Stochastic process

随机过程

李龙锁　编著　　王勇　主审

科学出版社

随 机 过 程

李龙锁　编著
王　勇　主审

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

全书共 13 章. 第 1~4 章主要介绍马尔可夫过程的一般理论及几类典型的随机过程. 第 5~13 章详细介绍一维和多维平稳过程的谱理论和预测理论.

本书可作为高等院校数学专业硕士研究生"随机过程"课程的教材, 也可供理科、工科、财经、师范院校相关专业的硕士生、博士生和教师参考, 还可供有关的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

随机过程/李龙锁编著. —北京: 科学出版社, 2011
ISBN 978-7-03-031042-2

Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①随机过程-研究生-教材 Ⅳ. ①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 086169 号

责任编辑: 张中兴 / 责任校对: 宋玲玲
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2011 年 6 月第一次印刷 印张: 18
印数: 1—3000 字数: 360 000

定价: 37.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

经过各国数学家半个多世纪的努力, 随机过程现已成为一门独特又内容丰富的数学学科. 它不仅有完整的理论体系, 而且还广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中. 例如, 预测和滤波应用于空间技术和自动控制; 时间序列分析应用于石油勘探和经济管理; 马尔可夫过程与点过程应用于地震预报和气象预报等.

为了满足教学的需要, 作者把近年来给数学系硕士研究生讲授的 "随机过程" 讲义整理成书. 本书不仅可作为高等院校数学专业硕士研究生 "随机过程" 课程的教材, 也可供理科、工科、财经、师范院校相关专业硕士、博士研究生和教师参考.

全书分为 3 个部分: 马尔可夫过程基本理论及几类典型的随机过程 (第 1 ~ 4 章); 一维平稳过程的谱理论和预测理论 (第 5 ~ 9 章); 多维平稳过程的谱理论和预测理论 (第 10 ~ 13 章). 特别要指出的是, 本书对平稳过程理论的介绍是比较详尽的.

在本书的写作过程中, 自始至终都得到了王勇教授的关怀与鼓励, 他审阅了本书的全稿, 并提出了许多宝贵的建议和意见, 在此谨致深深的谢意.

感谢我的硕士导师许承德教授将我带入随机过程领域, 他二十多年来无私的关爱和不倦的教诲是完成此书的动力源泉, 在此对老师致以深深的谢意.

由于作者的水平有限, 书中疏漏及不妥之处在所难免, 恳请读者批评指正.

李龙锁

2011 年于哈尔滨工业大学

符 号 意 义

$\forall$	任取
a.e.	几乎处处
a.e.μ	在测度 μ 意义下几乎处处
$\mathbf{N}$	整数集
$\mathbf{R}$	实数集; 一维 Euclid 空间
$\mathbf{R}^n$	n 维 Euclid 空间
$\mathbf{R}^\infty$	实数序列 $(x_1, x_2, \cdots)$ 全体
$\mathbf{C}$	复数集
$\mathbf{C}^n$	n 维复向量空间
$\Leftarrow$	充分性
$\Rightarrow$	必要性
$A \Rightarrow B$	由 A 成立推得 B 成立
$*) \Rightarrow **)$	*) 式成立, 往证 **) 式成立
$\Leftrightarrow$	充分必要条件
$\varnothing$	空集
$A \triangle B$	$A \triangle B = (A - B) \cap (B - A)$ 称为 A 与 B 的对称差
$\overline{\lim\limits_{n}} S_n$	集合序列 S_n 的上极限
$\underline{\lim\limits_{n}} S_n$	集合序列 S_n 的下极限

目　录

第 1 章　离散时间的马尔可夫链

1.1　一般随机过程的基本概念

定义 1.1　设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间, $(E,\mathscr{E})$ 是可测空间, T 是指标集. 若对任何 $t\in T$, 有 $X_t:\Omega\to E$, 且 $X_t\in\mathscr{F}/\mathscr{E}$, 则称 $\{X_t(\omega),t\in T\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的取值于 $(E,\mathscr{E})$ 中的随机过程, 在无混淆的情况下简称 $\{X_t(\omega),t\in T\}$ 为随机过程, 称 $(E,\mathscr{E})$ 为状态空间或相空间, 称 E 中的元素为状态, 称 T 为时间域. 对每个固定的 $\omega\in\Omega$, 称 $X_t(\omega)$ 为 $\{X_t(\omega),t\in T\}$ 对应于 ω 的轨道或现实, 对每个固定的 $t\in T$, 称 $X_t(\omega)$ 为 E 值随机元. 有时 $X_t(\omega)$ 也记为

$$X_t(\omega)=X_t=X(t)=X(t,\omega)$$

设 $T\subset\mathbf{R}$, $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一族单调增的子 σ 代数 (σ 代数流), 即

(1) $\forall\, t\in T\Rightarrow\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$, 且 $\mathscr{F}_t$ 是 σ 代数;

(2) $\forall\, s,t\in T,s<t\Rightarrow\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$.

