高等工科数学系列课程教材

空间解析几何与线性代数

孙振绮 总主编 / 孙振绮 张宪君 主 编

ANALYTIC GEOMETRY OF SPACE AND LINEAR ALGEBRA

第2版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等工科数学系列课程教材

空间解析几何与线性代数

第2版

总主编　孙振绮
主　编　孙振绮　张宪君
副主编　杨　毅　孙建邵　李福梅

机械工业出版社

本书是以教育部（原国家教委）1995 年颁布的高等工科院校本科“空间解析几何与线性代数”的教学基本要求为纲，广泛吸取国内外知名大学的教学经验编写而成的.

全书共 8 章：空间解析几何，n 阶行列式，矩阵，线性方程组，线性空间，内积空间，相似矩阵及其对角化，二次型等，书末还附有线性算子，酉空间简介，若尔当（Jordan）标准形简介和部分习题参考答案与提示.

本书可作为工科大学本科生的数学课教材，也可供准备报考工科硕士研究生的人员与工程技术人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

空间解析几何与线性代数/孙振绮等主编. —2 版. —北京：机械工业出版社，2011.6

高等工科数学系列课程教材

ISBN 978-7-111-34407-0

Ⅰ.①空… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①空间几何：解析几何-高等学校-教材 ②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O182.2②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 078338 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　李　乐

版式设计：张世琴　责任校对：张莉娟

封面设计：鞠　杨　责任印制：杨　曦

北京京丰印刷厂印刷

2011 年 7 月第 2 版·第 1 次印刷

169mm×239mm·15.75 印张·301 千字

0 001—3 000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-34407-0

定价：28.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销售一部：(010)68326294

销售二部：(010)88379649

读者购书热线：(010)88379203

网络服务

门户网：http：//www.cmpbook.com

教材网：http：//www.cmpedu.com

序

高等数学课程的教学要求、内容选取和体系编排等方面，前苏联教材与北美教材有很大的差异. 面对当今科学技术的发展和社会需求，从我国实际情况出发，吸收不同国家、不同学派的优点，更好地为我国培养高质量人才是广大数学教师的责任与愿望.

我国大多数工科数学教材的内容和体系是在20世纪50年代前苏联相应教材的基础上演变发展而来的. 当今不少教材在进行改革的同时，正在吸收北美等发达国家的先进理念和经验，而对前苏联教材近年来的变化注意不够. 孙振绮教授对前苏联的高等数学教学进行了长期深入的研究，发表了相关论文与研究报告十余篇. 这对吸收不同学派所长，推动我国工科数学教学改革、建设具有中国特色的系列教材具有重要的参考价值.

长期以来，孙振绮教授与其他教授合作，以培养高素质创新型人才为目标，力图探讨一条提高本门课程教学质量的新途径. 他们结合我国的实际情况，吸收前苏联高等数学课程教学的先进理念和经验，对教学过程进行了整体的优化设计，编写了一套工科数学系列教材共9部. 该系列教材的取材考虑了现代科技发展的需要，提高了知识的起点，适当运用了现代数学的观点，增加了一些现代工程需要的应用数学方法，扩大了信息. 同时，整合优化了教学体系，体现了数学有关分支间的相互交叉和渗透，加强了数学思想方法的阐述和运用数学知识解决问题的能力的培养.

与当今出版的众多工科数学教材相比，本系列教材特色鲜明，颇有新意. 其最突出的特点是：内容丰富，观点较高，体系优化，基础理论比较深厚，吸收了俄罗斯学派和教材的观点和特色，在国内独树一帜. 对数学要求较高的专业和读者，本书不失为一套颇有特色的教材或良好的参考书.

