SUANZIFANGCHENG DE
ZHENGJIE JIQI BIJIN

算子方程的正解及其逼近

陈晓雷 著

江西高校出版社

本书得到浙江财经学院学术专著出版资金资助(2005 年度)

算子方程的正解及其逼近

陈晓雷 著

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

算子方程的正解及其逼近/陈晓雷著 .—南昌:江西高校出版社,2005.8

ISBN 7-81075-648-6

Ⅰ.算… Ⅱ.陈 Ⅲ.①算子方程-方程解②算子逼近 Ⅳ.0177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 053528 号

江西高校出版社出版发行

(江西省南昌市洪都北大道 96 号)

邮编:330046 电话:(0791)8591695

江西太元科技有限公司照排部照排

江西教育印刷厂印刷

各地新华书店经销

*

2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32 5.625 印张 156 千字

印数:1~2000 册

定价:18.00 元

目　　录

第一章　线性与非线性算子 …… 1

§1.1　度量空间 …… 1

§1.2　线性算子与线性泛函 …… 5

§1.3　非线性算子的基本概念 …… 8

第二章　压缩算子方程逼近解 …… 17

§2.1　Banach 压缩映象原理 …… 17

§2.2　算子的 Lipschitz 条件与 Lipschitz 常数 …… 20

§2.3　谱半径与算子的压缩性 …… 26

§2.4　迭代列的收敛性与收敛速度 …… 31

§2.5　收缩算子的不动点 …… 35

§2.6　一致压缩算子与隐函数定理 …… 38

第三章　半序 Banach 空间 …… 45

§3.1　锥与半序 …… 45

§3.2　空间 E_{u_0}与 u_0－范数 …… 47

§3.3　正规锥、正则锥与完全正则锥 …… 54

§3.4　共轭锥与凸集隔离性原理 …… 70

第四章　增算子与凹算子方程的正解 …… 86

§4.1　拟凹算子与增算子的不动点 …… 86

§4.2　单调 u_0－弱凹算子方程 …… 106

§4.3　u_0-凹算子及其不动点定理 …………………… 111
§4.4　对非线性积分方程的应用 …………………… 118
§4.5　对二阶常微分方程的应用 …………………… 129

第五章　一致 u_0-凹算子方程逼近解 …………………… 137
§5.1　一致 u_0-凹算子列的极限算子的正谱 ………… 137
§5.2　一致 u_0-凹算子列的极限算子的不动点及其逼近
…………………………………………………… 152

主要参考文献 …………………………………………… 169
后记 ………………………………………………………… 172

第一章　线性与非线性算子

本章扼要地陈述一些与以后各章内容紧密相关的线性泛函分析中的基本概念与结果，继而论述非线性算子的一般性质，包括连续性、有界性、全连续性、可微性等.

§1.1　度量空间

定义 1.1.1　设 X 是一非空集合，若对于 X 中的任意两点 x、y，有惟一确定的实数 $\rho(x,y)$ 满足：

(1) 非负性：$\rho(x,y)\geqslant 0$，$\rho(x,y)=0$，当且仅当 $x=y$；

(2) 对称性：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) 三角不等式：$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

则称 X 是以 ρ 为距离的度量空间，记为 (X,ρ)，而称 $\rho(x,y)$ 为点 x，y 之间的距离. 通常也简称 X 为**度量空间**.

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的点列，又 $x_0\in X$，若

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0,$$

则称 x_0 为点列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

给定度量空间 (X,ρ)，$x_0\in X$，以及 $r>0$，点集

$$B(x_0,r)=\{x\mid x\in X,\rho(x,x_0)<r\}$$

叫做 X 内以点 x_0 为中心，以 r 为半径的**开球**.

设 $E\subset X$，而 X 内有一个开球 $B(x_0,r)\supset E$，则称 E 是 X 内的**有界集**.

定义 1.1.2 设 $x_0 \in (X,\rho)$, $r>0$, 以 x_0 为中心, 以 r 为半径的开球 $B(x_0,r)$, 称为 x_0 的一个**球形邻域**, 简称为**邻域**.

设 $G \subset X$, $x \in G$, 若存在 x 的一个邻域 $B(x,r)$, 使 $B(x,r) \subset G$, 则称 x 是 G 的**内点**. 若 G 中每点均为其内点, 则称 G 为**开集**.

