普通高等学校“十二五”规划教材

力学与电磁学基础

籍延坤　刘惠平　编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

力学与电磁学基础

籍延坤　刘惠平　编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是根据高等学校五年制文科加软件(英语加软件、日语加软件、管理加软件等)专业教学计划,结合作者多年教学经验编写的。全书包括物理学导论、质点运动学、质点动力学、静电学、静磁学和电磁感应。

本书在保持内容简练和通俗易懂的基础上,体现了概念准确、创意新颖和逻辑性强的特色,适合作为高等学校非理工专业大学物理教材。

图书在版编目(CIP)数据

力学与电磁学基础/籍延坤,刘惠平主编. —北京:中国铁道出版社,2011.8

普通高等学校"十二五"规划教材

ISBN 978-7-113-13408-2

Ⅰ.①力… Ⅱ.①籍… ②刘… Ⅲ.①力学—高等学校—教材②电磁学—高等学校—教材 Ⅳ.①03②0441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 164371 号

书　　名:力学与电磁学基础
作　　者:籍延坤　刘惠平　编著

策划编辑:李小军　　读者热线:400-668-0820
责任编辑:李小军　　封面设计:付　巍
编辑助理:孟　利　　封面制作:白　雪
责任印制:李　佳

出版发行:中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街 8 号　　邮政编码:100054)
印　　刷:三河兴达印务有限公司
版　　次:2011 年 8 月第 1 版　　2011 年 8 月第 1 次印刷
开　　本:700mm×1000mm　1/16　　印张:14.25　　字数:284 千
印　　数:1～2 600 册
书　　号:ISBN 978-7-113-13408-2
定　　价:24.00

前　言

物理学是整个自然科学和工程技术的基础，大学物理是高等学校各个专业的重要基础课。它所阐述的物理基础知识、基本思想、基本规律和基本方法，不仅是学生后续专业课的基础，也是全面培养和提高学生科学素质、科学的思维方法和科学研究能力的重要内容。

进入21世纪，科学技术的飞速发展对人才培养提出了新的要求，高等教育从“精英教育”走向普及。为适应市场经济对人才普适性的要求，高等教育强化基础课程，实行通才教育，已是大势所趋。为了适应新形势下高等教育对大学物理改革发展和实际教学的需要，我们在多年教学实践和教学研究的基础上，结合我校开办的英语加软件、日语加软件和工商管理加软件五年制专业后续课程的基本要求，编写了《力学与电磁学基础》作为这三个专业的“大学物理”课程教材。

本书针对文科学生基础，侧重于陈述力学和电磁学的基本知识、基本概念、基本原理和基本定律，突出力学和电磁学知识的完整性、逻辑性和准确性，以达到基本训练要求为度，精选了一些选择题、填空题和计算题，避免难题和偏题。例题以紧扣每部分教学内容的典型题为主，个别定理的较为复杂的数学证明和个别小结均用星号“*”表明，仅供参考和理解，不要求掌握。

本书主要由籍延坤、刘惠平编著。参与本书辅助工作的还有：邹滨雁、段志欣、姜晓宜。

编著者

2011年6月

目 录

第零章

物理学导论

第一节　学习大学物理的目的和方法

一、文科学生为什么要学习“大学物理”

(1)时代发展对人才的需要。著名的建筑学家和建筑教育学家梁思成先生曾经说过“科技与人文分离导致了两种畸形人的出现:只懂技术而灵魂苍白的空心人和不懂科技奢谈人文的边缘人”;著名的物理学家吴健雄女士也曾经说过“为了避免社会可持续发展中的危机,消除现代文化中两种文化——科学文化和人文文化之间的隔阂是当前一个刻不容缓的问题”。在大学中对文科学生开设物理课程正是消除这两种文化隔阂的有效举措之一。所以说,20 世纪初的学术巨匠,是一批学贯中西的人,而 21 世纪的大师,将出自那些文理兼通的人。

(2)物理学是自然科学的基础,物理学的发展是许多新兴学科、交叉学科和新技术学科产生、成长和发展的基础和前导。

物理学作为研究自然界最普遍规律的科学和最成熟的自然科学,其思想方法是科学方法的典型代表,对世界观的形成所起的作用是直接的。物理学的发展对整个人类文化的发展都产生了深刻的影响 。