该系列教材曾在作者所在学校和有关院校使用，反应良好，并于2005年获机械工业出版社科技进步一等奖. 其中《工科数学分析教程》（上、下册）第2版被列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材. 该校使用该教材的工科数学分析系列课程被评为2005年山东省精品课程，相关的改革成果和经验，多次获校与省教学成果奖，在国内同行中，有广泛良好的影响. 笔者相信，本系列教材的出版，不仅有益于我国高质量人才的培养，也将会使广大师生集思广益，有助于本门课程教学改革的深入发展.

西安交通大学　马知恩

第2版前言

高等工科数学系列课程教材（第1版）曾获2005年机械工业出版社科技进步一等奖．近年来，我们坚持以培养高素质、创新型人才为目标，优化教学质量系统，全面深化教学改革，先后获省高等教育教学成果一、二等奖各一项，进一步推动了系列课程教材建设．自2007年起，我们陆续对本系列教材进行了修订．

本次修订出版的第2版教材在基本保持原教材风貌的基础上补充部分内容，适当增加数学建模内容比例与现代工程应用教学方法，精选了例题与习题，调整了某些内容顺序．

本书中对于有些为满足提高理论知识平台的需要而设置的超纲部分的内容均打了“*”号，可不列入授课内容，授课约需用68学时．

全套教材（第2版）由孙振绮任总主编，本书由孙振绮、张宪君任主编，参加本书修订的有杨毅（第2，8章）、孙建邵（第5、6章）、李福梅（第3章）、王卫卫（第1章）、钟云娇（第4章），此外还有李文学、于佳佳参加编写．丁效华、金承日教授分别审阅了教材的各部分内容，提出了许多宝贵意见．

由于编者水平有限，缺点、疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正！

编　者

第 1 版前言

为适应科学技术进步的要求，培养高素质人才，必须改革工科数学课程体系与教学方法. 为此，我们进行了十多年的教学改革实践，先后在哈尔滨工业大学、黑龙江省教委立项，长期从事“高等工科数学教学过程的优化设计”课题的研究. 该课题曾获哈尔滨工业大学优秀教学研究成果奖. 本套系列课程教材正是这一研究成果的最新总结，包括：《工科数学分析教程（上，下册)》、《空间解析几何与线性代数》、《概率论与数理统计》、《复变函数论与运算微积》、《数学物理方程》、《最优化方法》、《计算技术与程序设计》等.

这套教材在编写上广泛吸取国内外知名大学的教学经验，特别是吸取了莫斯科理工学院、乌克兰人民科技大学（原基辅工业大学）等的教学改革经验，提高了知识起点，适当地扩大了知识信息量，加强了基础，并突出了对学生的数学素质与学习能力的培养. 具体地，①加强了对传统内容的理论叙述；②适当运用了近代数学观点来叙述古典工科数学内容，加强了对重要的数学思想方法的阐述；③加强了系列课程内容之间的相互渗透与交叉，注重培养学生综合运用数学知识解决实际问题的能力；④把精选教材内容与编写典型计算题有机结合起来，从而加强了知识间的联系，形成课程的逻辑结构，扩展了知识的深广度，使内容具备较高的系统性和逻辑性；⑤强化了对学生的科学工程计算能力的培养；⑥加强对学生数学建模能力的培养；⑦突出工科特点，增加了许多现代工程应用数学方法；⑧注意到课程内容与工科研究生数学的衔接与区别.

在编写这本书时，既强调讲清线性代数理论的“代数背景”（解线性方程组）与“几何背景”，加强了空间解析几何与线性代数的相互联系，又重点突出了线性空间与线性算子的理论，为其他工科数学课程提供了一个较高的“知识台阶”. 书中配有大量的例题与习题（有参考答案)，既有利于教师积极地组织教学过程，又便于学生自学.

本书可供工科大学自动化、计算机科学与技术、机械电子工程，工程物理、通信工程、电子科学与技术等对数学知识要求较高专业的本科生使用. 按大纲讲授需 74 学时，全讲需 90 学时.

