

Stochastic process

随机过程

李龙锁 编著 王勇 主审



科学出版社

随 机 过 程

李龙锁 编著

王 勇 主审

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

全书共 13 章. 第 1~4 章主要介绍马尔可夫过程的一般理论及几类典型的随机过程. 第 5~13 章详细介绍一维和多维平稳过程的谱理论和预测理论.

本书可作为高等院校数学专业硕士研究生“随机过程”课程的教材, 也可供理科、工科、财经、师范院校相关专业的硕士生、博士生和教师参考, 还可供有关的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

随机过程/李龙锁编著. —北京: 科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-031042-2

I. ①随… II. ①李… III. ①随机过程-研究生-教材 IV. ①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 086169 号

责任编辑: 张中兴 / 责任校对: 宋玲玲
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏志印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2011 年 6 月第一次印刷 印张: 18

印数: 1—3000 字数: 360 000

定价: 37.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

经过各国数学家半个多世纪的努力,随机过程现已成为一门独特又内容丰富的数学学科.它不仅有着完整的理论体系,而且还广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中.例如,预测和滤波应用于空间技术和自动控制;时间序列分析应用于石油勘探和经济管理;马尔可夫过程与点过程应用于地震预报和气象预报等.

为了满足教学的需要,作者把近年来给数学系硕士研究生讲授的“随机过程”讲义整理成书.本书不仅可作为高等院校数学专业硕士研究生“随机过程”课程的教材,也可供理科、工科、财经、师范院校相关专业硕士、博士研究生和教师参考.

全书分为3个部分:马尔可夫过程基本理论及几类典型的随机过程(第1~4章);一维平稳过程的谱理论和预测理论(第5~9章);多维平稳过程的谱理论和预测理论(第10~13章).特别要指出的是,本书对平稳过程理论的介绍是比较详尽的.

在本书的写作过程中,自始至终都得到了王勇教授的关怀与鼓励,他审阅了本书的全稿,并提出了许多宝贵的建议和意见,在此谨致深深的谢意.

感谢我的硕士导师许承德教授将我带入随机过程领域,他二十多年来无私的关爱和不倦的教诲是完成此书的动力源泉,在此对老师致以深深的谢意.

由于作者的水平有限,书中疏漏及不妥之处在所难免,恳请读者批评指正.

李龙锁

2011年于哈尔滨工业大学

符号意义

\forall	任取
a.e.	几乎处处
a.e. μ	在测度 μ 意义下几乎处处
\mathbf{N}	整数集
\mathbf{R}	实数集; 一维 Euclid 空间
\mathbf{R}^n	n 维 Euclid 空间
\mathbf{R}^∞	实数序列 (x_1, x_2, \dots) 全体
\mathbf{C}	复数集
\mathbf{C}^n	n 维复向量空间
\Leftarrow	充分性
\Rightarrow	必要性
$A \Rightarrow B$	由 A 成立推得 B 成立
$*) \Rightarrow (**)$	$*)$ 式成立, 往证 $(**)$ 式成立
\Leftrightarrow	充分必要条件
\emptyset	空集
$A \Delta B$	$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ 称为 A 与 B 的对称差
$\overline{\lim}_n S_n$	集合序列 S_n 的上极限
$\underline{\lim}_n S_n$	集合序列 S_n 的下极限

目 录

前言

符号意义

第 1 章 离散时间的马尔可夫链	1
1.1 一般随机过程的基本概念.....	1
1.2 马尔可夫链的定义.....	4
1.3 转移概率.....	4
1.4 若干例子.....	7
1.5 状态的分类.....	12
1.6 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性质与马尔可夫链的平稳分布.....	22
1.7 马尔可夫链的可逆性.....	29
第 2 章 连续时间的马尔可夫链	31
2.1 连续时间的马尔可夫链的定义及基本性质.....	31
2.2 科尔莫戈罗夫 (微分) 方程.....	32
2.3 若干例子.....	43
第 3 章 马尔可夫过程与双参数算子半群	46
3.1 预备知识.....	46
3.1.1 若干集类.....	46
3.1.2 单调类定理.....	47
3.1.3 随机元 (随机变量).....	48
3.1.4 数学期望.....	48
3.1.5 积分变换.....	48
3.1.6 条件概率.....	49
3.1.7 条件数学期望.....	49
3.2 马尔可夫过程的定义.....	50
3.3 转移函数.....	52
3.4 双参数算子半群.....	58

