各版本适用

立足高考大纲 探究知识内涵
解读奥赛真题 揭示思维规律
点击高考难题 登上名校殿堂

第6版

高考·奥赛对接辅导

高中数学 2

主编 蔡 晔

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高考·奥赛对接辅导

高中数学 2

第 6 版

主　编　蔡　晔
副主编　王海奇
编　者　刘　林　杨传彬　赵振红　王青仁
刘宗宝　薛志虎　李学镇　卢建涛
刘跃先　解玉红　牛本富　李成国
宋　曼　李国丽　汪　莉　李丽丽

机械工业出版社

本系列书以新课标人教版教材知识体系为主线，兼顾其他版本教材的知识体系，将整个高中阶段的内容按知识模块进行编排。每一章节中，既有对高中阶段所应掌握的重点知识的讲解归纳，又有对与内容相关的近几年各地具有代表性的高考真题、竞赛题的归类整理和解析；同时还针对以后高考的趋势和方向，设计用于学生自练自评的练习题。本书既可用于学生同步巩固复习与训练，也适用于高考的第一轮复习。

图书在版编目(CIP)数据

高考·奥赛对接辅导．高中数学 2/蔡晔主编．—6 版．—北京：机械工业出版社，2011.4（2012.1重印）

ISBN 978-7-111-33820-8

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①蔡…　Ⅲ.①中学数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 046218 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
策划编辑：马文涛　胡　明　　责任编辑：马文涛　贾　雪
责任印制：杨　曦
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2012 年 1 月第 6 版·第 4 次印刷
148mm × 210mm·10.625 印张·336 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-33820-8
定价：18.50 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务
社服务中心：(010)88361066
销售一部：(010)68326294
销售二部：(010)88379649
读者购书热线：(010)88379203
网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

前　言

编写定位

编者精心编写的“高考·奥赛对接辅导”系列书立足教材、着眼高考、面向竞赛，融高考和竞赛于一体，期望为同学们提供最全面、最实用、最完备的高考常考知识点和竞赛解题方法。

本系列书内容的难度定位在中等偏上，以新课标、高考大纲中的重、难点及竞赛中的常考知识拓展点为基础，结合近年来经典的高考难题和典型的竞赛题，介绍解较难题目的方法，培养解决问题的能力，并通过练习题及时巩固，引导创新。

编写特点

1. 导向性　本书全面反映了近几年高考和竞赛的题型，详细介绍了的所有知识点以及解题技巧，体现出学科内不同知识板块间的综合联系，侧重考查学生的能力、素质，从而将未来高考和竞赛的趋势全面展现出来。

2. 新颖性　本书所选的例题是精心筛选的近几年的高考题和国际、国内竞赛题，内容新、题型新。大多数例题虽具一定难度，但难而不偏，具有代表性，且解题方法灵活。

本系列书自面世以来，得到了读者朋友的一致认可。本着与时俱进的原则和精益求精的态度，同时也为了答谢读者的厚爱，我们组织了一批有经验的专家和勇于创新的一线优秀青年教师，分析研究近年来全国各地、各类竞赛和高考的新变化，对原书内容进行了必要的修订和优化，期望能为同学们迎接升学考试和竞赛复习助一臂之力。

由于编写时间较紧，可能存在一些缺漏，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

必修五

第一章　解三角形

考点对接

一、正弦定理

在$\triangle ABC$中，各边与它所对角的正弦比相等，

即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，其中$R$为三角形外接圆的半径.

利用正弦定理，可解决以下两类有关三角形的问题：

1. 已知两角和任一边，求其他两边和一角；

2. 已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角（从而进一步求出其他的边和角）.

二、余弦定理

三角形任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍，

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cdot\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$

变形公式：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

利用余弦定理，可解决以下两类有关三角形的问题：

1. 已知三边，求三个角；

2. 已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.

特别提示：三角形中的三角变换，除了应用上述公式和上述变换方法外，还要注意三角形自身的特点.

(1)角的变换

因为在$\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$，所以$\sin(A+B)=\sin C$；$\cos(A+B)=-\cos C$；$\tan(A+B)=-\tan C$. $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$，$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$.

(2)三角形边、角关系定理及面积公式.

面积公式：$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C=r\cdot p=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中$r$为三角形内切圆的半径，$p$为周长之半.

思维对接

考点1 利用正、余弦定理判断三角形的形状

例1 在$\triangle ABC$中，已知$a-b=c\cos B-c\cos A$，判断此三角形的形状.

【分析】 方法一，用正弦定理，把已知条件变为纯三角函数关系. 方法二，由余弦定理，把已知条件变为边的关系式.

