

Comprehensive Handbook of Mathematics Symbols

数学符号 理解手册

[日]黑木哲德 著
赵雪梅 译

听说在中国古代，人们曾经用 $+$ 和 $-$ 这两个符号来表示加和减。在现代人的眼中，这两个符号就像两个毫不起眼的图钉。历史上有记载的第一个使用“+”“-”这两个符号的人是德国人约翰内斯·韦德曼（Johannes Widmann）。他在1489年出版的名为“便捷商业计算法”（Behende und hubsche Rechnung auf allen kauffmannschafft）的书中首次使用了这两个符号。

学林出版社

exp

$f: x$

sup

$a+b=b+a$

\div

\exists

\subseteq



数学符号 理解手册

学林出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学符号理解手册 / [日] 黑木哲德著; 赵雪梅
译. —上海: 学林出版社, 2011. 8
ISBN 978 - 7 - 5486 - 0208 - 8

I. ①数… II. ①黑… ②赵… III. ①数学-符号-
基本知识 IV. ①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 146458 号

NATTOKUSURU SUGAKUKIGOU

© Tetsunori Kurogi, 2001

All rights reserved.

Original Japanese edition published by KODANSHA LTD.

数学符号理解手册



作 者——[日] 黑木哲德

翻 译——赵雪梅

责任编辑——吴耀根 齐 力

特约编辑——苏希常

插 图——舒 樱

封面设计——舒 樱

出 版——上海世纪出版股份有限公司

学林出版社(上海钦州南路 81 号 3 楼)

电话: 64515005 传真: 64515005

发 行——上海世纪出版股份有限公司发行中心

(上海福建中路 193 号 www.ewen.cc)

印 刷——上海港东印刷厂

开 本——889×1194 1/32

印 张——9.125

字 数——22 万

版 次——2011 年 8 月第 1 版

2011 年 8 月第 1 次印刷

书 号——ISBN 978 - 7 - 5486 - 0208 - 8/G · 44

定 价——23.00 元

(如发生印刷、装订质量问题,读者可向工厂调换。)



序

人类之所以超脱了动物而成为地球的圣灵,是因为人发明了自己的语言和文字,而数学的符号则是语言文字范畴中最原始而又最精华的部分,它构成了人类逻辑思维、科技进步的基础。

数字是数学符号的基础,不同地域不同种族不同文化的人群几乎选用了相同的数字系统.十进制数字,它与人的十个手指——人类赖以工作的最重要器官——密切相关.而表示数的形式又有如此的相似,不同地域不同种族不同文化的人群表示数的符号都直接和量相关,你看:1,2,3...,一、二、三...和Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ...多么相似。

数学符号的演变和进化是人类智慧积累和进步的集中体现.如果说四则运算的+、-、×、÷是人类记录自然的开始,则∠、⊙、□等开始了人类对空间描述的历史;而 $\int, \frac{\partial}{\partial x}, \lim$ 实现了人类的思维从有限运算向无限运算的飞跃,那么数学符号的组合使用则构成了人类思维与创造的美妙图案.你再看:描绘数列极限的过程奇妙地表示成:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \triangleq \forall \epsilon > 0, \exists N \quad \exists n > N \Rightarrow |x_n - A| < \epsilon.$$

有人说,逻辑是人类思维的顶峰,那表示逻辑的数学符号则是逻辑的天书,U、∩、⊂、⊃、⊕等集合运算的符号把人类的智慧引到了登峰造极的殿堂。

数学的符号,人类智慧的结晶,人类攀登科学高峰的阶梯。

项家祥

译者序

埃及金字塔、中国万里长城、科潘玛雅遗址、日本京都清水寺、法国沙特尔大教堂……这些雄伟壮观的世界遗产不仅见证了人类文明的发展，而且蕴含了丰富的数学知识。伴随着人类在地球上的出现，数学诞生了。

数学可不是个老古董。它像个赶潮流的人似的，紧紧地追随着时代的节奏，不断地发展着，使它在自然科学和社会科学中具有不可动摇的地位。而且，它又不像通天塔上的宝物那样遥遥不可及。它离我们这么近，以至于我们还在牙牙学语时就结识了它。数数、算术、代数、平面几何、立体几何、微积分……这些称呼的变化就是我们长大的标志。这样，数学成了每次升学考中必不可少的科目。

总会从某个学校、某个角落传出诸如此类的话：

“你看呀，这么多奇形怪状的符号，这么多我不认识它而它认识我的公式，记也记不住，烦死人啦……”