3.5 非时齐马尔可夫过程产生的双参数算子半群	63
3.5.1 两个 Banach 空间	63
3.5.2 M 上的半群与 L 上的半群的关系	63
3.5.3 非时齐马尔可夫过程产生的两个半群	64
第 4 章 其他类型的随机过程	66
4.1 泊松过程	66
4.2 更新过程	73
4.3 分支过程	81
第 5 章 平稳过程的谱理论	83
5.1 预备知识	83
5.1.1 Hilbert 空间及性质	83
5.1.2 投影算子 $P_M : h_0 = P_M h$	89
5.2 平稳过程及相关函数的定义	90
5.2.1 非负定函数	90
5.2.2 平稳过程的定义	91
5.2.3 相关函数的谱表示	91
5.2.4 例子	94
5.3 随机测度与随机积分	97
5.3.1 基本正交随机测度	97
5.3.2 关于基本正交随机测度的积分	98
5.3.3 基本正交随机测度 $Z = Z(\Delta), \Delta \in \mathcal{A}_0$ 的扩张	99
5.3.4 关于随机测度 (略“基本正交”) 的随机积分的进一步结果	100
5.3.5 正交增量随机过程与随机测度	102
5.4 平稳过程的谱定理	103
5.5 平稳过程导函数的谱表示	108
5.6 平稳过程的常系数微分、差分方程	113
5.7 大数定律、相关函数与谱函数的估计	118
5.7.1 $R-L^2$ 积分	118
5.7.2 平稳的弱大数定律	120
5.8 Karhunen 定理	122

第 6 章 线性预测问题引论	129
6.1 线性预测问题的提出	129
6.2 具有有理谱密度的平稳序列的线性预测	133
第 7 章 平稳序列的线性预测	145
7.1 线性外推问题的提出	145
7.2 平稳序列的正则性与奇异性	147
7.3 正则平稳序列的 Wold 分解	151
7.4 正则平稳序列的条件及 H_δ 类函数的基本性质	155
7.4.1 H_δ 类函数的定义	156
7.4.2 H_δ 类函数的基本性质	157
7.4.3 H_δ 类函数的参数表示	158
7.4.4 H_δ 类函数的进一步性质	159
7.5 平稳序列的 Lebesgue-Gramer 分解与奇异性判别法	165
7.6 平稳序列外推问题的解	168
7.7 平稳序列的线性滤波	169
7.8 例子	171
7.9 平稳序列的线性内插	173
第 8 章 连续参数平稳过程的线性预测	178
8.1 线性外推问题的提出	178
8.2 平稳过程的正则性与奇异性	178
8.2.1 正则性、奇异性和 Wold 分解	178
8.2.2 双线性变换	180
8.2.3 几个引理	181
8.3 平稳过程的正则性条件	184
8.4 正则平稳过程的 Wold 分解与线性预测	186
8.4.1 随机测度的 Fourier 变换	186
8.4.2 平稳过程的滑动和表示	188
8.4.3 正则平稳过程的 Wold 分解	189
8.4.4 正则平稳过程的线性预测	192
8.5 一般平稳过程的线性预测	193