【解】 解法一：$2R\sin A-2R\sin B=2R\sin C\cos B-2R\sin C\cos A$.

$2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}=\sin C\left(-2\sin\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}\right)$，

$\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}$，

$\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\left(1-2\cos^2\frac{C}{2}\right)=0$，

$\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\cos C=0$，

$\because\sin\frac{C}{2}\neq0$，$\therefore\sin\frac{A-B}{2}=0$或$\cos C=0$.

由$\sin\frac{A-B}{2}=0$，$-\frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{A-B}{2}=0$，得$A=B$.

由$\cos C=0$，及$0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{2}$.

因此原三角形是等腰三角形或直角三角形.

解法二：$a-b=c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

$a^3-b^3-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2=0$，

$(a-b)(a^2+ab+b^2)-ab(a-b)-c^2(a-b)=0$，

即$(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$，于是 $a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$. 因此，原三角形是等腰三角形或直角三角形.

方法总结

可通过边的关系或角的关系来判断三角形的形状.

例2 已知$\triangle ABC$的三边 a,b,c 和三内角 A,B,C 满足条件 $\dfrac{c}{\cos\dfrac{C}{2}}=a\cdot\cot B+b\cdot\cot A$，试判定此三角形的形状.

【解】 由已知条件和正弦定理得

$$2\sin\frac{C}{2}=\frac{\sin A}{\sin B}\cos B+\frac{\sin B}{\sin A}\cos A$$

即 $\sqrt{2(1-\cos C)}=\dfrac{a}{b}\cos B+\dfrac{b}{a}\cos A$

再由余弦定理得

$$\sqrt{2-\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}}=\frac{a}{b}\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{b}{a}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

上式两边平方，整理得

$(a-b)^2[(a-b)^2(a+b)^2+2c^2(a^2+b^2+4ab)+c^4]=0$

因为中括号内式子大于 0，所以$(a-b)^2=0$ 即 $a=b$.

所以$\triangle ABC$为等腰三角形.

方法总结

要判断三角形的形状，一般考虑是否为等腰三角形、等边三角形、直角三角形等.

考点2　利用正、余弦定理解三角形

例3（2009 · 广东）已知$\triangle ABC$中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a=c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$且 $A=75°$，则 b 等于　（　　）

A. 2　　B. $4+2\sqrt{3}$　　C. $4-2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

【分析】 $\sin A=\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 由 $a=c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 可知，$C=75^\circ$，所以 $B=30^\circ$，$\sin B=\dfrac{1}{2}$. 由正弦定理得 $b=\dfrac{a}{\sin A}\cdot\sin B=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}\times\dfrac{1}{2}=2$，故选 A

【答案】 A

例4（2007·全国卷Ⅰ）设锐角三角形 ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a=2b\sin A$.

(1)求 B 的大小；

(2)求 $\cos A+\sin C$ 的取值范围.

【解】 (1)由 $a=2b\sin A$，根据正弦定理得 $\sin A=2\sin B\sin A$，

所以 $\sin B=\dfrac{1}{2}$，

由△ABC 为锐角三角形得 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

(2)
$$\begin{aligned}\cos A+\sin C&=\cos A+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}-A\right)\\&=\cos A+\sin\left(\frac{\pi}{6}+A\right)\\&=\cos A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\\&=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

由△ABC 为锐角三角形知，

$\dfrac{\pi}{2}>A>\dfrac{\pi}{2}-B$，$\dfrac{\pi}{2}-B=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$.

$\dfrac{2\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{6}$，

所以 $\dfrac{1}{2}<\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由此有 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}$，

所以，$\cos A+\sin C$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

方法总结

要求含有多个或两个三角函数的式子的取值范围，一般是先化为只含有一个三角函数的式子，再求其取值范围.

例5 (2009·全国)设△ABC的内角A,B,C的对边长分别为a,b,c，$\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$，$b^2=ac$，求$B=$________.

【分析】 由$\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$，易想到先将$B=\pi-(A+C)$代入$\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$得$\cos(A-C)-\cos(A+C)=\frac{3}{2}$. 然后利用两角和与差的余弦公式展开得$\sin A\sin C=\frac{3}{4}$；又由$b^2=ac$，利用正弦定理进行边角互化，得$\sin^2 B=\sin A\sin C$，进而得$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$B=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$. 大部分考生做到这里忽略了检验，事实上，当$B=\frac{2\pi}{3}$时，由$\cos B=-\cos(A+C)=-\frac{1}{2}$，进而得$\cos(A-C)=\cos(A+C)+\frac{3}{2}=2>1$，矛盾，应舍去.