全套教材由孙振绮任总主编. 本书由孙振绮、丁效华任主编，李宝家、伊晓东任副主编. 参加本书编写的还有杨毅、邹巾英、孙建邵、李福梅、范德军等. 刘铁夫、张宪君教授分别审阅了教材的各部分内容，提出了许多宝贵意见.

在此，对哈尔滨工业大学多年来一直支持这项教学改革的领导、专家、教授深表谢意！

由于编者水平有限，缺点、疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正！

编　者

目　录

第 1 章　空间解析几何

1.1　二阶与三阶行列式

行列式是研究线性代数的重要工具，在解决科学研究和工程技术问题中发挥着重要作用. 行列式的概念源于解线性方程组.

1.1.1　二阶行列式

考察用加减消元法解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为了便于记忆上述解的公式，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

并称它为二阶行列式. 二阶行列式的计算也可根据图 1.1 来记忆.

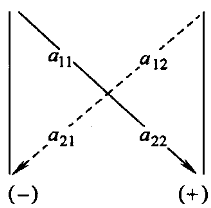

图　1.1

利用二阶行列式的概念，式(1.2)中的两个分子可以分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此，对于方程组(1.1)，在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组的解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}$$

例 1.1　解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -5 \\ 4x_1 + 3x_2 = -5 \end{cases}$$

解 方程组中未知量的系数所构成的二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-3) \times 4 = 15 \neq 0$$

所以方程组有唯一解

$$D_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -30, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 15$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-30}{15} = -2, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{15}{15} = 1$$

例 1.2 计算$\begin{vmatrix} x+y & 2y \\ 2x & x+y \end{vmatrix}$

解 $\begin{vmatrix} x+y & 2y \\ 2x & x+y \end{vmatrix} = (x+y)^2 - 4xy = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$

例 1.3 计算$\begin{vmatrix} \mathrm{i}-1 & 2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i}+1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} \mathrm{i}-1 & 2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i}+1 \end{vmatrix} = \mathrm{i}^2 - 1 - 2\mathrm{i}^2 = 0$$

1.1.2 三阶行列式

考察用加减消元法解三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

同上面一样，先从前两式消去 x_3，后两式消去 x_3，得到只含 x_1, x_2 的两个新的线性方程；再从这两个新线性方程消去 x_2，就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3$$

当 x_1 的系数

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

时，得出

$$x_1 = \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3)$$

同样，可以求得

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31})$$

所以,当 $D\neq0$ 时,如果方程组(1.3)有解,就一定是上述唯一形式.

同前面一样,为了便于记忆,引进三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

它含有三行、三列,是六个项的代数和.这六项这样来记忆:如图1.2所示,实线上三个元素的乘积构成的三项都取正号,虚线上三个元素的乘积构成的三项都取负号.

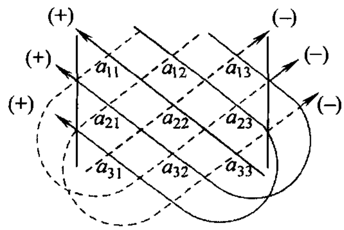

图 1.2

例1.4

$$D=\begin{vmatrix}2&-3&1\\4&1&-2\\5&1&3\end{vmatrix}$$

解 $D=2\times1\times3+(-3)\times(-2)\times5+1\times4\times1-1\times1\times5-(-3)\times4\times3-2\times(-2)\times1=75$

例1.5 计算 $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}$

解 $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=1\times3\times2+2\times1\times3+3\times1\times2-3\times3\times3-2\times2\times2-1\times1\times1=-18$

利用加减消元法,不难看出三元一次线性方程组的解可以用三阶行列式表示.当

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq0$$

时,方程组(1.3)有唯一解.如果记

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

方程组(1.3)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}$$

例 1.6 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=26 \\ 2x_1-4x_2-x_3=9 \\ x_1+2x_2+x_3=16 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$$