8.6	连续参数平稳过程的线性滤波	194
8.7	一维平稳过程的几个问题	194
第 9 章	严平稳序列和遍历理论	198
9.1	严平稳序列、保测变换	198
9.2	遍历性和混合性	199
9.3	遍历定理	201
第 10 章	正定函数及矩阵测度	205
10.1	正定函数定义	205
10.1.1	二元正定函数和二元正定矩阵函数	205
10.1.2	(一元) 正定函数与 (一元) 正定矩阵函数	207
10.2	正定齐次序列及其谱表示	207
10.2.1	正定齐次序列的定义	207
10.2.2	正定齐次序列的谱表示	208
10.3	正定矩阵齐次序列及其谱表示	211
10.3.1	正定矩阵齐次序列的定义和性质	211
10.3.2	矩阵测度	212
10.3.3	正定矩阵齐次序列的谱表示	214
10.4	正定齐次函数及其谱表示	215
10.4.1	正定齐次函数的定义	215
10.4.2	连续的正定齐次函数的谱表示	216
10.5	正定矩阵齐次函数及其谱表示	217
10.5.1	正定矩阵齐次函数的定义	217
10.5.2	正定矩阵齐次函数的谱表示	218
10.6	矩阵测度的特征值和特征向量	218
10.6.1	$f(\lambda)$ 的最小特征值与相应的特征向量	218
10.6.2	$f(\lambda)$ 的第二小特征值和对应的特征向量	220
10.7	矩阵测度构成的 Hilbert 空间	221
10.7.1	$L^2(\mathbf{F})$ 空间的定义	221
10.7.2	$L^2(\mathbf{F})$ 为线性内积空间	222
10.7.3	$L^2(\mathbf{F})$ 为 Hilbert 空间	223

10.7.4	$L^2(F)$ 中的稠密集	224
10.7.5	$L^2(F)$ 的唯一性	225
第 11 章	多维平稳过程的谱理论	227
11.1	多维平稳过程的定义及相关的概念	227
11.1.1	多维平稳过程定义	227
11.1.2	多维平稳过程的同构空间	227
11.2	多维平稳过程的谱表示	228
11.3	两个多维平稳过程之间的平稳相关和从属关系	230
11.3.1	平稳相关	230
11.3.2	从属关系	230
11.4	常数秩的 n 维平稳过程	233
第 12 章	多维离散参数平稳过程的预测问题	239
12.1	多维平稳过程的外推问题与奇异性、正则性	239
12.1.1	外推问题	239
12.1.2	奇异性与正则性	240
12.2	n 维正则平稳序列的 Wold 分解	243
12.3	最大秩的 n 维正则平稳序列	250
12.4	n 维平稳序列的线性滤波及线性系统问题	255
12.4.1	线性滤波	255
12.4.2	离散线性系统与线性滤波	257
12.4.3	有限滤波问题	259
第 13 章	多维连续参数平稳过程的预测问题	261
13.1	多维平稳过程的外推问题及正则性、奇异性	261
13.2	n 维正则平稳过程的 Wold 分解	265
13.3	最大秩正则的 n 维平稳过程	269
13.4	连续参数 n 维平稳过程的线性滤波	269
参考文献		273

第 1 章 离散时间的马尔可夫链

1.1 一般随机过程的基本概念

定义 1.1 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间, (E, \mathcal{E}) 是可测空间, T 是指标集. 若对任何 $t \in T$, 有 $X_t: \Omega \rightarrow E$, 且 $X_t \in \mathcal{F}/\mathcal{E}$, 则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 是 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的取值于 (E, \mathcal{E}) 中的随机过程, 在无混淆的情况下简称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为随机过程, 称 (E, \mathcal{E}) 为状态空间或相空间, 称 E 中的元素为状态, 称 T 为时间域. 对每个固定的 $\omega \in \Omega$, 称 $X_t(\omega)$ 为 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 对应于 ω 的轨道或现实, 对每个固定的 $t \in T$, 称 $X_t(\omega)$ 为 E 值随机元. 有时 $X_t(\omega)$ 也记为

$$X_t(\omega) = X_t = X(t) = X(t, \omega)$$

设 $T \subset \mathbf{R}$, $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ 是 \mathcal{F} 中的一族单调增的子 σ 代数 (σ 代数流), 即

(1) $\forall t \in T \Rightarrow \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, 且 \mathcal{F}_t 是 σ 代数;

(2) $\forall s, t \in T, s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

若 $X_t \in \mathcal{F}_t/\mathcal{E} (\forall t \in T)$, 则称 $\{X_t, t \in T\}$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}$ 适应的随机过程, 或适应于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的随机过程. 特别地, 若令

$$\mathcal{F}_t \triangleq \sigma(X_s, s \leq t, s \in T) \triangleq \sigma\left(\bigcup_{\substack{s \leq t \\ s \in T}} X_s^{-1}(\mathcal{E})\right)$$

是由 $\{X_s, s \leq t, s \in T\}$ 所生成的 σ 代数, 则 $\{X_t, t \in T\}$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}$ 适应的随机过程.