也可利用若$b^2=ac$，则$b\leqslant a$或$b\leqslant c$，从而舍去$B=\frac{2\pi}{3}$. 不过这种方法学生不易想到.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

考点3　三角形中三角函数的求值与证明

例6 (2009·四川)在△ABC中，A,B为锐角，角A,B,C所对应的边分别为a,b,c，且$\cos 2A=\frac{3}{5}$，$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(1)求$A+B$的值；

(2)若$a-b=\sqrt{2}-1$，求a,b,c的值.

【分析】 (1)要求$A+B$的值，可先求其对应的余弦值. (2)利用正弦定理求解.

【解】 (1)∵A,B为锐角，$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

又 $\cos 2A=1-2\sin^2 A=\frac{3}{5}$，

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\because 0<A+B<\pi$

$\therefore A+B=\frac{\pi}{4}$.

(2)由(1)知 $C=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得

$\sqrt{5}a=\sqrt{10}b=\sqrt{2}c$，即 $a=\sqrt{2}b, c=\sqrt{5}b$

$\because a-b=\sqrt{2}-1$，

$\therefore \sqrt{2}b-b=\sqrt{2}-1$，$\therefore b=1$

$\therefore a=\sqrt{2}, c=\sqrt{5}$.

例 7 (2007 · 浙江)已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{2}+1$，且 $\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$.

(1)求边 AB 的长；

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{6}\sin C$，求角 C 的度数.

【分析】 已知角求边，可化角为边，用正弦定理可得到 $BC+AC=\sqrt{2}AB$.

【 解 】 (1)由题意及正弦定理得

$AB+BC+AC=\sqrt{2}+1$，

$BC+AC=\sqrt{2}AB$.

两式相减，得 $AB=1$.

(2)由 $\triangle ABC$ 的面积 $\frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin C=\frac{1}{6}\sin C$，得 $BC\cdot AC=\frac{1}{3}$，

由余弦定理，得

$$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}$$
$$=\frac{(AC+BC)^2-2AC\cdot BC-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{1}{2}.$$

所以 $C=60°$.

例 8 (2010·辽宁)在$\triangle ABC$中，a,b,c分别为内角A,B,C的对边，且$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

(1)求A的大小；

(2)求$\sin B+\sin C$的最大值.

【解】 (1)由已知，根据正弦定理得 $2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$，

即 $a^2=b^2+c^2+bc$.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

故 $\cos A=-\frac{1}{2}$，$A=120°$.

(2)由(1)得：

$$\sin B+\sin C=\sin B+\sin(60°-B)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$$
$$=\sin(60°+B).$$

故当$B=30°$时，$\sin B+\sin C$取得最大值1.

例 9 (2010·四川)(1)①证明：两角和的余弦公式 $C_{\alpha+\beta}$：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

②由$C_{\alpha+\beta}$推导两角和的正弦公式 $S_{\alpha+\beta}$：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

(2)已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，$\tan\beta=-\frac{1}{3}$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求$\cos(\alpha+\beta)$.

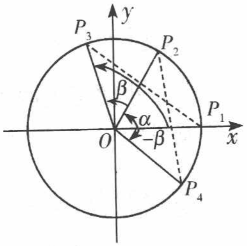

图 1-1-1

【解】 (1)①如图 1-1-1 所示，在直角坐标系Oxy内作单位圆O，并作出角α，β与$-\beta$，使角α的始边为Ox，交$\odot O$于点P_1，终边交$\odot O$于点P_2；角β的始边为OP_2，终边交$\odot O$于点P_3，角$-\beta$的始边为OP_1，终边交$\odot O$于点P_4.

则 $P_1(1,0)$，$P_2(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$P_4(\cos(-\beta),\sin(-\beta))$

由 $P_1P_3=P_2P_4$，及两点间的距离公式，得

$[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta)=[\cos(-\beta)-\cos\alpha]^2+[\sin(-\beta)-\sin\alpha]^2$

展开并整理，得 $2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

②由①易得，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$，$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+(-\beta)\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

(2) $\because \alpha\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，

$\therefore \sin\alpha=-\frac{3}{5}$.

$\because \beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\tan\beta=-\frac{1}{3}$，

$\therefore \cos\beta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.\end{aligned}$$

方法总结

本小题考查两角和的正、余弦公式、诱导公式、同角三角函数的关系等基础知识及运算能力.

考点4 与三角形有关的综合问题

例10 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 a,b,c 成等比数列，且 $\cos B=\frac{3}{4}$.