所以方程组有唯一解. 再计算

$$D_1=\begin{vmatrix} 26 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}=55, D_2=\begin{vmatrix} 3 & 26 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix}=20$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 26 \\ 2 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix}=-15$$

方程组的解为

$$x_1=\frac{55}{5}=11, x_2=\frac{20}{5}=4, x_3=\frac{-15}{5}=-3$$

1.2 几何向量

1.2.1 几何向量的概念

描述速度、加速度、力等既有方向又有大小的量,称为**向量**. 向量有两个特征——大小和方向,几何中的有向线段恰好具有这两个特征. 抛去一般向量的具体意义,用几何空间中有向线段表示向量,并称这样的向量为**几何向量**(有时简称向

量). 有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$(图 1.3),有时也用一个黑体字母表示向量,如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{n}$ 等. 向量的大小叫向量的长度(也叫向量的模). 向量$\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{a}$ 的长度依次记为$|\overrightarrow{AB}|$和$|\boldsymbol{a}|$. 长度为 1 的向量称为单位向量. 起点和终点重合的向量称为零向量,记为 $\mathbf{0}$. 零向量的长度等于 0,零向量的方向可以看做是任意的.

图 1.3

在实际问题中,有些向量与其起点有关,有些向量与其起点无关. 本书只研究与起点无关的向量,并称这种向量为**自由向量**. 这样的向量可以平行移动,所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的长度相等,又互相平行(即在同一条直线上,或在平行直线上称为共线),且指向相同,则说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 也就是说,平行移动后能完全重合的向量是相等的. 因为本书讨论的是自由向量,故可以说任两向量共面.

1.2.2 几何向量的线性运算

向量的线性运算是指向量的加法及数与向量相乘.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一个向量,它是以$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形 $OACB$ 后,再由点 O 与其相对的顶点 C 连成的向量,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}$(图 1.4). 这种方法叫**平行四边形法**. 如果两向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$与 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$在同一直线上,那么规定它们的和是这样一个向量:当$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的指向相同时,和向量的方向与原来两向量的方向相同,其长度等于两向量长度的和;当$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的指向相反时,和向量的方向与较长的向量的方向相同,其长度则等于两向量长度的差.

在图 1.4 中,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,所以,让 $\boldsymbol{a}$ 的终点与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点 O 到 $\boldsymbol{b}$ 的终点 C 的向量$\overrightarrow{OC}$为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和向量,即$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,这种方法叫求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和的**三角形法**.

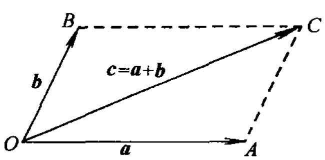

图 1.4

按定义,容易证明向量加法满足:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律)

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律)

(3) $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$

由于向量加法满足结合律,多个向量相加,不必加括弧指明相加的次序. 求多个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 之和时,只要让前一向量的终点作为次一向量的起点,则 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点与 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点相连并指向后者的向量等于 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. $n=3$ 的例子如图 1.5 所示. 与向量 $\boldsymbol{b}$ 长度相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{b}$ 的**负向量**,记为 $-\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和向量记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$,称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**(图 1.6).

为了表示几何向量的"伸缩",我们定义实数与向量的乘法(简称数乘运算).

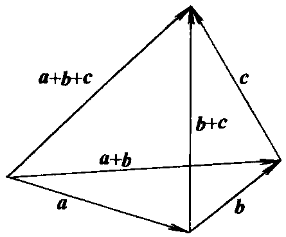

图 1.5

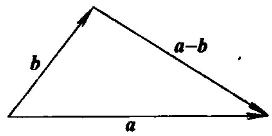

图 1.6

实数 k 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记为 $k\boldsymbol{a}$. 它的长度 $|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}|$. 它的方向:当 $k>0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $k<0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 反向(图 1.7);当 $k=0$ 时,方向不定(此时 $k\boldsymbol{a}$ 是零向量).