物理学也是我们后续专业课的基础,比如,材料力学、理论力学、电路、电工等学科都要用到物理知识,所以要想学好后续课必须学好物理。

(3)物理学是提高分析问题和解决问题能力的一门很重要学科。即学生通过学习大学物理中的基本概念、基本原理和定律以及研究问题的方法可以提高分析问题和解决问题的能力。

(4)通过学习大学物理学,可以学到一种科学的思维方法,正如一个古老的故事所讲的那样,学生从老师那里得到的是点石成金的法则,而不是一堆金子。

(5)通过学习基础物理学,学生可以了解现代物理的最新发展以及对于当代科技有重大影响的物理效应的应用和新技术。

二、学习大学物理的方法

(1)坚持实践、认识、再实践、再认识的方法。物理学是以实验为基础的学科,观察

和实验是研究物理学的基本方法。要注意运用物理学的基本理论去解释自然界、生产实践中的物理现象，解决实际问题，丰富深化理论，在学习和掌握物理知识的过程中培养自己的创新意识和创造能力。

（2）深刻理解物理概念。学习物理要注重课程内容的内在联系、清晰的条理和严谨的逻辑，对物理概念、规律、物理图像要有透彻的理解，努力掌握物理学的研究方法、教学描述语言（微积分和矢量分析）等。

（3）注意利用教材中的问题。通过对教材中习题的思考、讨论、练习，可以深化对物理概念的理解，强化对知识综合能力的训练，很多问题的结论也成为学习后续课的基础。科学问题的讨论有助于创造性思维活动，能使思维变得活跃，能激发出灵感，使解决问题的方案一触即发。

（4）养成良好的学习习惯，认真完成课后作业，以帮助熟练地掌握和运用有关定理和定律。

第二节　预备数学知识

一、坐标系

1. 参考系

物理学研究对象之一是物体的运动。运动是相对的，为了定性研究物体的运动，我们总是选择其他物体作参考，习惯上把在研究物体运动时被选择作为参考标准的物体称为参考系。例如研究地球绕太阳公转，常选太阳为参考系；研究人造地球卫星的运动，常选地球为参考系；而且在研究的问题中，没有声明选哪个物体为参考系，均指以地球为参考系。

2. 坐标系

为了定量描述物体的运动，需要在参考系上固定一组有正负方向（包括指向）和单位长度的直线组成特殊框架，我们把这个特殊框架称为坐标系。

坐标系有多种，如数学上的空间直角坐标系、平面直角坐标系、直线坐标系、平面极坐标系、柱坐标系、球坐标系和物理上的平面自然坐标系（简称自然坐标系）。自然坐标系是这样建立的，如图 0-1 所示，当一个质点在平面上运动轨迹已知，即它的形状、大小、轨迹上各点切向和法向已知，则选轨迹为参考系，在轨迹上选择一个参考点 O，规定在参考点的一侧的点到参考点的曲线距离 s 为正，另一侧的点到参考点的曲线距离 s 为负，我们把 s 称为**自然坐标**。自然坐标表示了质点在轨迹上的位置状态，质点自然坐标增加的方向为轨迹的**切向正向**，其单位矢量用 $\vec{\tau}$ 表示。与切向正交并指向轨迹凹向的方向为轨迹的法向正

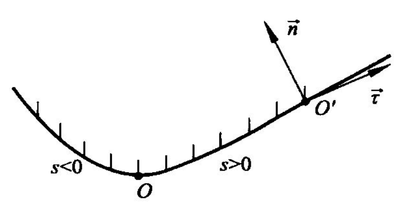

图 0-1

向，其单位矢量用 $\vec{n}$ 表示，而**轨迹切向直线和法向直线构成的框架称为自然坐标系**，实际上它是由直线坐标系的直线弯曲成曲线而得到的，直线坐标系是自然坐标系的特例。

二、矢量代数

1. 矢量的定义

在大学物理学中所遇到的量，可以分为两类，一类量完全由数值即可作出充分描述，它的相加服从代数运算法则，这里数值的含义包括正负在内，质量、路程、温度、电流、电压、能量等物理量均是标量或数量，即加法服从代数运算法则的量称为**标量**；另一类量不仅有大小而且有方向，它的相加服从平行四边形法则，即我们用有向线段的长度表示这类量的大小，有向线段的方向表示这类量的方向，以相加的两个量为邻边作一平行四边形，则二者的和即可用图 0-2 所示的平行四边形对角线所表示，这类量叫做矢量或向量，即加法服从平行四边形法则的量称为**矢量或向量**。力、电场强度、磁感应强度、速度等物理量均为矢量，例如河水相对于地球的速度为 $\vec{v}_1$，船相对水的速度为 $\vec{v}_2$，则船相对于地球的速度等于船相对于水的速度 $\vec{v}_2$ 与水相对于地球的速度 $\vec{v}_1$ 的叠加，因为船相对地球运动方向和大小恰为二者按着平行四边形法则叠加所得到的结果。矢量的起点称为**矢尾**，终点处即箭头处称为**矢端**，矢量的印刷符号常用黑体字 **A**，书写时常用 $\vec{A}$ 表示，也可以用两个字母上面带一个箭头表示，如 A 点指向 B 点的矢量用$\overrightarrow{AB}$表示，书写时莫忘上面的箭头。