“就是嘛，数学怎么这么难。不想学了。”

“可是我觉得数学蛮好玩的嘛。特别是找到解题方法时，好好有成就感。”

“文科还要学高等数学，我还以为进了大学就可以把讨厌的数学丢了昵。”

“公式并不要全部背出来的，它们之间是有联系的。像我，就只记住主要的。到时候，灵活运用就可以了。”

学生时代的我们对数学的评价可谓五花八门、有人欢喜有人忧。我记得自己就抱怨过数学。某些对数学怀有严重抵触情绪的同学还将这种情绪引申为对数学老师的反感呢。如今，我却有这

么一本好书,让我安安静静地复习了一次数学基础知识.这本书就是黑木哲德教授的《数学符号理解手册》.

黑木哲德教授的《数学符号理解手册》以幽默的文笔、精彩的故事和生动的插图,向我们展现了一个趣味盎然的数学王国.他带领我们从 $+$, $-$, \times , \div 开始走访了数学符号家族,作了一次短暂的时间旅行.在这期间,我们不仅了解了每个符号成员的成长故事,而且通过横向联系、纵向延伸,系统地整理了从小学到大学的数学基础知识.在轻松的阅读过程中,孩子们增长了学习数学的兴趣,记住了烦人的数学公式,提高了综合思维的能力;父母们既回味了自己的学生时代,也温故而知新了.

学生们都喜欢阅读课外读物,选择怎样的读物很重要.一本趣味读物可以满足好奇心,提高求知欲.一本好的趣味读物,可以改变学生的好恶.记得上小学时,我读过一本记述大数学家高斯小时候的故事的书,书中介绍了高斯对各种数学题目的解法,譬如说如何巧妙计算1到100的和.那时候,父母建议我不要单纯地看,而要拿出纸和笔,写写做做,再和书上说的对比一下.当我的解法和高斯的不谋而合时,不用父母表扬,自己都会有种自豪感和成就感.《数学符号理解手册》就是一本有益的读物.尽管它不是习题集,可是它帮助你掌握和懂得运用数学公式,这才是解题的关键.

本书作者黑木哲德从事教育工作37年.他在日本著名的名古屋大学理学部取得理学博士学位,现在除了担任日本国立福井大学教育地域科学部的学部长外,还担任日本数学会教育委员会委员长、日本综合学习学会副会长和日本数学协会干事等职务.他虽然潜心研究拓扑几何和微分几何,但始终没有放弃对数学教学工作的研究.他经常到小学、初中和高中去讲课,激发学生学习数学的热情,训练并提高他们的数学综合运用能力.他不仅在日本国内举行讲座,而且还作为日本文部省的使者多次到海外讲学,交流教学经验,促进数学教学兴趣化、轻松化.最近,他作为上

海师范大学客座教授活跃在上海数学教学研究领域. 为了让更多的人分享数学的乐趣, 喜欢这门“枯燥”的学问, 他在百忙中抽空写了这本书. 《数学符号理解手册》这本书出版后, 深受读者喜爱, 再版数次, 还进入过日本图书销售排行榜, 并且连续获得亚马逊五星. 作者的另一本书《入门算数学》也享有同样的殊荣. 这次, 通过《数学符号理解手册》的中译本, 作者表达了他的心愿:

Mathematics has no passport, as he is ours-human being's. In fact, there have been many Chinese mathematicians left their names in the history of mathematics. We respected their achievement. I would like to share my enjoyment at mathematics with Chinese readers. I hope some one of you could solve those unproved theorems and hypotheses in the future.

(数学作为全人类的财产, 是没有国界的. 许许多多的中国数学家将他们的姓名铭刻在数学历史的长河中, 受世人敬仰. 能够和中国的读者们分享数学的乐趣是我的荣幸. 希望在将来, 你们中的成员能够为那些尚未证明的定理和猜想找到答案.)

《数学符号理解手册》的中译本始终得到黑木哲德教授的支持和鼓励. 舒樱为中译本所作的插图生动活泼, 富有创意, 有助于我们理解基本的数学概念. 刘培建承担了有关集合内容的初译, 而且为中译本汇编了数学家们的简短生平介绍, 方便读者阅读. 在此感谢他们的支持和协助.