定义 1.1.3 给定度量空间 (X,ρ), $E \subset X$, $x_0 \in X$, 若 x_0 的任一邻域 $B(x_0,\epsilon)$ 中均含有 $E - \{x_0\}$ 中的点, 则称 x_0 是 E 的**聚点**或**极限点**.

E 的全部聚点所组成的集合称为 E 的**导集**, 记为 E'. 若 $E' \subset E$, 则称 E 是**闭集**.

称 $\bar{E} = E \cup E'$ 为集合 E 的**闭包**.

定义 1.1.4 给定度量空间 (X,ρ), $\{x_n\} \subset X$, 若对任意正数 ϵ, 有自然数 $N(\epsilon)$, 使 $\rho(x_m, x_n) < \epsilon$, 对任意的 $m, n > N(\epsilon)$ 均成立, 则称序列 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy **点列或基本列**.

若 X 中任一 Cauchy 点列都收敛, 则称 X 为**完备的度量空间**.

定义 1.1.5 设 X 为实(或复)数域 F 上的线性空间, 若对每个 $x \in X$, 总有一个确定的实数 $\|x\|$ 满足:

(1) $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0$, 当且仅当 $x = \theta$;

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad (\alpha \in F)$;

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

则称 $\|x\|$ 为 X 上的**范数**, 称 X 为赋以范数 $\|x\|$ 的**线性赋范空间**.

在线性赋范空间 X 中, 对任何 $x, y \in X$, 令

$$\rho(x,y) = \|x - y\|,$$

则易知 $\rho(x,y)$ 是 X 上的距离, 于是此时 X 又成了度量空间.

定义 1.1.6 完备的线性赋范空间称为 Banach **空间**.

例 1.1.1 对于 n 维实(或复)向量空间 R^n 中的每个元 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 定义

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

则 R^n是赋以范数 $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ 的 Banach 空间.

例 1.1.2　对$[a,b]$上连续函数空间 $C_{[a,b]}$ 中的每个元 x,定义

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_{(t)}|,$$

则 $C_{[a,b]}$ 是赋以范数 $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x_{(t)}|$ 的 Banach 空间.

例 1.1.3　空间 $L^p_{[a,b]}$　$(1 \leqslant p < +\infty)$.

设 $f(t)$ 是$[a,b]$上的实值可测函数,取定 $p(1 \leqslant p < +\infty)$,若 $|f(t)|^p$ 在$[a,b]$上 Lebesgue 可积,则称 $f(t)$ 是$[a,b]$上的 p 次可积函数.$[a,b]$上 p 次可积函数全体记为$L^p_{[a,b]}$.

对每个 $f \in L^p_{[a,b]}$,定义

$$\|f\|_p = \left(\int_{[a,b]} |f|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 $L^p_{[a,b]}$ 是赋以范数 $\|f\|_p = \left(\int_{[a,b]} |f|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}$ 的 Banach 空间.

例 1.1.4　数列空间 l^p　$(1 \leqslant p < +\infty)$.

记满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ 的实数列(或复数列)$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)$ 全体为 l^p. 在 l^p 中按照对每个坐标为x_k 的线性运算,易知它成为线性空间.在 l^p 中规定

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 l^p 即成 Banach 空间.

定义 1.1.7　设 X 是线性空间,在 X 上赋以两个范数$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$,若存在正的常数 c_1 和 c_2,使对一切 $x \in X$ 成立:

$$c_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_2\|x\|_2$$

则称范数 $\|x\|_1$ 与 $\|x\|_2$ 是**等价的**.

定义 1.1.8　设 X 为度量空间,$M \subset R$,若 M 中的任何点列必有在 X 中收敛的子序列,则称 M 是(X 中的) **列紧集**(或称**致密集**).若 X 自身是列紧集,就称 X 是**列紧空间**(或**致密空间**).

定义 1.1.9　度量空间 X 中的列紧闭集 M，称为**紧集**.

或者：对度量空间 X 中的子集 M，若 X 中每个覆盖 M 的开集族中必可选出有限个开集覆盖 M，则称 M 为**紧集**.

若 M 的闭包 $\overline{M}$ 是紧的，则称 M 是**相对紧集**.