若 $X_t\in\mathscr{F}_t/\mathscr{E}(\forall\, t\in T)$, 则称 $\{X_t,t\in T\}$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应的随机过程, 或适应于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的随机过程. 特别地, 若令

$$\mathscr{F}_t\triangleq\sigma(X_s,s\leqslant t,s\in T)\triangleq\sigma\Bigg(\bigcup_{\substack{s\leqslant t\\ s\in T}}X_s^{-1}(\mathscr{E})\Bigg)$$

是由 $\{X_s,s\leqslant t,s\in T\}$ 所生成的 σ 代数, 则 $\{X_t,t\in T\}$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应的随机过程.

当 $(E,\mathscr{E})=(\mathbf{R},\mathscr{B}_1)$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为实值随机过程;

当 $(E,\mathscr{E})=(\mathbf{C},\mathscr{B}_{\mathbf{C}})$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为复值随机过程;

当 $(E,\mathscr{E})=(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}_n)$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为 n 维随机过程;

当 E 是可列集 (有限集) 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为可列 (有限) 随机过程;

当 $T=\mathbf{R},\mathbf{R}^+$ 或 $[a,b]$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为连续参数的随机过程;

当 $T=\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{C}^+$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为离散参数的随机过程 (随机序列);

当 $T=\mathbf{R}^n,(\mathbf{R}^+)^n,\mathbf{C}^n$ 或 $(\mathbf{C}^+)^n(n\geqslant 2)$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为随机场.

随机过程的 4 种类型:

(1) 指标集 T 离散, 状态空间 E 离散的随机过程;

(2) 指标集 T 离散, 状态空间 E 连续的随机过程;

(3) 指标集 T 连续, 状态空间 E 离散的随机过程;

(4) 指标集 T 连续, 状态空间 E 连续的随机过程.

然而, 以上分类是表面的, 更深刻的是按随机过程的概率结构来分类. 例如, 分为马尔可夫 (Markov) 过程、平稳过程、独立增量过程、二阶矩过程、正态过程、泊松 (Poisson) 过程、生灭过程、分枝过程、更新过程、鞅等.

对于随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 而言, 可以这样设想, 有一个做随机游动的质点 M, 以 X_t 表示在时刻 t 质点 M 的位置. 于是 $\{X_t, t \in T\}$ 描绘了质点 M 所做的随机运动的变化过程, 一般把 "$X_t = x$" 形象地说成 "在时刻 t 质点 M 处于状态 x".

定义 1.2 设 $\{X_t, t \in T\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的、以 $(E, \mathscr{E})$ 为状态空间的随机过程, $T = \mathbf{R}^+$ (或 $\mathbf{R}$ 或直线上的任一区间). 如果 $\forall A \in \mathscr{E}$, 有

$$\{(t,\omega)|(t,\omega) \in T \times \Omega, X(t,\omega) \in A\} \in \mathscr{B}(T) \times \mathscr{F}$$

则称 $\{X_t, t \in T\}$ 是**可测的**.

设 $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一族单调增的子 σ 代数. 如果 $\forall t \in T, A \in \mathscr{E}$, 有

$$\{(u,\omega)|(u,\omega) \in [0,t] \times \Omega, X(t,\omega) \in A\} \in \mathscr{B}([0,t]) \times \mathscr{F}_t$$

则称 $\{X_t, t \in T\}$ 关于 $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$**循序可测**.

命题 1.1 设 $X_t : \Omega \to E$, $X_t \in \mathscr{F}_t/\mathscr{E}\,(\forall t \in T)$, $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一族单调增的子 σ 代数. 如果 $\{X_t, t \in T\}$ 关于 $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$ 循序可测, 则 $\{X_t, t \in T\}$ 是可测的.