作者原序

人们常说：社会的进步，只会产生需要渊博知识的脑力劳动和单纯的体力劳动的两极分化。也有人说：单纯的体力劳动迟早会被电脑和机器人取代……你看，这么一来就找不到回避数学的理由了。为什么这么说呢？那是因为无论何种形式的渊博知识都离不开数学及其思维方法。

数学因为它的抽象性，使得众多符号纷纷登场。也由此，让人觉得数学好难学。尤其是在更深奥的领域内，使用符号的场合也就更多。

回顾悠悠的人类历史长河，不难发现，为了更简洁、为了更容易书写、为了解决更多的问题，经过一代人接着一代人的钻研，数学符号相继诞生了。

同时，通过符号化，数学不再是属于数学家的专利，而成为平凡的我们也能接触的学科。符号的使用和发展可以说体现了知识的平等化过程。

21世纪将不可避免地沉浸在符号的海洋中。习惯了一些符号化的我们只要作些小小的努力，理解数学就不是一件难事了。这时，再添上一点点耐心的倾听就更理想了。

本书是一本通过数学符号来对从小学算术到大学微积分的内容作解说的书。原则上，每一讲都是独立的，所包含的内容也是形形色色的。有的讲座连躺着都能阅读，而有的讲座则需要点纸和笔做帮手。出于大众化的考虑，我尽量留意不使用数学公式，而采用通俗易懂的说明方法。为此，数学的严密性作出了牺牲。当然，有的讲座中会出现不得不使用的专门知识或者数学公式；并且，还会出现重复说明的情况。

如果这本书能够成为想重温数学以及更进一步了解数学的人的领航员的话,我深感荣幸.另外,新时代是终身学习的时代,大家能够从与习惯不同的层面出发接触数学,从而对数学产生更大的兴趣,那我会更加喜悦.

我还有一个奢望,那就是:本书能够成为高中生一窥数学的魔镜;能够成为大学生学习的好帮手;能够成为爱好数学、希望深入了解数学的朋友的密友.如果本书有幸得到各位宠爱,使各位爱不释手的话,那将是我莫大的幸福.

写完整本书,发现在个别内容上稍有操之过急、流于形式,整体上,我的想法是以符号的观点为出发点,为了更加浅显易懂和更加趣味化,对已经熟知的内容多下了点功夫,多少做到使其色香味俱全.

最后,为了轻松阅读,还添加了漫画.负责漫画插图的是数学教师高塚直子.她的画可以使人心情轻松,希望这些漫画能够给各位带来快乐.

本书的策划意向来自编辑部的大塚记央,没有他的大力协助本书是完不成的.在此对他的坚持不懈的耐心等待表示感谢.

本书是我敬献给大家的一份舒心的礼物,衷心希望大家能够喜欢它.

写于 2001 年 8 月吉日



目 录

序	项家祥	1
译者序		1
作者原序		1

第 I 部 出现在小学、初中和高中的数学符号

第 1 讲	+, - 为什么 $-(-1)=1$	3
第 2 讲	\times, \div 0.999...是个闷闷不乐的数字	7
第 3 讲	∞ 无限的魔力	12
第 4 讲	% 没人赢你.....	15
第 5 讲	$\sqrt{\quad}$ 为什么它的形状奇特?	17
第 6 讲	π 用 π 赚大笔大笔的钱	22
第 7 讲	\sin, \cos, \tan 仙女下凡	26
第 8 讲	\ln, \log 天文学上的魔术	31
第 9 讲	e 伟人的结晶	35
第 10 讲	e^x, \exp 数学的超人	37
第 11 讲	i 真实的虚幻	40
第 12 讲	\sum 懒人的符号	46
第 13 讲	\lim 与爱挑剔的恋人相处	51
第 14 讲	dx/dy 微分学的成长过程	54
第 15 讲	\int 堆积成山	59
第 16 讲	i, j, k 实数、虚数后面会是谁?	63
第 17 讲	Δ, ∇, \angle 符号代表形体	66
第 18 讲	∞, ∞ 相似是不断的重复.....	68
第 19 讲	\perp, \angle, \parallel 三角形内角和是 180° 吗?	71

第 20 讲	$\therefore, \because, \text{iff}, \Leftrightarrow$ 种瓜得瓜, 种豆得豆	74
第 21 讲	$(), \{ \}, []$ 400 年历史的数学三明治	76
第 22 讲	G. C. M, L. C. M 不是 Giants, Carp 和 Marines	80
第 23 讲	!, C_n^m, P_n^m 瞬间长大的数字	84
第 24 讲	$P(A), E(X)$ 赌博上的数学	89