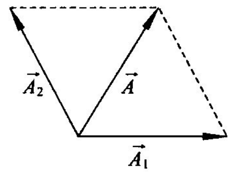

图 0-2

矢量的大小或绝对值又称矢量的**模**，即有向线段的长度，它是一个正实数，即是一个算术量，记作$|\vec{a}|$或斜体字 a。

模等于 1 的矢量称为**单位矢量**，以 $\vec{e}_A$ 或 $\vec{A}^0$ 表示，在直角坐标系 $Oxyz$ 中沿 x、y、z 轴的单位矢量分别记作 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$；在平面极坐标系中沿径向和横向方向的单位矢量记作 $\vec{e}_r$、$\vec{e}_\theta$；在自然坐标系中沿切向和法向方向的单位矢量为 $\vec{\tau}$、$\vec{n}$。

矢量 $\vec{A}$ 可以用它的模和单位矢量表示，即

$$\vec{A}=A\frac{\vec{A}}{A}=A\vec{e}_A=A\vec{A}^0 \tag{0-1}$$

模等于零的矢量称作**零矢量**，其方向是任意的，记作 **0**，手写 $\vec{0}$。我们规定，一切零矢量都相等，大小相等而方向相反的两个矢量的和是零矢量。

若矢量 $\vec{A}$ 与矢量 $\vec{B}$ 的大小相等方向相同，则称此二矢量**相等**，即 $\vec{A}=\vec{B}$。矢量和标量属于不同范畴，它们之间既不能谈相等，也不能谈不相等。

若一个矢量与另一个矢量 $\vec{A}$ 大小相等方向相反，这个矢量就称为 $\vec{A}$ 矢量的**负矢量**，用 $-\vec{A}$ 表示。

注意：(1)加法服从平行四边法则的量一定有大小和方向，但是有大小和方向的量其加法未必服从平行四边法则，如电流和电动势以及有限大小的角位移都有大小和方向，但它们是标量，叠加服从代数运算法则。

(2)标量可以有大小和方向。如电动势、电流、有限大小角位移,方向用正负号表示,大小用其绝对值表示,例如电动势 $\varepsilon=-5$ V 表示电动势大小为 5 V,负号不是表示电动势的大小,而是表示方向,即表示电动势的方向与规定的正向相反。

(3)对于有大小无方向的物理量,其正负号均表示其大小。

2. 矢量的正交分解

(1)矢量在参考轴上的分量

设任意参考轴为 x 轴,其单位矢量为 $\vec{i}$,矢量 $\vec{A}$ 与其夹角为 α,则矢量 $\vec{A}$ 在轴上分量定义为

$$A_x=A\cos\alpha \tag{0-2}$$

(2)正交分解

① 空间直角坐标系

若矢量与坐标轴正向同向,则根据式(0-1)和(0-2)可得

$$\vec{A}=A\vec{e}_A=\frac{A_x}{\cos 0}\vec{i}=A_x\vec{i}\,;$$

若矢量与坐标轴正向反向,则

$$\vec{A}=A\vec{e}_A=\frac{A_x}{\cos\pi}(-\vec{i})=A_x\vec{i}$$

所以当 $\vec{A}$ 与坐标轴平行时,即 $\vec{A}//\vec{i}$ 时,有

$$\vec{A}=A_x\vec{i} \tag{0-3}$$

对于空间任意矢量 $\vec{A}$,可以将其矢尾平移到直角坐标系 $Oxyz$ 的原点,或选矢量 $\vec{A}$ 的矢尾作空间直角坐标系的坐标原点,由图 0-3 可得