定理 1.1.1　度量空间 X 中的紧集 M 上的连续函数 f 必然有界，而且可达上、下确界.

定义 1.1.10　给定度量空间 X，$M \subset X$，给定 $\varepsilon > 0$，若有点集 $A \subset X$，对每点 $x \in M$，$\exists\, x_\varepsilon \in A$，使 $\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$. 换言之，以 A 中各点为心，以正数 ε 为半径的开球族能盖住 M：

$$\bigcup_{y \in A} B(y, \varepsilon) \supset M,$$

则称 A 是 M 的一个 ε - **网**.

若对任何 $\varepsilon > 0$，集 M 总有有限的 ε - 网：$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset M$（点的个数 n 与 ε 有关），则称 M 是**全有界集**.

定理 1.1.2　设 M 是完备度量空间 X 的子集，则 M 为全有界集的充要条件是 M 为相对紧集.

定理 1.1.3　设 X 为完备的度量空间，则 $M \subset X$ 为列紧集的充要条件是对 $\forall\, \varepsilon > 0$，$M$ 存在列紧的 ε - 网.

定义 1.1.11　设 E 是 $[a, b]$ 上的一族连续函数，$E \subset C_{[a,b]}$，若对 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, \delta > 0$，使对 $\forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，对 E 中每个函数 f 都有：

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad (\delta \text{ 与 } E \text{ 中的 } f \text{ 无关}),$$

则称 E 是**等度连续的函数族**.

若存在常数 $c > 0$，使对一切 $f(x) \in E$，对 $\forall\, x \in [a, b]$，总有

$$|F(x)| < c,$$

则称 E 是**一致有界的函数族**.

定理 1.1.4　点集 $M \subset C_{[a,b]}$ 列紧的充要条件是 M 一致有界且等度连续.

§1.2 线性算子与线性泛函

定义 1.2.1 设 X 和 Y 同为实(或复)数域 F 上的线性空间,由 X 的某个子集 D 到 Y 中的映射 A 称为**算子**,而称 D 是算子 A 的**定义域**,记为 $D(A)$,称 $AD = \{Ax \mid x \in D\}$ 是 A 的**值域**,记为 $R(A)$.

若 A 映 X 中的有界集成 Y 中的有界集,且

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad (\forall \alpha, \beta \in F, x、y \in X),$$

则称 A 是**有界线性算子**.

特别,当 $Y = F$(数域)时,称 A 是 X 上的**有界线性泛函**.

虽然 A 为有界线性算子的充要条件是存在常数 $C > 0$,使对 $\forall x \in X$,有

$$\| Ax \| \leqslant c \| x \|$$

定理 1.2.1 线性算子 $A: X \to Y$ 为连续的充要条件是 A 有界.

设 X, Y 为线性赋范空间,记 $B(X, Y)$ 为从 X 到 Y 中的所有的有界线性算子构成的集合,很显然,$B(X, Y)$ 是数域 F 上的线性空间.对每个 $A \in B(X, Y)$,令

$$\| A \| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\| Ax \|}{\| x \|},$$

则 $\| \cdot \|$ 是 $B(X, Y)$ 上的范数.因此 $B(X, Y)$ 是赋范线性空间.

定理 1.2.2 $B(X, Y)$ 为 Banach 空间的充要条件是 Y 为 Banach 空间.

特别:当 $Y = F$(数域)时,记 $B(X, F) = X^*$,它称为 X 的**共轭空间**,由于数域 F 总是完备的,故共轭空间 X^* 总是 Banach 空间.

定义 1.2.2 设 X 是线性赋范空间,X^* 是 X 的共轭空间,$x_n \in X$, $n = 1,2,\cdots$,若 $\exists x \in X$,使得 $\| x_n - x \| \to 0 (n \to \infty)$,则称**点列 $\{x_n\}$ 强收敛**于 x.记为 $x_n \xrightarrow{强} x (n \to \infty)$.

若对 $\forall f \in X^*$,均有 $f(x_n) \to f(x)$(按绝对值距离),$(n \to$

∞),则称**点列**$\{x_n\}$**弱收敛**于 x. 记为 $x_n \xrightarrow{弱} x(n\to\infty)$.