第 II 部 大学的数学文化、集合

第 25 讲	\sinh, \cosh, \tanh 符号的兄弟情义	95
第 26 讲	$=, \infty, \equiv$ 看似相同, 其实不同	98
第 27 讲	$\leq (\leq, \leq), <$ 数学不平等起源论	102
第 28 讲	\subset, \subseteq 数学的传说从这儿开始	106
第 29 讲	\cup, \cap 女歌手的交集	108
第 30 讲	\in, \forall, \exists 浜崎步 $\in X$	111
第 31 讲	$\mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{C}$ 数的缝隙在哪里?	113
第 32 讲	$\{ \}$ 数学的相扑比赛场	116
第 33 讲	\aleph 看似神秘的符号	119
第 34 讲	$f: X \rightarrow Y$ 什么是一一对应?	122
第 35 讲	$\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ 教教哈姆雷特学数学	126
第 36 讲	ϵ, δ 让人头疼的“ $\epsilon - \delta$ ”语言	129
第 37 讲	\max, \sup, \min, \inf 大大小小、各不相同	133
第 38 讲	O, o “大鸥”和“小鸥”的区别	137
第 39 讲	$\overline{\lim}, \underline{\lim}$ 上下收敛的话题	140

第 III 部 矩阵、矢量、线性代数

第 40 讲	sgn 由搭桥到行列式	147
第 41 讲	δ_{ij} 数学上的节约开支	151
第 42 讲	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 方程组的一次性解法	154

第 43 讲	rank 在数学中也有贵贱之分吗?	158
第 44 讲	dim 探索 4 维	163
第 45 讲	Im, Ker 全部由 0 支配	166
第 46 讲	'A, A*, trA 外形亮丽且相当贵重	170
第 47 讲	$\rightarrow, (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 向量是何方人物?	175
第 48 讲	$ x , x $ 圆难道不是球形的?	178
第 49 讲	\oplus 新的空间的诞生	181
第 50 讲	W^\perp, W^* 也是向量空间哟	184

第 IV 部 你也是数学超人, 攻陷微积分及其同盟

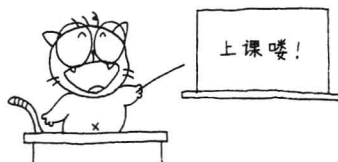
第 51 讲	$d(P, Q)$ 不局限于长短的距离	189
第 52 讲	$\bar{A}, \overset{\circ}{A}, \partial A$ 现代数学的入口	192
第 53 讲	δ_x 难以置信的函数	195
第 54 讲	\cdot 内积——内在的积?	198
第 55 讲	\times 外积——外部的积?	202
第 56 讲	$\partial/\partial x$ 偏微商并不可怕	207
第 57 讲	$\partial(f, g)/\partial(x, y)$ 多变量函数的积分的诀窍	212
第 58 讲	\int_C 线积分是什么样的积分?	217
第 59 讲	\iint 二重积分是	223
第 60 讲	grad, ∇ 日本的经济陷入无底的泥沼中?	229
第 61 讲	div 用数学语言描述流动	235
第 62 讲	rot, curl 地球的旋转	239
第 63 讲	$\Gamma(s)$ $n!$ 的扩展	244
希腊字母表及其惯用方法		248
参考文献		250
数学家		251
索引		268

第 I 部

出现在小学、初中和
高中的数学符号

第 1 讲 +, -

为什么 $-(-1)=1$



传说在中国古代,人们用 $+$ 和 $-$ 这两个符号来表示加和减。但是,在现代人的眼中,这两个符号就像两个毫不起眼的图钉。

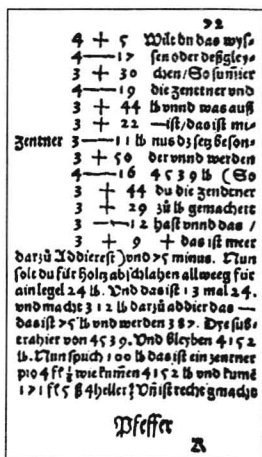
第一个使用 $+$ 和 $-$ 这两个符号的人是德国人约翰内斯·韦德曼(Widmann, J.)。他在 1489 年出版的《适合所有商业的漂亮敏捷的算法》中首次使用了这两个符号。起初,这两个符号并不是表示运算符号的加号($+$)和减号($-$),而是用来表示量的多少,比如 $+1$ 表示多 1 个, -2 表示少 2 个。