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,对任意实数 k,规定 $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

实数与向量的数乘满足:

(1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$

(2) $k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$

(3) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$

(4) $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$

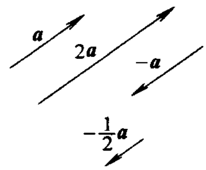

图 1.7

显然,只要 $\boldsymbol{a}$ 不是零向量,$\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ 就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,记作 $\boldsymbol{e}_a$. $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

例 1.7 证明平行四边形的对角线互相平分(图 1.8).

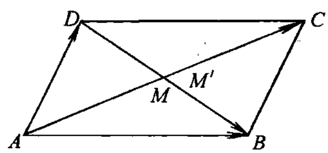

图 1.8

证 设平行四边形 $ABCD$,AC 的中点为 M,BD 的中点为 M'.

$\because \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM'}=\overrightarrow{AD}+\frac{\overrightarrow{DB}}{2}=\overrightarrow{AD}+\frac{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}$$

又 $\because \overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}$

$\therefore \overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{AM}$,$M'$ 与 M 重合,

即平行四边形的对角线互相平分.

1.3 空间直角坐标系

过空间一个定点 O,作三条相互垂直的数轴,它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位. 这三条轴分别叫 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴);统称坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则是铅垂线;它们的正方向通常构

成“右手系”,即 Ox,Oy 和 Oz 的正方向符合“右手规则”,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时,大拇指的指向就是 z 轴的正向,如图 1.9 所示. 这样的三条坐标轴就构成了一个**空间直角坐标系**,记为 $Oxyz$. 点 O 叫做**坐标原点**(或**原点**).

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样的三个平面统称为**坐标面**. x 轴及 y 轴确定的坐标面叫 xOy **面**,另外,两个坐标面分别叫做 yOz **面**及 zOx **面**. 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个**卦限**. 含有 x 轴、y 轴、z 轴的正半轴的卦限叫做**第一卦限**,其他为第二、第三、第四卦限,在 xOy 面的上方,按逆时针方向确定. 第五卦限在第一卦限的下方,其他第六、第七、第八卦限,在 xOy 面的下方,按逆时针方向确定(图 1.10).

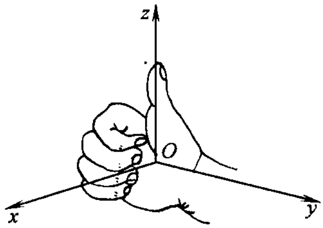

图 1.9

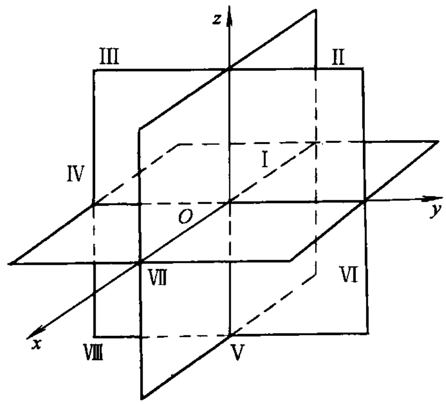

图 1.10

设 M 是空间中任一点,P,Q,R 分别是点 M 在 x,y,z 轴上的投影,记 P,Q,R 在 x,y,z 轴上的坐标依次为 x,y,z,则点 M 唯一地确定了一个三元有序实数组(x,y,z). 反之,任给一个三元有序实数组(x,y,z),按同样的含义,也唯一地确定了 $Oxyz$ 坐标系中一个点. 称这组数 x,y,z 为**点 M 的坐标**,并依次称 x,y,z 为点 M 的**横坐标、纵坐标**和**竖坐标**. 坐标为 x,y,z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 的三条轴 Ox,Oy,Oz 的正方向上依次取三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,称其为**基本单位向量**.

下面指出,空间中任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以表示成

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

的形式,其中 $x,y,z\in\mathbf{R}$.