当 $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}_1)$ 时, 称 $\{X_t, t \in T\}$ 为实值随机过程;

当 $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{C}, \mathcal{B}_\mathbf{C})$ 时, 称 $\{X_t, t \in T\}$ 为复值随机过程;

当 $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}_n)$ 时, 称 $\{X_t, t \in T\}$ 为 n 维随机过程;

当 E 是可列集 (有限集) 时, 称 $\{X_t, t \in T\}$ 为可列 (有限) 随机过程;

当 $T = \mathbf{R}, \mathbf{R}^+$ 或 $[a, b]$ 时, 称 $\{X_t, t \in T\}$ 为连续参数的随机过程;

当 $T = \mathbf{C}$ 或 \mathbf{C}^+ 时, 称 $\{X_t, t \in T\}$ 为离散参数的随机过程 (随机序列);

当 $T = \mathbf{R}^n, (\mathbf{R}^+)^n, \mathbf{C}^n$ 或 $(\mathbf{C}^+)^n (n \geq 2)$ 时, 称 $\{X_t, t \in T\}$ 为随机场.

随机过程的 4 种类型:

(1) 指标集 T 离散, 状态空间 E 离散的随机过程;

(2) 指标集 T 离散, 状态空间 E 连续的随机过程;

(3) 指标集 T 连续, 状态空间 E 离散的随机过程;

(4) 指标集 T 连续, 状态空间 E 连续的随机过程.

然而, 以上分类是表面的, 更深刻的是按随机过程的概率结构来分类. 例如, 分为马尔可夫 (Markov) 过程、平稳过程、独立增量过程、二阶矩过程、正态过程、泊松 (Poisson) 过程、生灭过程、分枝过程、更新过程、鞅等.

对于随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 而言, 可以这样设想, 有一个做随机游动的质点 M , 以 X_t 表示在时刻 t 质点 M 的位置. 于是 $\{X_t, t \in T\}$ 描绘了质点 M 所做的随机运动的变化过程, 一般把 “ $X_t = x$ ” 形象地说成 “在时刻 t 质点 M 处于状态 x ”.

定义 1.2 设 $\{X_t, t \in T\}$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的、以 (E, \mathcal{E}) 为状态空间的随机过程, $T = \mathbf{R}^+$ (或 \mathbf{R} 或直线上的任一区间). 如果 $\forall A \in \mathcal{E}$, 有

$$\{(t, \omega) | (t, \omega) \in T \times \Omega, X(t, \omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T) \times \mathcal{F}$$

则称 $\{X_t, t \in T\}$ 是可测的.

设 $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ 是 \mathcal{F} 中的一族单调增的子 σ 代数. 如果 $\forall t \in T, A \in \mathcal{E}$, 有

$$\{(u, \omega) | (u, \omega) \in [0, t] \times \Omega, X(t, \omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$$

则称 $\{X_t, t \in T\}$ 关于 $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ 循序可测.

命题 1.1 设 $X_t: \Omega \rightarrow E, X_t \in \mathcal{F}_t/\mathcal{E} (\forall t \in T)$, $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ 是 \mathcal{F} 中的一族单调增的子 σ 代数. 如果 $\{X_t, t \in T\}$ 关于 $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ 循序可测, 则 $\{X_t, t \in T\}$ 是可测的.

