$

【例 19】 某种商品,当售价为每件10元时,每天可卖出2 000件,如果每件售价每降低0.2元,则可多卖出50件,试求卖出件数 q 与售价 P 的函数关系.

【解析】 根据题意可知:卖出件数的增加量与售价的降低量成比例.因之可得 q,P 的关系如下表:

P(元/件)	10	9.8	9.6	9.4	9.2	9.0	…
q(件)	2 000	2 050	2 100	2 150	2 200	2 250	…

它的分析表达式为

$$q(P)=2\,000+\frac{10-P}{0.2}\times 50=2\,000+2\,500-250P$$

所以

$$q(P)=4\,500-250P$$

标准习题训练

一、选择题

1. 下列函数为同一函数的是　(　　)

A. $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=(\sqrt{x})^2$

B. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$

C. $f(x)=x, g(x)=x(\cos^2x+\sin^2x)$

D. $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$

2. 函数 $y=\cos\dfrac{x}{2}+\sin 3x$ 的周期为　(　　)

A. π　　CB. 4π

C. $\dfrac{2}{3}\pi$　　D. 6π

3. 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形　(　　)

A. 是同一条曲线　　B. 关于直线 $y=x$ 对称

C. 关于 x 轴对称　　D. 关于 y 轴对称

4. 函数 $y=f(x)=2^{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 是　(　　)

A. $\log a(x+1)$　　B. $\log_2 x+1$

C. $\dfrac{1}{2}\log_2 x$　　D. $2\log_2 x$

5. 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，则 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=$　(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1

C. 3　　D. 2

6. 下列函数中是奇函数的是　(　　)

A. 2^{-x^3}　　B. $y=2^x+2^{-x}$

C. $y=-|x|$　　D. $y=2^{-x}-2^x$

7. 函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是　(　　)

A. 单调增加　　B. 单调减少

C. 不是单调函数　　D. 没有定义

8. 在下列函数中给定区间内无界的是　(　　)

A. $\ln(1+x^2)$　$[0,1]$

B. $y=2^x$　$(-\infty,0)$

C. $y=2+x-3x^2$　$(0,+\infty)$

D. $y=\arctan x-\dfrac{\pi}{4}$　$(-\infty,+\infty)$

9. 函数 $y=e^{-x2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是　(　　)

A. 单调有界函数　　B. 单调无界函数

C. 有界奇函数　　D. 有界偶函数

10. 函数 $y = \ln x$ 在 $(0,1)$ 内 (　　)

A. 严格单调增加且有界　　B. 严格单调增加且无界

C. 严格单调减少且有界　　D. 严格单调减少且无界

二、填空题

1. 设 $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 2x - 3)}{\sqrt{x^2 - 4}}$，则 $f(x)$ 的定义域是__________.

2. 函数 $y = \dfrac{1}{|x| - x}$ 的定义域是__________.

3. 函数 $y = \arcsin\dfrac{x-2}{3} + \sqrt{3-x}$ 的定义域是__________.

4. 若 $f(x+1) = \dfrac{1}{x}$，则 $f(x) =$ __________.

5. 设 $f(1-2x) = 1 - \dfrac{2}{x}$，则 $f(x) =$ __________.

6. 设 $f(x) = x^2, \varphi(x) = \sin x + 1$，则 $f[\varphi(0)] =$ __________.

7. 已知 $f(\dfrac{x}{y}, x+y) = x^2 + y^2$，求 $f(x,y)$ __________.

8. 已知 $f(xy, x-y) = x^2 + y^2$，则 $f(x,y) =$ __________.

9. 函数 $y = \dfrac{2^x}{1+2^x}$ 的反函数是__________.

10. 可以将复合函数 $y = \arcsin 2^x$ 分解为__________.

三、解答题

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$

(2) $y = \arcsin\dfrac{x-1}{2}$

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$，求下列函数的定义：

(1) $f(e^x)$　　(2) $f(\ln x)$　　(3) $f(x+2)$　　(4) $f(x+1) + f(x)$

3. 求下列函数的反函数

(1) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$

(2) $y = 1 = \lg(x+2)$

4. 求函数 $y = \ln^3\arcsin\sqrt{2x-1}$ 是由哪些简单函数复合成的.

5. 判断函数 $f(x) = x + \lg x$ 的单调性.

6. 判断下列函数的奇偶性.