$$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y+\vec{A}_z$$

再根据式(0-3)得到

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k} \tag{0-4}$$

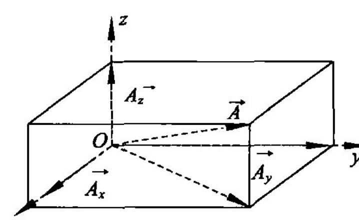

图 0-3

其中 $A_x\vec{i}$,$A_y\vec{j}$,$A_z\vec{k}$ 分别称为矢量 $\vec{A}$ 在 x,y,z 轴上的分矢量,A_x,A_y,A_z 分别称为矢量 $\vec{A}$ 在 x,y,z 轴上的分量或投影或射影,前者是矢量,后者是标量。$A_x\vec{i}+A_y\vec{j}$,$A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$,$A_x\vec{i}+A_z\vec{k}$ 分别称为矢量 $\vec{A}$ 在坐标面 xOy,yOz,xOz 平面上的**分矢量**。

据分量的定义可知:

$$\begin{cases}A_x=A\cos\alpha\\A_y=A\cos\beta\\A_z=A\cos\gamma\end{cases}\quad(\alpha,\beta,\gamma\in(0,2\pi)) \tag{0-5}$$

式中三个余弦分别称为矢量 $\vec{A}$ 的**方向余弦**。

矢量的模为:

$$A=\sqrt{A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2} \tag{0-6}$$

② 平面极坐标系

设平面极坐标系中的极径 r 增加的方向单位矢为 $\vec{e}_r$，极角增加方向的单位矢为 $\vec{e}_\theta$，显然，两个方向是正交的，所以，在这两个方向的正交分解为

$$\vec{A}=A_r\vec{e}_r+A_\theta\vec{e}_\theta \tag{0-7}$$

③ 自然坐标系

设自然坐标增加方向单位矢为 $\vec{\tau}$，轨道凹向方向上单位矢为 $\vec{n}$，同理，在这两个正交方向的正交分解为

$$\vec{A}=A_\tau\vec{\tau}+A_n\vec{n} \tag{0-8}$$

用切向分量和法向分量表示矢量的模为

$$A=\sqrt{A_\tau{}^2+A_n{}^2} \tag{0-9}$$

设矢量 $\vec{A}$ 与切向的夹角为 θ，则可以用切向分量和法向分量表示矢量的方向，即

$$\tan\theta=\frac{A_n}{A_\tau} \tag{0-10}$$

根据式(0-3)～(0-10)，若矢量在选定坐标系中的分量给定，该矢量也就唯一确定，反之，矢量在不同坐标系中有不同的分量。因为矢量运算法则比标量运算法则麻烦，所以实际问题中经常把矢量用两种标量表示法来表示，即模方向法和分量表示法。模方向表示法是由实验直接或间接测出的矢量的模和方向角来表示该矢量，而分量表示法是用矢量的坐标分量来表示该矢量。

【例 0-1】 实验测得河流相对于地面的速度大小为 $v_1=10$ m/s，方向向东，小船相对于河流的速度大小为 $v_2=6$ m/s，方位是偏东向北角度为 $\varphi=60°$，求：小船相对于地面的速度。

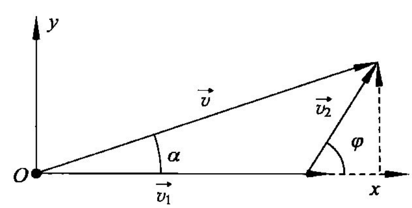

图 0-4

解 1 坐标分量描述法

如图 0-4 所示选坐标系，小船相对于地面的速度为小船相对于水的速度与水相对于地面的速度的叠加，即

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$$

对应的分量式为

$$v_x=v_{1x}+v_{2x}=10+6\cos 60°=13(\text{m/s})$$

$$v_y=v_{1y}+v_{2y}=6\sin 60°=3\sqrt{3}(\text{m/s})$$

解 2 模方向描述法，即矢量的模为

$$v=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+2v_1v_2\cos 60°}=\sqrt{100+36+60}=\sqrt{196}=14(\text{m/s})$$

方向(用速度与向东方向的夹角表示)为

$$\tan\alpha=\frac{v_2\sin\varphi}{v_1+v_2\cos\varphi}=\frac{3\sqrt{3}}{10+3}=\frac{3}{13}\sqrt{3},\alpha=\tan^{-1}\frac{3}{13}\sqrt{3}$$