定义 1.3 设 $\{X_t, t \in T\}$ 是随机过程, 称

$$F_t(x) \triangleq P\{\omega | X_t(\omega) \leq x\} = P\{X_t \leq x\}, \quad x \in \mathbf{R}, \forall t \in T$$

为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的一维分布函数; 称

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) \triangleq P\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2\}, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}, \forall t_1, t_2 \in T$$

为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的二维分布函数; 一般地, 称

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \triangleq P\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n\}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}, \quad \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T$$

为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的 n 维分布函数; 而称

$$F \triangleq \{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) | t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的有限维分布函数族.

随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的有限维分布函数族 F 具有下列性质:

(1) 对 $\forall n \geq 1, \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, 及 t_1, t_2, \dots, t_n 的任意排列 $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}$, 有

$$F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{对称性})$$

(2) 对 $\forall 1 \leq m \leq n$, 有

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_{t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty) \quad (\text{相容性})$$

注 1.1 若知道了随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的有限维分布函数族 F , 便知道了这一随机过程中任意有限个随机变量的联合分布, 也就可以完全确定它们之间的相互关系. 可见, 随机过程的有限维分布函数族能够完整地描述随机过程的统计特征. 但是在实际问题中, 要知道随机过程的有限维分布函数族是不可能的, 因此, 人们想到了用随机过程的某些数字特征来刻画随机过程.

定义 1.4 设 $\{X_t, t \in T\}$ 是随机过程. 称

$$m(t) \triangleq EX_t = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_t(x) = \int_{\Omega} X_t(\omega) P(d\omega), \quad t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的均值函数; 称

$$D(t) \triangleq DX_t = E(X_t - m(t))^2, \quad t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的方差函数; 称

$$C(s, t) \triangleq \text{Cov}(X_s, X_t) = E(X_s - m(s))(X_t - m(t)), \quad s, t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的协方差函数; 称

$$R(s, t) = E(X_s X_t), \quad s, t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的相关函数.

注 1.2 若 $\{X_t, t \in T\}$ 是复值随机过程, 则方差函数的定义为

$$D(t) = E|X_t - m(t)|^2, \quad t \in T$$

协方差函数的定义为

$$C(s, t) = E(X_s - m(s))\overline{(X_t - m(t))}, \quad s, t \in T$$

相关函数的定义为

$$R(s, t) = E(X_s \overline{X_t}), \quad s, t \in T$$

性质 1.1

- (1) $C(t, t) = D(t), t \in T$;
- (2) $C(s, t) = R(s, t) - m(s)m(t), s, t \in T$;
- (3) 若 $m(t) \equiv 0$, 则 $C(s, t) = R(s, t), s, t \in T$.

1.2 马尔可夫链的定义

在实际应用中有一类很广泛的随机过程,其特点是:过去只影响现在,而不影响将来.这种随机过程称为马尔可夫过程.状态离散的马尔可夫过程称为马尔可夫链,本章介绍时间离散的马尔可夫链(简称马尔可夫链).

马尔可夫过程的研究始于 1906 年,是随机过程的一个重要分支,它在近代物理学、生物学、管理科学、信息处理、自动控制、金融保险等方面有着许多重要应用.

在本章中,无特别声明我们总是假设:

- (1) 参数集合 $T = \{0, 1, 2, \dots\}$;
- (2) 状态空间 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 或 $S = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ 或其子集.

定义 1.5 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机过程,状态空间为 S .若对于任意的 $n \geq 1$ 及任意的整数 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$, $i_1, i_2, \dots, i_n, j \in S$, 有

$$P\{X_t = j | X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \dots, X_{t_n} = i_n\} = P\{X_t = j | X_{t_n} = i_n\} \quad (1.2.1)$$

则称 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马尔可夫链,简称马氏链.等式 (1.2.1) 称为马氏性 or 无后效性,且假定式 (1.2.1) 两端的条件概率都有意义(以下涉及条件概率的式子都作类似的假定).

定理 1.1 随机过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是马尔可夫链的充要条件是对任意的 $n \geq 1$ 及任意的 $i_1, i_2, \dots, i_n, j \in S$, 有

$$P\{X_{n+1} = j | X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i_n\}$$

1.3 转移概率

对于马尔可夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$, 描述它概率性质最重要的是它在时刻 m 的一步转移概率 $p_{ij}(m) = P\{X_{m+1} = j | X_m = i\}, i, j \in S$.