定义 1.3 设 $\{X_t, t \in T\}$ 是随机过程, 称

$$F_t(x) \triangleq P\{\omega|X_t(\omega) \leqslant x\} = P\{X_t \leqslant x\}, \quad x \in \mathbf{R}, \forall t \in T$$

为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的**一维分布函数**; 称

$$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2) \triangleq P\{X_{t_1} \leqslant x_1,\ X_{t_2} \leqslant x_2\}, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}, \forall t_1, t_2 \in T$$

为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的**二维分布函数**; 一般地, 称

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq P\{X_{t_1} \leqslant x_1,\ X_{t_2} \leqslant x_2, \cdots, X_{t_n} \leqslant x_n\}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}, \quad \forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$$

为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的 **n 维分布函数**; 而称

$$F \triangleq \{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\, t_1, t_2, \cdots, t_n \in T,\ n \geqslant 1\}$$

为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的**有限维分布函数族**.

随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的有限维分布函数族 F 具有下列性质:

(1) 对 $\forall n \geqslant 1, \forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, 及 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的任意排列 $t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n}$, 有

$$F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}) = F_{t_1, t_2, \cdots, t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (\text{对称性})$$

(2) 对 $\forall 1 \leqslant m \leqslant n$, 有

$$F_{t_1, t_2, \cdots, t_m}(x_1, x_2, \cdots, x_m) = F_{t_1, t_2, \cdots, t_m, t_{m+1}, \cdots, t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_m, +\infty, \cdots, +\infty) \quad (\text{相容性})$$

注 1.1 若知道了随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的有限维分布函数族 F, 便知道了这一随机过程中任意有限个随机变量的联合分布, 也就可以完全确定它们之间的相互关系. 可见, 随机过程的有限维分布函数族能够完整地描述随机过程的统计特征. 但是在实际问题中, 要知道随机过程的有限维分布函数族是不可能的, 因此, 人们想到了用随机过程的某些数字特征来刻画随机过程.

定义 1.4 设 $\{X_t, t \in T\}$ 是随机过程. 称

$$m(t) \triangleq EX_t = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F_t(x) = \int_{\Omega} X_t(\omega) \, P(\mathrm{d}\omega), \quad t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的*均值函数*; 称

$$D(t) \triangleq DX_t = E(X_t - m(t))^2, \quad t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的*方差函数*; 称

$$C(s, t) \triangleq \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = E(X_s - m(s))(X_t - m(t)), \quad s, t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的*协方差函数*; 称

$$R(s, t) = E(X_s X_t), \quad s, t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的*相关函数*.

注 1.2 若 $\{X_t, t \in T\}$ 是复值随机过程, 则方差函数的定义为

$$D(t) = E\left|X_t - m(t)\right|^2, \quad t \in T$$

协方差函数的定义为

$$C(s, t) = E(X_s - m(s))\overline{(X_t - m(t))}, \quad s, t \in T$$

相关函数的定义为

$$R(s, t) = E(X_s \overline{X_t}), \quad s, t \in T$$

性质 1.1

(1) $C(t, t) = D(t), t \in T$;

(2) $C(s, t) = R(s, t) - m(s)m(t), s, t \in T$;

(3) 若 $m(t) \equiv 0$, 则 $C(s, t) = R(s, t), s, t \in T$.

1.2 马尔可夫链的定义

在实际应用中有一类很广泛的随机过程, 其特点是: 过去只影响现在, 而不影响将来. 这种随机过程称为**马尔可夫过程**. 状态离散的马尔可夫过程称为**马尔可夫链**, 本章介绍时间离散的马尔可夫链 (简称马尔可夫链).

马尔可夫过程的研究始于 1906 年, 是随机过程的一个重要分支, 它在近代物理学、生物学、管理科学、信息处理、自动控制、金融保险等方面有着许多重要应用.

在本章中, 无特别声明我们总是假设:

(1) 参数集合 $T=\{0,1,2,\cdots\}$;

(2) 状态空间 $S=\{0,1,2,\cdots\}$ 或 $S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ 或其子集.

定义 1.5 设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机过程, 状态空间为 S. 若对于任意的 $n\geqslant 1$ 及任意的整数 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n<t, i_1,i_2,\cdots,i_n,j\in S$, 有

$$P\{X_t=j\,|X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_n}=i_n\}=P\{X_t=j\,|X_{t_n}=i_n\} \tag{1.2.1}$$

则称 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 为马尔可夫链, 简称马氏链. 等式 (1.2.1) 称为**马氏性**或**无后效性**, 且假定式 (1.2.1) 两端的条件概率都有意义 (以下涉及条件概率的式子都作类似的假定).