3. 矢量的运算

(1)矢量的加法

① 两个矢量相加

如图 0-5 所示，矢量 $\vec{A}$ 与矢量 $\vec{B}$ 相加遵从平行四边形法则，记作

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$$

$\vec{C}$ 称为 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的**矢量和**，$\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 则称为 $\vec{C}$ 的**分矢量**，矢量的加法也称**矢量的合成**。这种运算还可以简化为三角形法则，即将矢量 $\vec{B}$ 的矢尾与矢量 $\vec{A}$ 的矢端相连，以 $\vec{A}$ 的矢尾作起点、以 $\vec{B}$ 的矢端作终点的矢量即是所求的矢量和 $\vec{C}$，$\vec{A}$、$\vec{B}$ 和 $\vec{C}$ 构成三角形，如图 0-6 所示。根据三角形的边角关系可以解出 $\vec{C}$ 的大小和方向：

$$C=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\alpha}$$

$$\tan\beta=\frac{B\sin\alpha}{\mathrm{A}+B\cos\alpha}$$

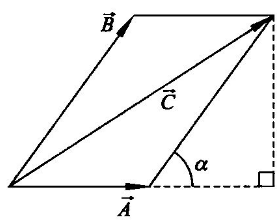

图 0-5

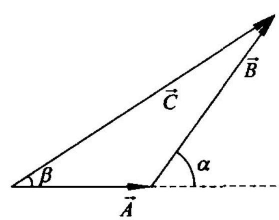

图 0-6

式中 α 为矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 之间的夹角，β 是矢量和 $\vec{C}$ 与矢量 $\vec{A}$ 间的夹角。或者用分量表示模为

$$C=\sqrt{C_x^2+C_y^2+C_z^2}=\sqrt{(A_x+B_x)^2+(A_y+B_y)^2+(A_z+B_z)^2}$$

矢量 $\vec{C}$ 方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{C_x}{C}=\frac{A_x+B_x}{C}$$

$$\cos\beta=\frac{C_y}{C}=\frac{A_y+B_y}{C}$$

$$\cos\gamma=\frac{C_z}{C}=\frac{A_z+B_z}{C}$$

② 多个矢量相加

在两个矢量相加的基础上可以讨论多个矢量求和问题，如图 0-7 所示，求矢量 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 和 $\vec{C}$ 的和，可以按三角形法则先求出 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的矢量和 $\vec{E}$，再求 $\vec{E}$ 与 $\vec{C}$ 的矢量和 $\vec{F}$，记作

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{F}$$

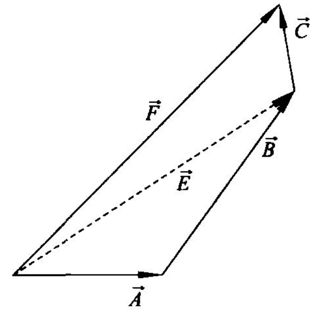

图 0-7

即第一个矢量的矢尾指向第三个矢量的矢端的矢量就是这三个矢量的矢量和，此结论可以推广到 n 个矢量相加，首先将该 n 个矢量从 1 到 n 任意排序，因为矢量加法满足交换律，则其矢量和即为第一个矢量的矢尾指向第 n 个矢量的

矢端的矢量。

注意：若第一个矢量的矢尾与第 n 个矢量的矢端重合，即 n 个矢量构成闭合矢量，其矢量和一定等于零。

(2)矢量减法

若有 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 矢量和 $\vec{C}$，即 $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$，则矢量 $\vec{B}$ 可称作矢量 $\vec{C}$ 与矢量 $\vec{A}$ 的矢量差，记作

$$\vec{B}=\vec{C}-\vec{A}$$

矢量减法 $\vec{B}=\vec{C}-\vec{A}$ 是矢量加法 $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ 的逆运算，也可以视为矢量 $\vec{C}$ 与负矢量 $-\vec{A}$ 的矢量和。在图 0-6 中，利用三角形法则，同样可以由矢量 $\vec{C}$ 和矢量 $\vec{A}$ 画出矢量差 $\vec{B}$，方法是：自某一点出发画出被减矢量 $\vec{C}$ 与减矢量 $\vec{A}$，由减矢量 $\vec{A}$ 矢端引向被减矢量 $\vec{C}$ 矢端，这一矢量即为矢量差 $\vec{B}$。

注意：作图时要分清矢量差的起末端。

(3)矢量“乘法”