马尔可夫链是描述某些特定的随机现象的数学模型,而产生这种特定的随机现象的具体模型一般称为系统,因此我们经常把事件 $\{X_m = i\}$ 说成是在时刻 m 时系统处于状态 i , 把 $P\{X_{m+1} = j | X_m = i\}$ 说成是已知在时刻 m 时系统处于状态 i , 而在时刻 $m+1$ 时系统转移到状态 j 的概率等.

定义 1.6 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是状态空间为 S 的马尔可夫链,称

$$p_{ij}^{(n)}(m) = P\{X_{m+n} = j | X_m = i\}, \quad i, j \in S$$

为系统在时刻 m 时处于状态 i 的条件下,经 n 步转移到状态 j 的 n 步转移概率,简称时刻 m 的 n 步转移概率.

显然, $p_{ij}^{(n)}(m)$ 具有下列性质:

$$(1) p_{ij}^{(n)}(m) \geq 0, \quad i, j \in S;$$

$$(2) \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)}(m) = \sum_{j \in S} P\{X_{m+n} = j | X_m = i\} = 1, i \in S.$$

上述性质说明了, 对于任意给定的 $i \in S$ 及 $m \geq 0, n \geq 1, \{p_{ij}^{(n)}(m), j \in S\}$ 是一个概率分布. 规定:

$$(1) p_{ij}^{(1)}(m) = p_{ij}(m);$$

$$(2) p_{ij}^{(0)}(m) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

若 $p_{ij}^{(n)}(m)$ 与 m 无关, 则称 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是时齐的或齐次的马尔可夫链. 此时, 记 $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)}(m), i, j \in S, n \geq 1$; 一步转移概率记为 $p_{ij} = p_{ij}^{(1)}, i, j \in S$.

对时齐的马尔可夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$, 有

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j | X_m = i\} = P\{X_n = j | X_0 = i\}, i, j \in S, \forall m \geq 0$$

以下恒设马尔可夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是时齐的, 并简称为马尔可夫链.

性质 1.2 马尔可夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 具有下列性质:

$$(1) \forall i, j \in S, p_{ij}^{(n)} \geq 0;$$

$$(2) \forall i \in S, \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

定理 1.2 (Chapman-Kolmogorov) 设 $p_{ij}^{(n)}$ 是马尔可夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的 n 步转移概率, 则 $\forall i, j \in S, m, n \geq 0$, 有

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \quad (\text{C-K 方程})$$

$$\text{证明} \quad p_{ij}^{(m+n)} = P\{X_{m+n} = j | X_0 = i\} = P\left\{\bigcup_{k \in S} \{X_m = k\}, X_{m+n} = j | X_0 = i\right\}$$

$$= P\left\{\bigcup_{k \in S} \{X_m = k, X_{m+n} = j\} | X_0 = i\right\}$$

$$= \sum_{k \in S} P\{X_m = k, X_{m+n} = j | X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k \in S} P\{X_m = k | X_0 = i\} P\{X_{m+n} = j | X_0 = i, X_m = k\}$$

$$= \sum_{k \in S} P\{X_m = k | X_0 = i\} P\{X_{m+n} = j | X_m = k\}$$

$$= \sum_{k \in S} P\{X_m = k | X_0 = i\} P\{X_n = j | X_0 = k\} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

定理 1.3 马尔可夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的一步转移概率 p_{ij} 可以确定所有的 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$.

证明 由 C-K 方程, 显然. 记 $\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in S}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} = (p_{ij})_{i,j \in S}$. 称 $\mathbf{P}^{(n)}$ 为马尔可夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的 n 步转移矩阵, 称 \mathbf{P} 为马尔可夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的 (一步) 转移矩阵. 此时, C-K 方程可表示为 $\mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(m)} \mathbf{P}^{(n)}$ 且 $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$.