定义 1.2.3 对 $A_n\in B(X,Y)$, $n=1,2,\cdots$,若 $\exists A\in B(X,Y)$,使得:

(1) $\| A_n - A\| \to 0(n\to\infty)$,则称**算子列**$\{A_n\}$**一致收敛**于 A;

(2) $\forall x\in X$, $\| A_nx - Ax\| \to 0(n\to\infty)$,则称**算子列**$\{A_n\}$**强收敛**于 A;

(3) 对 $\forall x\in X$ 和 $\forall f\in X^*$,有 $f(A_nx)\to f(Ax)(n\to\infty)$,则称**算子列**$\{A_n\}$**弱收敛**于 A.

定义 1.2.4 设 X 是线性赋范空间,X^* 是 X 的共轭空间,泛函列 $f_n\in X^*$, $n=1,2,\cdots$,若 $\exists f\in X^*$,使

(1) $\| f_n - f\| \to 0(n\to\infty)$,则称**泛函列**$\{f_n\}$**强收敛**于 f;

(2) $\forall x\in X$,均有 $|f_n(x) - f(x)| \to 0(n\to\infty)$,则称**泛函列**$\{f_n\}$**弱*收敛**于 f;

(3) 对 $\forall F\in(X^*)^*$,均有 $F(f_n)\to F(f)(n\to\infty)$,则称**泛函列**$\{f_n\}$**弱收敛**于 f.

注 1:一般来说,泛函列弱*收敛与弱收敛不一致,但若 X 与 $X^{**}=(X^*)^*$ 之间能建立起等距同构 $J:(Jx)(f)=f(x)(x\in X)$ 时,则称 X 是自反的.在自反空间中,这两种收敛是等价的.

注 2:易见,泛函列的强收敛相当于算子列的一致收敛,泛函列的弱*收敛相当于算子列的强收敛.

定理 1.2.3 (Hahn - Banach **有界线性泛函延拓定理**):设 X 是线性赋范空间,D 是 X 上的线性子空间,则 D 上任一线性有界泛函 f 可以延拓到整个空间 X,并且保持范数不变,即存在 X 上的线性有界泛函 F,满足:

(1) $F(x)=f(x)$, $\forall x\in D$;

(2) $\| F\|_X = \| f\|_D$.

系:设 X 是线性赋范空间,$X\neq\{\theta\}$,则对于 X 中任一 $x_0\neq\theta$,必存在 X 上的线性有界泛函 f,满足:

(1) $\|f\| = 1$;

(2) $f(x_0) = \|x_0\|$.

定义 1.2.5　设 X, Y 是线性赋范空间，A 是 X 到 Y 的线性算子，若 A 的值域 $R(A) = Y$，且 A 的逆算子 A^{-1} 存在，又 A^{-1} 为有界线性算子，则称 A 是**正则算子**.

定理 1.2.4　(**逆算子定理**)：若 $(X, \|\cdot\|_1)$，$(Y, \|\cdot\|_2)$ 是 Banach 空间，A 是 X 到 Y 上的一一线性有界算子，则 A^{-1} 是线性有界算子.

定义 1.2.6　设 X 是线性空间，λ 为一复数，A 是 $X \to X$ 的线性算子，若有 X 中的非零向量 $x \in D(A)$，使

$$Ax = \lambda x$$

则称 λ 是 A 的**特征值**，而称 x 为 A(相应于特征值 λ) 的**特征向量**.

在微分方程的求解中，除去求解形如

$$(\lambda I - A)x = 0$$

的齐次方程外，还经常遇到非齐次方程

$$(\lambda I - A)x = f.$$

其中 A 是给定的算子，f 是已知向量，x 是未知向量. 为了研究这种方程的求解问题，有必要介绍算子 A 的正则点和谱点的概念.

定义 1.2.7　设 X 是复的赋范线性空间，A 是 X 的线性子空间 $D(A)$ 到 X 中的线性算子，又设 λ 是一复数，如果 $(\lambda I - A)$ 是正则算子，即 $\lambda I - A$ 是 $D(A)$ 到 X 上的一对一的线性算子，而且它的逆算子 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是 X 到 X 中的有界线性算子时，称 λ 是 A 的**正则点**，并称 $(\lambda I - A)^{-1}$ 为 A 的**豫解算子**. 不是正则点的复数 λ，称为 A 的**谱点**，复平面上正则点全体称为 A 的**正则集**，记为 $\rho(A)$. 谱点全体称为 A 的**谱集**，记为 $\sigma(A)$.