① 数乘

矢量数乘即为矢量 $\vec{A}$ 与一个实数 m 的乘积，记作 $m\vec{A}$，其模等于 $|m|$ 乘以 $|\vec{A}|$，方向决定于 m 的正负，若 $m>0$，则数积 $m\vec{A}$ 与 $\vec{A}$ 同向；若 $m<0$，则数积 $m\vec{A}$ 与 $\vec{A}$ 反向；若 $m=0$，则 $m\vec{A}$ 为零矢量。两个矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 满足 $\vec{A}=\lambda\vec{B}$（λ 为一数量），则矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 一定平行，反之亦然。

矢量的数乘有下面的一些性质：

设 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 为任意二矢量，λ 和 μ 为任意实数，则

(1)$(\lambda+\mu)\vec{A}=\lambda\vec{A}+\mu\vec{A}$　（第一分配律）

(2)$\lambda(\vec{A}+\vec{B})=\lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$　（第二分配律）

(3)$\lambda(\mu\vec{A})=\mu(\lambda\vec{A})=(\lambda\mu)\vec{A}$　（结合律）

② 点乘（或点积或标积）

设矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的夹角为 θ，这两个矢量的定义为

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(\vec{A},\vec{B})=AB\cos\theta \tag{0-11}$$

设　$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$；$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$，

则坐标表示式为　$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta=A_xB_x+A_yB_y+A_zA_Z$　(0-12)

注意：a. 两个矢量的标积是标量，所以称其为标积。

b. 标积用记号“·”表示，所以矢量的标积又叫做矢量的点乘或点积，而且书写时“·”一定不要漏写。

矢量的点乘有下面的一些性质：

(1)具有交换律

即 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

(2)若两个矢量垂直或其中一个矢量为零，其点乘必然等于零，反之亦然，即 $\vec{A}\perp\vec{B}\Leftrightarrow\vec{A}\cdot\vec{B}=0$

例如：$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0$

(3)分配律：$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$

(4)结合律：$(\vec{A}\cdot\vec{B})\lambda=\vec{A}\cdot(\lambda\vec{B})$ （λ 为一实数）

③ 叉乘（叉积或矢积）

矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的矢积是个矢量，记作

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=[\vec{A},\vec{B}]$$

其大小为

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\sin\theta \tag{0-13}$$

即以 A 和 B 为邻边的平行四边形的面积。其方向垂直于 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 所构成的平面，而且 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 和 $\vec{C}$ 组成**右手螺旋系统**，即右手四指伸直，大拇指与四指垂直，四指指向第一个矢量 $\vec{A}$ 的方向，经过二矢量小于 180°的夹角转向第二个矢量 $\vec{B}$，则大拇指的指向即为 $\vec{A}\times\vec{B}$ 的方向。

坐标分量表示式为

$$\begin{cases}C_x=A_yB_z-A_zB_y\\C_y=A_zB_x-A_xB_z\\C_z=A_xB_y-A_yB_x\end{cases} \tag{0-14}$$

或

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\A_x & A_y & A_z\\B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{0-15}$$

注意：a. 两个矢量的叉乘是矢量，所以称其为矢积。

b. 矢积用记号“×”表示，所以矢量的矢积又叫做矢量的叉乘或叉积，而且书写时“×”一定不要漏写。

矢量叉乘有下列性质：

$$\left.\begin{array}{l}(1)\vec{A}\times\vec{A}=\vec{0}\\(2)\text{两非零矢量 }\vec{A}、\vec{B},\vec{A}/\!/\vec{B}\Leftrightarrow\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}\\(3)\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}\\(4)(\lambda\vec{A})\times\vec{B}=\lambda(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\times(\lambda\vec{B})\\(5)(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}\end{array}\right\} \tag{0-16}$$

(4)矢量求导

① 矢量函数

物理问题中经常考虑物理量随时间的变化，如在物体运动时其速度及所受到的力可以随时间发生变化，电场强度矢量也能随时间发生变化，所以速度、力、电场强度等都是大小或方向可以发生变化的变矢量。

如果对于时间变量 t 的每一数值都相应的存在矢量 $\vec{A}$ 的一个确定矢量，则该矢量 $\vec{A}$ 是时间变量 t 的**矢量函数**，记作

$$\vec{A}=\vec{A}(t)$$

在直角坐标系 $Oxyz$ 中，矢量函数可以表示成为

$$\vec{A}(t)=A_x(t)\vec{i}+A_y(t)\vec{j}+A_z(t)\vec{k}$$

其中 $A_x(t)$、$A_y(t)$、$A_z(t)$ 是变量 t 的标量函数。

② 矢量函数的导数

类比于标量函数的导数，我们引入矢量函数的导数。设 t 时刻对应的矢量为 $\vec{A}(t)$，经过 Δt 时间后，矢量变为 $\vec{A}(t+\Delta t)$，对应于 Δt，矢量函数的增量为

$$\Delta\vec{A}=\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)$$

我们把矢量增量 $\Delta\vec{A}$ 与发生这一增量所用时间之比称为该矢量函数在该段时间内**平均变化率**，即

$$\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}=\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t} \tag{0-17}$$