$+$ 和 $-$ 这两个符号具有两种不同的含义。一种是像 $+7$ 的 $+$ 、 -8 的 $-$,表示数字的正值和负值。另一种是作为运算符号在计算中使用。

在 $2+3$ 中, $+$ 是表示“2 和 3 相加”的运算符号。在 $9-5$ 中, $-$ 是表示“从 9 中减去 5”的运算符号。

但是,在像 $2-5=-3$ 这样的算式中就不那么简单了。等号左边的一是运算符号的减号,等号右边的一是代表负值的符号。

一般情况下,正数前的“ $+$ ”号是被省略的。例如正 7,写成 7 而不是 $+7$,也不会写成 $2+5=+7$ 。由于数学基本上是以“简单最好”为原则的(the simple is the best),在不造成混淆的前提下,能省略的部分都可以被省略,因此,只要能够明确表明正数和负数的区别,写上一号作为负数的符号,也就没有必要再一个一个地写上 $+$



(韦德曼所写的书中的一页,摘自《数学史》,大竹出版)

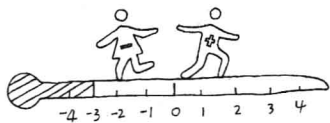
号了。

在履历表之类的表格中,经常出现“在男或女中选其一画圈或打钩”。从印刷方便的角度来看,只要在两者之间选一种来印刷. 与自己的性别不同时,在上面画个叉就行了. 可是这样一来,最终会因为选哪种性别来印刷而引发针锋相对的辩论. 可见,在这种情况下,“简单最好”就不是一种明智的做法了。

无可非议的,“ $2+3$ ”不能写成 23 或者“二十三”. 作为运算符号的 $+$ 和 $-$ 是不能被省略的. 还要提醒大家注意,只要在一号上添上一笔,它就会摇身一变,变成十号. 老师们在批阅试卷时,扣 5 分记作 -5 ,可转眼之间变成了 $+5$. “老师,这儿少了 5 分”,理直气壮的来问为什么的学生还真有那么几位. 也是,给这种会动小脑筋的学生加 5 分还是可以考虑的哟. (It is a joke!)

可见,表示正负的符号 $+$ 、 $-$,其符号本身也能运用在演算上(或许叫运算更为合适).

让我们在脑海中勾画出一条数射线(如同横放着的温度计),以 0 为基准,右侧的是正数,左侧的是负数(冰点以下). 重要的是以 0 为基准的正数和负数处在相反的位置. 以数字 5 为例. 添上 $+$ 号后,这个 $+5$ 其实是原本的 5. 而 -5 以 0 为基准,位于与 5 相反的位置. 我们把带有 $+$ 、 $-$ 这两个符号的情况理解为表示“方向”的概念. 那么, $+$ 号是一个数即使添上它,也不会改变方向的符号. 而 $-$ 号是只要一带上,就表示方向相反的符号. 譬如,东面就变成了西面. 因此, $-(-5)$ 等于 $+5$, $+(-5)$ 等于 -5 .



到初中为止,大家所熟悉的

数的世界称为实数.

在英语中,实数读作“real number”. 因此,大多数情况下,用符号 \mathbf{R} 来表示全体实数.

作为一种常识,大家都知道两个实数 a 和 b 是可以相加的, $a+b$ 的结果也一定是实数. 然而,在数学中,有必要对此作出严谨的定义.

具有以下性质的运算被定义为加法:

(1) 能够交换:

$$a + b = b + a \text{ (称为交换律);}$$

(2) 3个以上相加时,可以改变加法顺序:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ (称为结合律);}$$

(3) 存在一个特别的数 0 (零)能使下式成立:

$$\text{对于任何实数 } a, \text{ 有 } a + 0 = a.$$

(4) 一定存在满足方程 $x + a = 0$ 的数 x .

这个数是 $x = -a$,称为加法运算中 a 的相反数. 这里的一是负数的符号.

具有上述性质的数称为“在加法运算下是封闭的”. 具有这些性质的数的集合称为“群”(group). 实数可以组成一个加法群.

作为演算方法的一是计算满足方程 $z + a = b$ 的数 z 的运算. 也就是说,减法被定义为加法的逆运算. 得到的 $z = b + (-a)$ 写成 $z = b - a$,这就引入了一个新的演算方法——减法运算.

为加法和减法两者之间的自由行走提供保证的构造是被称为“群”的构造. 从这一点上讲,数学也是一门构造的学问.

在全体自然数中,加法和减法无法随意转换(由于自然数不包含负数),这使得自然数成为在加法运算下的不完整结构. 就像大家所体会到的,小学所学的运算方法就不如初中所学的来得运用自如. 学习数学时,重要的是对概念的理解和掌握. 随着年龄的增加,配合智力发展的自由度也在增加. 再比如,高中同学可使用的解题方法就比初中生多.