定义 1.7 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是马尔可夫链, 对任意的 $n \geq 0$, 称 $\pi_i(n) = P\{X_n = i\}$, $i \in S$ 为绝对概率. 特别地, 称 $\pi_i(0) = P\{X_0 = i\}$, $i \in S$ 为初始概率.

显然, 绝对概率和初始概率具有下列性质:

$$\begin{cases} \pi_i(n) \geq 0, i \in S, \\ \sum_{i \in S} \pi_i(n) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_i(0) \geq 0, i \in S \\ \sum_{i \in S} \pi_i(0) = 1 \end{cases}$$

故对任意 $n \geq 0$, $\{\pi_i(n), i \in S\}$ 是概率分布, 通常称为绝对(概率)分布; 特别地, $\{\pi_i(0), i \in S\}$ 称为初始(概率)分布. 记 $\Pi(0) = \{\pi_i(0)\}_{i \in S}$, $\Pi(n) = \{\pi_i(n)\}_{i \in S}$.

定理 1.4 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是马尔可夫链, 则它的任意有限维概率分布完全由初始分布和一步转移概率决定.

证明 对任意的 $n \geq 1$, 任意的整数 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 及任意的 $i_1, i_2, \cdots, i_n \in S$, 有

$$\begin{aligned} & P\{X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\} \\ &= P\left\{\bigcup_{i \in S} \{X_0 = i\}, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\right\} \\ &= P\left\{\bigcup_{i \in S} \{X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\}\right\} \\ &= \sum_{i \in S} P\{X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\} \\ &= \sum_{i \in S} P\{X_0 = i\} P\{X_{t_1} = i_1 | X_0 = i\} P\{X_{t_2} = i_2 | X_0 = i, X_{t_1} = i_1\} \\ &\quad \cdots P\{X_{t_n} = i_n | X_0 = i, X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\} \\ &= \sum_{i \in S} P\{X_0 = i\} P\{X_{t_1} = i_1 | X_0 = i\} P\{X_{t_2} = i_2 | X_{t_1} = i_1\} \\ &\quad \cdots P\{X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\} \\ &= \sum_{i \in S} \pi_i(0) p_{ii_1}^{(t_1)} p_{i_1 i_2}^{(t_2 - t_1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(t_n - t_{n-1})} \end{aligned}$$

1.4 若干例子

定义 1.8 设 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ 是取整数值独立同分布的随机变量序列, 令 $X_n = \sum_{k=0}^n \xi_k$, 则称 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为随机游动.

定理 1.5 随机游动 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是时齐的马尔可夫链. (证明略.)

例 1.1 (无限制的随机游动) 若随机游动 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间为 $S = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, 且转移概率为

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i + 1, \\ q, & j = i - 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad i, j \in S$$

其中 $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. 求 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$.

解 设在 n 步转移中, 向右移动 x 步, 向左移动 y 步, 则经 n 步从 i 到达 j , x 和 y 应满足 $x + y = n$, $x - y = j - i$. 所以

$$x = \frac{n + (j - i)}{2}, \quad y = \frac{n - (j - i)}{2}$$

因 x, y 只能取正整数, 故 $n + (j - i)$ 与 $n - (j - i)$ 必须是偶数. 又因在 n 步转移中有 x 步向右移动, 故经 n 步转移由 i 到 j 共有 C_n^x 种方式, 于是

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} C_n^{\frac{n+(j-i)}{2}} p^{\frac{n+(j-i)}{2}} q^{\frac{n-(j-i)}{2}}, & n + (j - i) \text{ 偶,} \\ 0, & n + (j - i) \text{ 奇.} \end{cases}$$

特别地,

$$p_{ii}^{(n)} = \begin{cases} C_n^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 偶,} \\ 0, & n \text{ 奇.} \end{cases}$$

例 1.2 (带有一个吸收壁的随机游动) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是随机游动, 其状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, 若转移概率为

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 0, \\ p, & j = i + 1, \\ q, & j = i - 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad i, j \in S, 0 < p < 1, p + q = 1$$