注意：矢量函数对时间的平均变化率也是矢量，其方向与矢量增量的方向相同。

当时间趋近零时，即当 $\Delta t\to 0$ 或 $t+\Delta t\to t$ 时，若矢量函数的平均变化率 $\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$ 有极限存在，则该极限称作该矢量函数 $\vec{A}(t)$ 在 t 时刻的**导数**，记作

$$\vec{A}'=\frac{d\vec{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t} \tag{0-18}$$

$\frac{d\vec{A}}{dt}$ 仍为一个矢量，其大小为 $\left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right|=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{A}|}{\Delta t}$，其方向 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\vec{A}$ 的极限方向即为图 0-8 所示沿矢量 $\vec{A}(t)$ 矢端曲线的切线且指向与时间增加对应的方向。

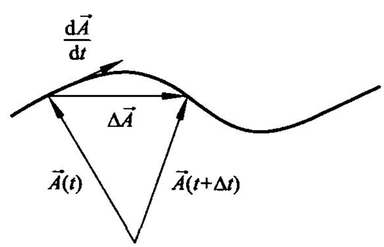

图 0-8

矢量函数的导数也可以用坐标分量的导数表示，在直角坐标系 $Oxyz$ 中，

$$\vec{A}(t+\Delta t)=A_x(t+\Delta t)\vec{i}+A_y(t+\Delta t)\vec{j}+A_z(t+\Delta t)\vec{k}$$

$$\vec{A}(t)=A_x(t)\vec{i}+A_y(t)\vec{j}+A_z(t)\vec{k}$$

所以

$$\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}=\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}=\frac{A_x(t+\Delta t)-A_x(t)}{\Delta t}\vec{i}+\frac{A_y(t+\Delta t)-A_y(t)}{\Delta t}\vec{j}+\frac{A_z(t+\Delta t)-A_z(t)}{\Delta t}\vec{k}=\frac{\Delta A_x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta A_y}{\Delta t}\vec{j}+\frac{\Delta A_z}{\Delta t}\vec{k} \tag{0-19}$$

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A_x(t+\Delta t)-A_x(t)}{\Delta t}\vec{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A_y(t+\Delta t)-A_y(t)}{\Delta t}\vec{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A_z(t+\Delta t)-A_z(t)}{\Delta t}\vec{k}=\frac{dA_x(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dA_y(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dA_z(t)}{dt}\vec{k} \tag{0-20}$$

依据矢量模与分量的关系，矢量 $\vec{A}(t)$ 的导数的大小为

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{\left[\frac{\mathrm{d}A_x(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2+\left[\frac{\mathrm{d}A_y(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2+\left[\frac{\mathrm{d}A_z(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2} \tag{0-21}$$

(5)矢量函数求导的法则

根据矢量函数导数、标积、矢积的定义可以证明，请自行证明。

$$\left.\begin{array}{l}
① \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}+\vec{B})=\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \\
② \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\vec{A})=f\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}+\vec{A}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(f\ \text{为标量函数}) \\
③ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \\
④ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\times\vec{B})=\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}+\vec{A}\times\dfrac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \\
⑤ \dfrac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow\vec{C}=\text{常矢量，即矢量}\ \vec{C}\ \text{守恒} \\
⑥ \vec{A}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=A\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}
\end{array}\right\} \tag{0-22}$$

【例 0-2】 如图 0-9 所示，已知质点做匀速圆周运动，其半径为 R，角速度为 ω_z，角加速度为 β_z，圆心选作平面直角坐标系原点，原点指向质点的矢量为 $\vec{r}$，位矢对时间的一阶导数定义为质点速度，即 $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$，对时间的二阶导数为质点的加速度，即 $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$，求：

(1) $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ (2) $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$