取点 $M(x,y,z)$ 使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,如图 1.11 所示,有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个几何向量,若

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

则称(a_x,a_y,a_z)为向量 $\boldsymbol{a}$ 关于基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的**坐标**.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$,$M_1$,$M_2$ 的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)(图 1.12),求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,根据几何向量的运算规则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

故 a 的坐标为$(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

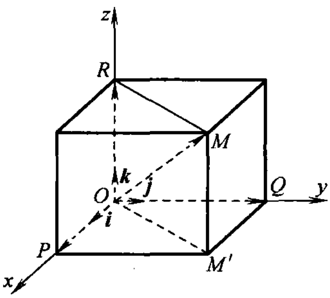

图 1.11

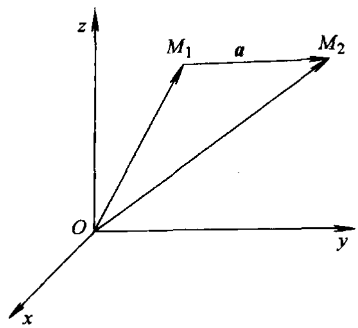

图 1.12

利用几何向量的坐标,把向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 记作(a_x,a_y,a_z),即 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$. 进而可得向量的加法、减法、数与向量相乘等运算的坐标形式.

设

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z)$$

$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=(b_x,b_y,b_z)$$

则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$$

$$k\boldsymbol{a}=(ka_x,ka_y,ka_z)$$

1.4 几何向量的数量积

1.4.1 向量在轴上的投影

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,任取空间一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,称不超过 π 的 $\angle AOB$(设 $\theta=\angle AOB,0\leqslant\theta\leqslant\pi$)为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**(图 1.13),记作$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,零向量与另一向量的夹角可以在 0 到 π 间任意取值. 可以类似地定义向量与一轴的夹角及两轴的夹角.

设有空间一点 A 及一轴 u,通过点 A 作轴 u 的垂直平面 π,那么称平面 π 与轴 u 的交点 A' 为点 A **在轴 u 上的投影**(图 1.14).

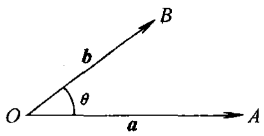

图 1.13

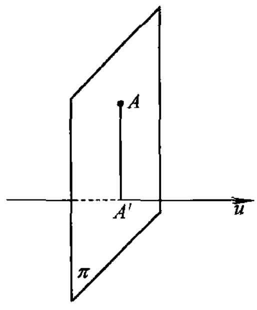

图 1.14

定义 1.1 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A',B'(图 1.15),那么轴 u 上有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$(其绝对值等于 $|\overrightarrow{A'B'}|$,其符号由 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向决定,当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 u 同向时取正号,当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 u 反向时取负号)叫做**向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影**,记作 $\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB}$,轴 u 为**投影轴**.

定理 1.1 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的长度乘以轴与向量的夹角的余弦(图 1.16),即

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

由此可知:相等向量在同一轴上的投影相等.当一非零向量与投影轴成锐角时,其投影为正;成钝角时,其投影为负;成直角时,其投影为零.

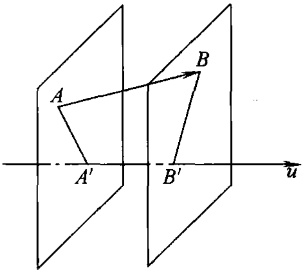

图 1.15

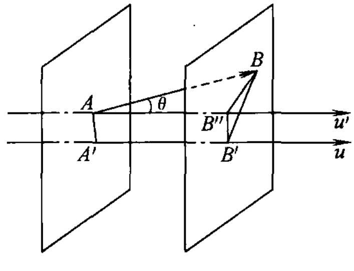

图 1.16

定理 1.2 两个向量的和在某轴上的投影等于这两向量在该轴上投影的和,即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2$$

1.4.2 几何向量的数量积

先看一个例子.