定理 1.1 随机过程 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是马尔可夫链的充要条件是对任意的 $n\geqslant 1$ 及任意的 $i_1,i_2,\cdots,i_n,j\in S$, 有

$$P\{X_{n+1}=j\,|X_1=i_1,X_2=i_2,\cdots,X_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=j\,|X_n=i_n\}$$

1.3 转 移 概 率

对于马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$, 描述它概率性质最重要的是它在时刻 m 的一步转移概率 $p_{ij}(m)=P\{X_{m+1}=j|\,X_m=i\},i,j\in S$.

马尔可夫链是描述某些特定的随机现象的数学模型, 而产生这种特定的随机现象的具体模型一般称为**系统**, 因此我们经常把事件 $\{X_m=i\}$ 说成是在时刻 m 时系统处于状态 i, 把 $P\{X_{m+1}=j|\,X_m=i\}$ 说成已知在时刻 m 时系统处于状态 i, 而在时刻 $m+1$ 时系统转移到状态 j 的概率等.

定义 1.6 设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是状态空间为 S 的马尔可夫链, 称

$$p_{ij}^{(n)}(m)=P\{X_{m+n}=j|\,X_m=i\},\quad i,j\in S$$

为系统在时刻 m 时处于状态 i 的条件下, 经 n 步转移到状态 j 的 n 步转移概率, 简称**时刻 m 的 n 步转移概率**.

显然, $p_{ij}^{(n)}(m)$ 具有下列性质:

(1) $p_{ij}^{(n)}(m) \geqslant 0, \quad i,j \in S$;

(2) $\sum\limits_{j \in S} p_{ij}^{(n)}(m) = \sum\limits_{j \in S} P\{X_{m+n} = j | X_m = i\} = 1, i \in S$.

上述性质说明了, 对于任意给定的 $i \in S$ 及 $m \geqslant 0, n \geqslant 1$, $\left\{p_{ij}^{(n)}(m), j \in S\right\}$ 是一个概率分布. 规定:

(1) $p_{ij}^{(1)}(m) = p_{ij}(m)$;

(2) $p_{ij}^{(0)}(m) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

若 $p_{ij}^{(n)}(m)$ 与 m 无关, 则称 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是时齐的或齐次的马尔可夫链. 此时, 记 $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)}(m), i,j \in S, n \geqslant 1$; 一步转移概率记为 $p_{ij} = p_{ij}^{(1)}, i,j \in S$.

对时齐的马尔可夫链 $\{X_n, n \geqslant 0\}$, 有

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j | X_m = i\} = P\{X_n = j | X_0 = i\}, i,j \in S, \forall m \geqslant 0$$

以下恒设马尔可夫链 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是时齐的, 并简称为马尔可夫链.

性质 1.2 马尔可夫链 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 的 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 具有下列性质:

(1) $\forall i,j \in S, \ p_{ij}^{(n)} \geqslant 0$;

(2) $\forall i \in S, \sum\limits_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = 1$.

定理 1.2 (Chapman-Kolmogorov) 设 $p_{ij}^{(n)}$ 是马尔可夫链 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 的 n 步转移概率, 则 $\forall i,j \in S, \ m,n \geqslant 0$, 有

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \quad \text{(C-K方程)}$$

证明 $p_{ij}^{(m+n)} = P\{X_{m+n} = j | X_0 = i\} = P\left\{\bigcup\limits_{k \in S} \{X_m = k\}, X_{m+n} = j | X_0 = i\right\}$

$$\begin{aligned}
&= P\left\{\bigcup_{k \in S} \{X_m = k, X_{m+n} = j\} | X_0 = i\right\} \\
&= \sum_{k \in S} P\{X_m = k, X_{m+n} = j | X_0 = i\} \\
&= \sum_{k \in S} P\{X_m = k | X_0 = i\} P\{X_{m+n} = j | X_0 = i, X_m = k\} \\
&= \sum_{k \in S} P\{X_m = k | X_0 = i\} P\{X_{m+n} = j | X_m = k\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k \in S} P\{X_m = k | X_0 = i\} P\{X_n = j | X_0 = k\} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

定理 1.3　马尔可夫链 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 的一步转移概率 p_{ij} 可以确定所有的 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$.

证明　由 C-K 方程, 显然. 记 $\boldsymbol{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in S}, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{(1)} = (p_{ij})_{i,j \in S}$. 称 $\boldsymbol{P}^{(n)}$ 为马尔可夫链 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 的 n 步转移矩阵, 称 $\boldsymbol{P}$ 为马尔可夫链 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 的 (一步) 转移矩阵. 此时, C-K 方程可表示为 $\boldsymbol{P}^{(m+n)} = \boldsymbol{P}^{(m)} \boldsymbol{P}^{(n)}$ 且 $\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^n$.