以上内容在一般的泛函分析书上均能找到，所以只作简要陈述，而未给出证明或作进一步的阐述.

§1.3 非线性算子的基本概念

设 E_1 和 E_2 是两个实 Banach 空间，$D \subset E_1$，$A: D \to E_2$ 为非线性算子.

定义 1.3.1 设 $x_0 \in D$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$，使当 $x \in D$，且 $\| x - x_0 \| < \delta$ 时，恒有：

$$\| Ax - Ax_0 \| < \varepsilon,$$

则称 A **在 x_0 连续**；

若 A 在 D 中每一点都连续，则称 A **在 D 上连续**；

若上述 δ 只与 ε 有关，而与 $x_0 \in D$ 无关，则称 A **在 D 上一致连续**.

注 1：易知，A 在 $x_0 \in D$ 连续的充要条件是：对 $\forall x_n \in D$，$x_n \to x_0$，均有 $Ax_n \to Ax_0 (n \to \infty)$.

定义 1.3.2 若 A 将 D 中的任何有界集变成 E_2 中的有界集，则称 A **在 D 上有界**.

注 2：对于线性算子而言，连续性与有界性是等价的，但对于非线性算子，则没有这种等价关系.

反例 考察 $X = l^2$ 上的泛函：

$$f(x) = \sum_{|x_i| \geq 1} (|x_i| - 1) \cdot i$$

$$(\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \in l^2).$$

由 l^2 中元素的特征：$\sum_{k=1}^{\infty} x_k < +\infty$ 知 $\lim_{i \to \infty} x_i = 0$，故对 $\forall x \in l^2$，在 $f(x)$ 的表达式中至多只有有限项不为零，即只有有限项相加，因此 $f(x)$ 存在.

又若

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots) \in l^2, x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2,$$

且

$$\| x^{(n)} - x \| = \{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - x_k)^2\}^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

亦即 l^2 中的点列依范收敛可导出按分量收敛,从而必有 $f(x^{(n)}) \to f(x)$,故 f 是 m^2 上的连续泛函,但它不是有界的.事实上,取 $x^{(n)} = 2e_n$,其中 $\{e_n\}$ 是 l^2 上的标准基,则 $x^{(n)} \in l^2$ 且 $\| x^{(n)} \| = 2(n = 1,2,\cdots)$,但 $f(x^{(n)}) = n \to \infty(n \to \infty)$.

定义 1.3.3 若 A 将 D 中任何有界集 S 映成 E_2 中的列紧集 $A(S)$(即 $A(S)$ 是相对紧集,亦即它的闭包 $\overline{A(S)}$ 是 E_2 中的紧集),则称 A 是映 D 入 E_2 的**紧算子**.

注 1:易知,A 在 D 上紧的充要条件是:对于 D 中任何有界序列 $\{x_n\}$,必有子序列 $\{x_{n_k}\}$ 存在,使序列 $\{Ax_{n_k}\}$ 有 E_2 中收敛.

注 2:显然,紧算子必有界.

定义 1.3.4 若紧算子 $A: D \to E_2$ 是连续的,则称 A 是映 D 入 E_2 的**全连续算子**.

易知,若 A 为线性算子,则 A 为全连续的充要条件是将 E_1 中的单位球 $S = \{x \mid x \in E_1, \| x \| \leqslant 1\}$ 映成 E_2 中的列紧集.

定理 1.3.1 设 $A_n: D \to E_2$ 连续($n = 1,2,\cdots$),$A: D \to E_2$,若对 D 中任何有界集 S,当 $n \to \infty$ 时,$\| A_n x - Ax \|$ 都一致趋于零(关于 $x \in S$),则 $A: D \to E_2$ 也是全连续算子.