(1)求 $\cot A+\cot C$ 的值；

(2)设$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}$，求 $a+c$ 的值.

【分析】 (1)综合运用正弦定理、三角化简等方法来求 $\cot A+\cot C$ 的值；

(2)利用向量的数量积定义和余弦定理求出.

【解】 (1)由 $\cos B=\dfrac{3}{4}$得 $\sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

由 $b^2=ac$ 及正弦定理得 $\sin^2 B=\sin A\sin C$.

于是 $\cot A+\cot C=\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin C}=\dfrac{\sin C\cos A+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\dfrac{\sin(A+C)}{\sin^2 B}=\dfrac{\sin B}{\sin^2 B}=\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{4}{7}\sqrt{7}$.

(2)由$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}$，得 $ca\cdot\cos B=\dfrac{3}{2}$，由 $\cos B=\dfrac{3}{4}$，可得 $ca=2$，即 $b^2=2$.

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$ 得 $a^2+c^2=b^2+2ac\cdot\cos B=5$，$(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=5+4=9$，得 $a+c=3$.

例11(2007·全国)在$\triangle ABC$ 中，已知内角 $A=\dfrac{\pi}{3}$，边 $BC=2\sqrt{3}$. 设内角 $B=x$，周长为 y.

(1)求函数 $y=f(x)$的解析式和定义域；

(2)求 y 的最大值.

【分析】 将 $y=f(x)$进行化简是解决第(2)问的关键.

【解】 (1)$\triangle ABC$ 的内角和 $A+B+C=\pi$，由 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$B>0$，$C>0$ 得 $0<B<\dfrac{2\pi}{3}$. 应用正弦定理，知

$$AC=\frac{BC}{\sin A}\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\sin x=4\sin x,$$

$$AB=\frac{BC}{\sin A}\sin C=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right).$$

因为 $y=AB+BC+AC$，

所以 $y=4\sin x+4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+2\sqrt{3}\ \left(0<x<\frac{2\pi}{3}\right)$.

(2)因为 $y=4\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)+2\sqrt{3}$

$$=4\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{3}\ \left(\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}\right)$$

所以，当 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$时，y 取得最大值 $6\sqrt{3}$.

考点5 解三角形的应用举例

例12（2007 · 山东）如图 1-1-2 所示，甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ n mile 的速度向正北方航行，乙船按固定方向匀速直线航行，当甲船位于 A_1 处时，乙船位于甲船的北偏西 105°方向的 B_1 处，此时两船相距 20 n mile，当甲船航行 20 min 到达 A_2 处时，乙船航行到甲船的北偏西 120°方向的 B_2 处，此时两船相距 $10\sqrt{2}$ n mile，问乙船每小时航行多少海里？

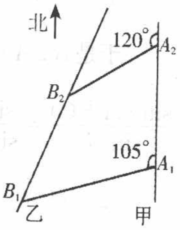

图 1-1-2

【解】 解法一： 如图 1-1-3 所示，连接 A_1B_2，

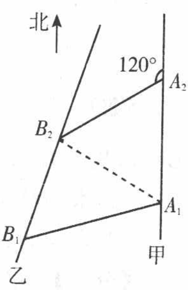

图 1-1-3

由已知 $A_2B_2=10\sqrt{2}$，

$A_1A_2=30\sqrt{2}\times\frac{20}{60}=10\sqrt{2}$，

$\therefore A_1A_2=A_2B_2$，

又$\angle A_1A_2B_2=180°-120°=60°$，

$\therefore\triangle A_1A_2B_2$ 是等边三角形，

$\therefore A_1B_2=A_1A_2=10\sqrt{2}$，由已知，$A_1B_1=20$，

$\angle B_1A_1B_2=105°-60°=45°$，

在$\triangle A_1B_2B_1$ 中，由余弦定理，

$$B_1B_2^2=A_1B_1^2+A_1B_2^2-2A_1B_1\cdot A_1B_2\cdot\cos 45°$$

$$=20^2+(10\sqrt{2})^2-2\times20\times10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=200.$$

$\therefore B_1B_2=10\sqrt{2}$.

因此，乙船速度的大小为$\frac{10\sqrt{2}}{20}\times60=30\sqrt{2}$(n mile/h).

答：乙船每小时航行 $30\sqrt{2}$n mile.