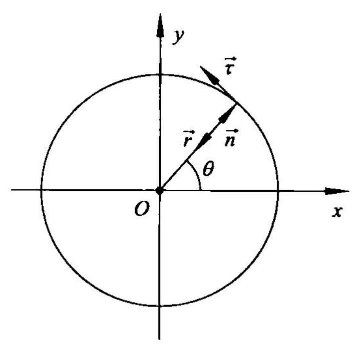

图 0-9

解 (1) $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=R\cos\theta\vec{i}+R\sin\theta\vec{j}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-R\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{i}+R\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{j}=-R\omega_z\sin\theta\vec{i}+R\omega_z\cos\theta\vec{j}$$

因为 $\vec{\tau}=\tau\cos\alpha\vec{i}+\tau\cos\beta\vec{j}=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$

$$=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=R\omega_z\vec{\tau}=\dfrac{\mathrm{d}(R\theta)}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=-R\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}-R\omega^2\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{i}+R\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}-R\omega^2\sin\theta\vec{j}$

$$=\omega^2r(-\cos\theta\vec{i}-\sin\theta\vec{j})+\beta r\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\right]$$

因为 $\vec{n}=n\cos\alpha\vec{i}+n\cos\beta\vec{j}=-\cos\theta\vec{i}-\sin\theta\vec{j}$

所以 $$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=R\omega_z^2\vec{n}+R\beta_z\vec{\tau}=\frac{v^2}{R}\vec{n}+\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

即质点的速度仅有切向分矢量，加速度有切向分矢量和法向分矢量，这三个分矢量分别称为质点的**速度**、**切向加速度**和**法向加速度**，因为这三个分矢量可以唯一地通过其分量确定，故习惯上也称它们的三个分量为**速度**、**切向加速度**和**法向加速度**。上述结论虽然是通过圆周运动的特例得到的，但是任意曲线运动的轨迹可以视为若干个线元组成，每个线元都是在曲率半径为 ρ 的圆周上，所以任意曲线运动可以视为质点在做若干个曲率半径不同的变速圆周运动，所以对于任意曲线运动的速度、切向加速度和法向加速度分别可以表示为

$$\left.\begin{aligned}&(1)\,v_\tau=\rho\omega_z=\frac{\mathrm{d}(\rho\theta)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\\&(2)\,a_\tau=\rho\beta_z=\frac{\mathrm{d}(\rho\omega_z)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\\&(3)\,a_\mathrm{n}=\rho\omega_z=\frac{v_\tau^2}{\rho}=\frac{v^2}{\rho}\end{aligned}\right\}\tag{0-23}$$

(6)矢量函数的积分

1)矢量对空间的积分(线积分)

设：①$\vec{A}=\vec{A}(t)$，l 为 $P_1\to P_2$ 的一条光滑有向曲线；②将P_1P_2任意划分成 n 个小弧段：$\Delta\vec{l}_i(i=1,2,\cdots,n)$；③$\vec{A}_i(t)\in\Delta\vec{l}_i$，作标积 $\vec{A}_i\cdot\Delta\vec{l}_i$；④作和式 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{A}_i\cdot\Delta\vec{l}_i$，$\delta=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\Delta\vec{l}_i|\}$，若 $\lim\limits_{\substack{\delta\to0\\(n\to\infty)}}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{A}_i\cdot\Delta\vec{l}_i=I$。

则称 I 为 $\vec{A}(t)$ 沿曲线 l 从$(P_1\to P_2)$的**线积分**，记作：

$$I=\int_{P_1(l)}^{P_2}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}(A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z)\tag{0-24}$$

【例 0-3】 力做功的定义为：$A=\int_l\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$，质点在力 $\vec{F}=-(x+y)\vec{i}+xy\vec{j}$ (SI)作用下沿图 0-10 所示路径运动。求力 $\vec{F}$ 沿下列路径做的功。

(1)路径 $Oa(O\to a)$；(2)路径 $ab(a\to b)$；(3)路径 $Ob(O\to b)$。

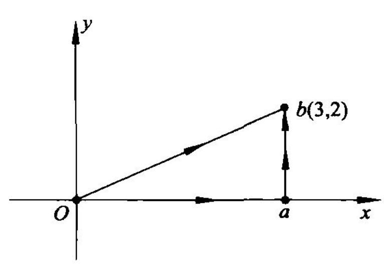

图 0-10

解 (1)$A=\int_l\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$，$\mathrm{d}\vec{l}$ 正交分解为：$\mathrm{d}\vec{l}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}$

$$A=\int_l\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z)$$

$$A_{Oa}=\int_l\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}[-(x+y)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y]=\int_0^3-x\mathrm{d}x=-\frac{9}{2}\ \mathrm{J}$$