证 先证 A 连续.设 $x_n \to x_0(x_n, x_0 \in D)$,则 $S = \{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$ 是 D 中有界集.于是 $\forall \varepsilon > 0$,可取 k,使

$$\| A_k x_n - A x_n \| < \frac{\varepsilon}{3}, (n = 0,1,2,\cdots). \qquad (1.3.1)$$

由 A_k 的连续性知 $\exists N$,当 $n > N$ 时,恒有:

$$\| A_k x_n - A_k x_0 \| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由(1.3.1)式知,当 $n > N$ 时,恒有:

$$\| Ax_n - Ax_0 \| \leqslant \| Ax_n - A_k x_n \| + \| A_k x_n - A_k x_0 \| + \| A_k x_0 - Ax_0 \|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

故 $Ax_n \to Ax_0$，所以 A 为连续算子.

再证 A 是紧算子. 设 S 是 D 中任一有界集. $\forall \varepsilon > 0$，由假设可取定一个 n，使 $\| A_n x - Ax \| < \varepsilon (\forall x \in S)$，故 $A_n(S)$ 是 $A(S)$ 的一个 ε - 网，但因 A_n 全连续，故 $A_n(S)$ 是列紧集，根据定理 1.1.3 知，$A(S)$ 也是列紧集. #

例 1.3.1 考察 Урысон 算子：

$$A\varphi(x) = \int_G k(x, y, \varphi(y)) \mathrm{d}y \tag{1.3.2}$$

其中函数 $k(x, y, u)$ 定义在 $(x, y) \in G \times G = \hat{G}, -\infty < u < +\infty$ 上，G 为 R^N 中某有界闭集，则当 $k(x, y, u)$ 在 $(x, y) \in G \times G, -\infty < u < +\infty$ 上连续时，Урысон 算子 $A: C(G) \to C(G)$ 全连续.

证 设 S 是 $C(G)$ 中有界集：$\| \varphi \|_C \leqslant a, \forall \varphi \in S$，于是

$$| A\varphi(x) | = \left| \int_G k(x, y, \varphi(y)) \mathrm{d}y \right| \leqslant M \mathrm{mes} G \quad (\forall \varphi \in S),$$

其中 $M = \max\limits_{(x,y) \in \hat{G}, |u| \leqslant a} | k(x, y, u) |$，故 $A(S)$ 中诸函数一致有界.

$\forall \varepsilon > 0$，由于 $k(x, y, u)$ 在有界闭集 $(x, y) \in \hat{G}, |u| \leqslant a$ 上连续，从而一致连续，故 $\exists \delta > 0$，使当 $| x_1 - x_2 | < \delta, (x_1, x_2 \in G)$ 时，恒有：

$$| k(x_1, y, u) - k(x_2, y, u) | < \frac{\varepsilon}{\mathrm{mes} G}, \forall y \in G, | u | \leqslant a,$$

于是 $\forall \varphi \in S$，当 $| x_1 - x_2 | < \delta$ 时，恒有：

$$\begin{aligned} & | A\varphi(x_1) - A\varphi(x_2) | \\ = & \left| \int_G [k(x_1, y, \varphi(y)) - k(x_2, y, \varphi(y))] \mathrm{d}y \right| \\ < & \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{mes} G}\right) \mathrm{mes} G = \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $A(S)$ 中诸函数等度连续. 据定理 1.1.4 知 A 是映 $C(G)$ 入 $C(G)$

的紧算子.

下证 A 的连续性.设 $\varphi_n, \varphi_0 \in C(G)$, $\|\varphi_n - \varphi_0\|_C \to 0(n \to \infty)$.令 $a = \sup\{\|\varphi_0\|_C, \|\varphi_1\|_C, \|\varphi_2\|_C, \cdots\}$, $\forall \varepsilon > 0$,由 $k(x, y, u)$ 在$(x, y) \in \hat{G}$, $|u| \leqslant a$ 的一致连续性知, $\exists \delta > 0$,使当 $|u_1 - u_2| < \delta(|u_1| \leqslant a, |u_2| \leqslant a)$ 时,恒有:

$$|k(x,y,u_1) - k(x,y,u_2)| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}G}, \quad \forall (x,y) \in \hat{G}.$$

取 N,使当 $n > N$ 时,恒有 $\|\varphi_n - \varphi_0\|_C < \delta$,于是当 $n > N$ 时,有:

$$|A\varphi_n(x) - A\varphi_0(x)| \leqslant \int_G |k(x,y,\varphi_n(y)) - k(x,y,\varphi_0(y))| \mathrm{d}y$$

$$< \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}G}\right)\mathrm{mes}G = \varepsilon,$$

从而 $\|A\varphi_n - A\varphi_0\|_C < \varepsilon$,故 $\|A\varphi_n - A\varphi_0\|_C \to 0$. #

下面介绍 Fréchet 微分和 Fréchet 导算子的概念.