定义 1.7　设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是马尔可夫链, 对任意的 $n \geqslant 0$, 称 $\pi_i(n) = P\{X_n = i\}$, $i \in S$ 为**绝对概率**. 特别地, 称 $\pi_i(0) = P\{X_0 = i\}, i \in S$ 为**初始概率**.

显然, 绝对概率和初始概率具有下列性质:

$$\begin{cases} \pi_i(n) \geqslant 0, \ i \in S, \\ \displaystyle\sum_{i \in S} \pi_i(n) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_i(0) \geqslant 0, \ i \in S \\ \displaystyle\sum_{i \in S} \pi_i(0) = 1 \end{cases}$$

故对任意 $n \geqslant 0$, $\{\pi_i(n), i \in S\}$ 是概率分布, 通常称为**绝对(概率)分布**; 特别地, $\{\pi_i(0), i \in S\}$ 称为**初始(概率)分布**. 记 $\Pi(0) = \{\pi_i(0)\}_{i \in S}, \Pi(n) = \{\pi_i(n)\}_{i \in S}$.

定理 1.4　设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是马尔可夫链, 则它的任意有限维概率分布完全由初始分布和一步转移概率决定.

证明　对任意的 $n \geqslant 1$, 任意的整数 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 及任意的 $i_1, i_2, \cdots, i_n \in S$, 有

$$\begin{aligned}
& P\{X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\} \\
= & P\left\{\bigcup_{i \in S} \{X_0 = i\}, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\right\} \\
= & P\left\{\bigcup_{i \in S} \{X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\}\right\} \\
= & \sum_{i \in S} P\{X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\} \\
= & \sum_{i \in S} P\{X_0 = i\} P\{X_{t_1} = i_1 | X_0 = i\} P\{X_{t_2} = i_2 | X_0 = i, X_{t_1} = i_1\} \\
& \cdots P\{X_{t_n} = i_n | X_0 = i, X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\} \\
= & \sum_{i \in S} P\{X_0 = i\} P\{X_{t_1} = i_1 | X_0 = i\} P\{X_{t_2} = i_2 | X_{t_1} = i_1\} \\
& \cdots P\{X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\} \\
= & \sum_{i \in S} \pi_i(0) p_{ii_1}^{(t_1)} p_{i_1 i_2}^{(t_2 - t_1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(t_n - t_{n-1})}
\end{aligned}$$

1.4 若干例子

定义 1.8 设 $\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots$ 是取整数值的独立同分布的随机变量序列, 令 $X_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\xi_k$, 则称 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 为随机游动.

定理 1.5 随机游动 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是时齐的马尔可夫链. (证明略.)

例 1.1 (无限制的随机游动) 若随机游动 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 的状态空间为 $S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$, 且转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases} p, & j=i+1,\\ q, & j=i-1, \qquad i,j\in S\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $0<p<1,\ q=1-p$. 求 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$.

解 设在 n 步转移中, 向右移动 x 步, 向左移动 y 步, 则经 n 步从 i 到达 j, x 和 y 应满足 $x+y=n$, $x-y=j-i$. 所以

$$x=\frac{n+(j-i)}{2},\quad y=\frac{n-(j-i)}{2}$$

因 x,y 只能取正整数, 故 $n+(j-i)$ 与 $n-(j-i)$ 必须是偶数. 又因在 n 步转移中有 x 步向右移动, 故经 n 步转移由 i 到 j 共有 C_n^x 种方式, 于是

$$p_{ij}^{(n)}=\begin{cases} \mathrm{C}_n^{\frac{n+(j-i)}{2}}p^{\frac{n+(j-i)}{2}}q^{\frac{n-(j-i)}{2}}, & n+(j-i)\ \text{偶},\\ 0, & n+(j-i)\ \text{奇}.\end{cases}$$

特别地,

$$p_{ii}^{(n)}=\begin{cases} \mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}q^{\frac{n}{2}}, & n\ \text{偶},\\ 0, & n\ \text{奇}.\end{cases}$$

例 1.2 (带有一个吸收壁的随机游动) 设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是随机游动, 其状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$, 若转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j=0,\\ p, & j=i+1,\\ q, & j=i-1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad i,j\in S,0<p<1,p+q=1$$