解法二：如图 1-1-4 所示，连接 A_2B_1，由已知 $A_1B_1=20$，$A_1A_2=30\sqrt{2}\times\frac{20}{60}=10\sqrt{2}$，$\angle B_1A_1A_2=105°$，

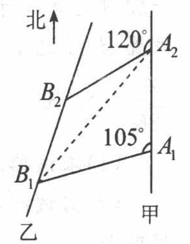

图 1-1-4

$$\cos 105°=\cos(45°+60°)=\cos 45°\cos 60°-\sin 45°\sin 60°=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4},$$

$$\sin 105°=\sin(45°+60°)=\sin 45°\cos 60°+\cos 45°\sin 60°=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

在$\triangle A_2A_1B_1$ 中，由余弦定理，得

$$A_2B_1^2=A_1B_1^2+A_1A_2^2-2A_1B_1\cdot A_1A_2\cdot\cos 105°=(10\sqrt{2})^2+20^2-2\times10\sqrt{2}\times20\times\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}=100(4+2\sqrt{3}).$$

$\therefore A_2B_1=10(1+\sqrt{3})$.

由正弦定理，得，

$$\sin\angle A_1A_2B_1=\frac{A_1B_1}{A_2B_1}\cdot\sin\angle B_1A_1A_2=\frac{20}{10(1+\sqrt{3})}\times\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore\angle A_1A_2B_1=45°$，

即$\angle B_1A_2B_2=60°-45°=15°$，$\cos 15°=\sin 105°=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

在$\triangle B_1A_2B_2$ 中，已知 $A_2B_2=10\sqrt{2}$，由余弦定理，得

$$B_1B_2^2=A_2B_1^2+A_2B_2^2-2A_2B_1\cdot A_2B_2\cdot\cos 15°=10^2(1+\sqrt{3})^2+(10\sqrt{2})^2-2\times10(1+\sqrt{3})\times10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}=200.$$

$\therefore B_1B_2=10\sqrt{2}$，

乙船速度的大小为$\frac{10\sqrt{2}}{20}\times60=30\sqrt{2}$(n mile/h).

答：乙船每小时航行 $30\sqrt{2}$ n mile.

例13（2008·湖南）在一个特定时段内，以点 E 为中心的 7n mile 以内海域被设为警戒水域.点 E 正北 55n mile 处有一个雷达观测站 A.某时刻测得一艘匀速直线行使的船只位于点 A 北偏东 45°且与点 A 相距 $40\sqrt{2}$n mile 的位置 B，经过 40 min 又测得该船已行驶到点 A 北偏东 $45°+\theta$（其中 $\sin\theta=\frac{\sqrt{26}}{26}$，$0°<\theta<90°$）且与点 A 相距 $10\sqrt{13}$n mile 的位置 C.

(1)求该船的行驶速度（单位：n mile/h）；

(2)若该船不改变航行方向继续行驶.判断它是否会进入警戒水域，并说明理由.

【解】 (1)如图 1-1-5 所示，$AB=40\sqrt{2}$，$AC=10\sqrt{13}$，$\angle BAC=\theta$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{26}}{26}$.

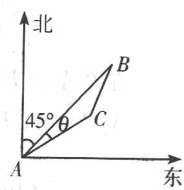

图 1-1-5

由于 $0°<\theta<90°$，所以 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{26}}{26}\right)^2}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$.

由余弦定理得

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\theta}=10\sqrt{5}$.

所以船的行驶速度为$\frac{10\sqrt{5}}{\frac{2}{3}}=15\sqrt{5}$(n mile/h).

(2)解法一：如图 1-1-6 所示，以 A 为原点建立平面直角坐标系，设点 B，C 的坐标分别为 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，BC 与 x 轴的交点为 D.

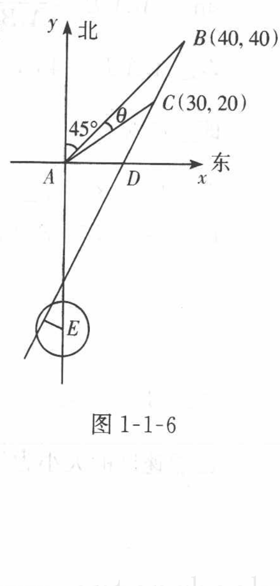

图 1-1-6

由题设有，$x_1=y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=40$，

$x_2=AC\cos\angle CAD=10\sqrt{13}\cos(45°-\theta)=30$，

$y_2=AC\sin\angle CAD=10\sqrt{13}\sin(45°-\theta)=20$.

所以过点 B，C 的直线 l 的斜率 $k=\frac{20}{10}=2$，直线 l 的方程为 $y=2x-40$.

又点 $E(0,-55)$ 到直线 l 的距离 $d=$