定义 1.3.5 设 E_1 和 E_2 是Banach空间, D 是E_1 中某开集, $A: D \to E_2$, $x_0 \in D$,且 $x_0 + \Delta x \in D$,若存在有界线性算子 $B \in B(E_1, E_2)$,使(在 x_0 点附近)

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} = \frac{\|A(x_0 + \Delta x) - Ax_0 - B\Delta x\|}{\|\Delta x\|} = 0 \tag{1.3.3}$$

则称算子 A 在点x_0处 Fréchet **可微**, $B\Delta x$ 叫做A 在x_0处对于 Δx 的 Fréchet **微分**,记为 $\mathrm{d}[A(x_0)\Delta x]$;算子 B 叫做A 在x_0点的 Fréchet **导算子**,记为 $A'(x_0)$,即 $B = A'(x_0)$;又有

$$\mathrm{d}[A(x_0)\Delta x] = A'(x_0)\Delta x.$$

注 3:① 极限式(1.3.3) 可表示为:

$$\|A(x_0 + \Delta x) - Ax_0 - B\Delta x\| \leqslant \|\Delta x\| \cdot \varepsilon(\|\Delta x\|). \tag{1.3.4}$$

($\varepsilon(\alpha)$ 是正的实函数,且 $\alpha \to 0$ 时, $\varepsilon(\alpha) \to 0$.)

② 当 $E_1 = E_2 = R^1$ 时,Fréchet 导算子与平常导函数概念一致,

此时 $A'(x_0)=f'(x_0)$ 是一个数,即 R^1 空间中的一个元,从而也是 R^1 上的一个线性有界泛函.

③ 此处 A 一般为非线性算子,而 $A'(x_0)=B$ 必为有界线性算子.若 $A\in B(E_1,E_2)$,即 A 为有界线性算子时,必 $A'(x_0)=A(\forall x_0\in E_1)$.

事实上,因为 A 为有界线性算子,所以 $A(x_0+\Delta x)-Ax_0-A\Delta x=\theta$,从而对 $\forall x_0\in E_1$,$A'(x_0)=B=A$.即有界线性算子的导算子为常算子.这是数学分析中$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha t)=\alpha$($\alpha$ 为常数)的自然推广.

④Fréchet 导算子是惟一的,即若除 B 外,还有 $B_1\in B(E_1,E_2)$ 也满足(1.3.3)式或(1.3.4)式,则 $B_1=B$.

事实上,因为

$$\begin{aligned}0&\leqslant \|B\Delta x-B_1\Delta x\|\\&=\|[A(x_0+\Delta x)-Ax_0-B_1\Delta x]\\&\quad-[A(x_0+\Delta x)-Ax_0-B\Delta x]\|\\&\leqslant\|A(x_0+\Delta x)-Ax_0-B_1\Delta x\|\\&\quad+\|A(x_0+\Delta x)-Ax_0-B\Delta x\|\\&\leqslant\|\Delta x\|\varepsilon(\|\Delta x\|)+\|\Delta x\|\varepsilon_1(\|\Delta x\|),\end{aligned}$$

从而有

$$0\leqslant\|B-B_1\|\leqslant\varepsilon(\|\Delta x\|)+\varepsilon_1(\|\Delta x\|).$$

上式左端与 Δx 无关,从而 $B=B_1$.

⑤ 若 A_1,A_2 均在点 x_0 处 Fréchet 可微,则 $\alpha A_1+\beta A_2$(α,β 均为实数)也在 x_0 处 Fréchet 可微,并且

$$(\alpha A_1+\beta A_2)'(x_0)=\alpha A_1'(x_0)+\beta A_2'(x_0).$$

⑥ 常算子的 Fréchet 导算子为 θ,即若

$$Ax\equiv y_0\in E_2(\forall x\in E_1),$$

则

$$A'(x_0)=\theta(\forall x_0\in E_1).$$

⑦ 若 A 在 x_0 处 Fréchet 可微,则 A 在 x_0 点连续.