高等概率论与随机过程

龚兆仁　编著

大连理工大学出版社

责任编辑　许芳春
封面设计　孙宝福

ISBN 7-5611-0997-0

9 787561 109977 >

ISBN 7-5611-0997-0
O · 132　定价:7.50

高等概率论与随机过程

龚兆仁　编著

大连理工大学出版社

(辽)新登字 16 号

内 容 提 要

本书以测度论的观点和方法讲述了近代概率论基础以及随机过程的基本知识。内容简明扼要，循序渐进，证明严谨易懂，叙述通俗明了。所选用的内容层次分明，既注意经典理论又赋有近代观点，既注意与学生原有基础的联系又有较大的提高与难度。每章后面配有习题并给出参考解答，便于自学。

本书可作为工科院校研究生教材，或大学本科高年级学生选修课的参考书，也可供其他有关人员参考。

高等概率论与随机过程
Gaodeng Gailulun Yu Suiji Guocheng
龚兆仁 编著
*　　*　　*
大连理工大学出版社出版发行
（邮政编码：116024）
大连海事大学印刷厂印刷
*　　*　　*
开本：787×1092　1/32　印张：9.5　字数：202 千字
1995 年 2 月第 1 版　　1995 年 2 月第 1 次印刷
印数：0001－1000 册
*　　*　　*
责任编辑：许芳春　　责任校对：王　堇
封面设计：孙宝福
*　　*　　*
ISBN 7-5611-0997-0
O·132
定价：7.50 元

序

概率论与随机过程是数学的一个分支，它与近代的工程技术、社会经济活动的分析、生物生态环境的变化……等等都有密切的联系，成为其他学科中描述、分析、处理随机现象的必不可缺的工具。因此一本系统介绍这方面的知识，给非数学专业的研究生、高年级本科生、青年教师以及专业人员使用的教材，就很需要。既不要过多的数学知识的准备，又能比较严谨又清晰地讲述这些内容，使学的人学了就能作为自己的工具，适合这一特点的书就很不容易。

龚兆仁同志多年来给非数学专业的理工科硕士生讲授这方面的内容，有丰富的教学经验，用大约十几万字的篇幅，就可以把近代概率论、随机过程的重要结果介绍给读者，如马尔可夫链，平稳过程，鞅论等，并附有一定数量的习题，非常适合作为研究生的教材或自学的参考书。现在在经济活动、生态环境的演变等领域，也是用随机过程作为描述、确定数学模型的基本手段，所以这一方面的研究生、研究人员也可以从这本书中学到自己所需要的知识。

我相信这本书的出版对于高等院校的教学和科研，特别是非数学专业的各个领域，会有很好的作用。希望不久的将来，这些知识如同微积分一样，成为自然科学、社会科学各方面的学生、研究人员的必备的基础。

张尧庭

1995 年 1 月于北京

前　　言

随着科学技术的发展，近代概率论与随机过程已成为许多理工科院校硕士研究生的一门基础课程。编者在多年研究生教学实践的基础上，参考并吸取了同类书籍有关部分的内容和方法编写了这本教材，力求在不太多的篇幅内较为精炼地讲述这方面的知识，努力做到内容简明扼要，证明严谨易懂，叙述通俗明了。

全书共分两大部分：1～4 章为高等概率论部分，以测度论的观点和方法讲述概率论基础中的一些重要问题，其中独立性、积分、条件期望、各种收敛性及重要不等式等，是今后进一步深入学习和研究所必需的。5～8 章为随机过程基本知识部分，介绍随机过程的基本概念、基本内容及一些重要随机过程。各章独立性较大，可以根据需要进行选择。

在完成本书过程中，张尧庭先生、程乾生先生都给予热情的鼓励和支持，并为本书作序，在此深表谢意。

由于水平所限，编写工作又较匆忙，错误和不足之处难免，恳请读者批评指正。

龚兆仁

1994 年 12 月

目　　录

第一章　事件，概率与概率空间

§1.1　事件，集合与集合类

一、事件与集合

概率论是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，我们关心随机现象（通过随机试验或观测来研究）的结果及其发生的可能性大小。在给定条件下，可能发生也可能不发生的结果称为随机事件，简称为事件，用字母 $A,B,\cdots\cdots$ 等表示。根据研究目的和要求，确定随机试验中一组事件，它满足：每次试验该事件组中有且仅有一个发生。称该事件组中的每一事件为基本事件或样本点．基本事件全体称为基本事件空间或样本空间，记为 Ω. 即 $\Omega=\{\omega:\omega$ 为基本事件$\}$。随机试验的事件总是由若干个基本事件构成，事件 A 发生等价于构成 A 的基本事件中有一个发生。由于试验的目的不同，样本空间的选取也不尽相同。恰当选取合适的样本空间，常常有助于问题的解决。

如果把 Ω 看为基本集，那么基本事件 ω 就是 Ω 中的元素（记为 $\omega\in\Omega$），事件 A 就为 Ω 的子集，即 $A\subset\Omega$，不可能事件是空集，也看为 Ω 的一个子集，并记为 ϕ. 这样就将事件与集合等同起来，它们之间的关系和运算也是一致的，这对现代概率

论的研究是极为方便、必要的。

二、事件的关系与运算

包含：$A \subset B$

称事件 B 包含事件 A（记为 $A \subset B$），如果事件 A 发生必然导致于事件 B 发生，即 A 为 B 的子集：$\forall$ [1] $\omega \in A$ 必有 $\omega \in B$.

相等：$A = B$

称事件 A 与 B 相等（记为 $A = B$），如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$. 即 A 与 B 是由相同的元素构成：$\omega \in A \Leftrightarrow \omega \in B$.

A 与 B 互不相容：

称事件 A 与 B 是互不相容的（记为 $AB = \phi$），如果 A 与 B 不能同时发生，即 $\{\omega: \omega \in A$ 且 $\omega \in B\} = \phi$.

交（积）：$A \cap B$（也记为 AB），$\bigcap\limits_{n \geq 1} A_n$，$\bigcap\limits_{t \in T} A_t$

称"事件 A 与 B 同时发生"的事件为事件 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$ 或 AB，即 $AB = \{\omega: \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$.

称"事件族 $A_t (t \in T)$ 同时发生"的事件为事件族 $\{A_t, t \in T\}$ 的交，记为 $\bigcap\limits_{t \in T} A_t$，即 $\bigcap\limits_{t \in T} A_t = \{\omega: \omega \in A_t, \forall\, t \in T\}$.

并（和）：$A \cup B$，$\bigcup\limits_{t \in T} A_t$，$\sum\limits_{t \in T} A_t$

称"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件为事件 A 与 B 的并（和），记为 $A \cup B$，即 $A \cup B = \{\omega: \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$.

称"事件族 $A_t (t \in T)$ 至少有一个发生"的事件为事件族 $\{A_t, t \in T\}$ 的并，记为 $\bigcup\limits_{t \in T} A_t$，即 $\bigcup\limits_{t \in T} A_t = \{\omega$：存在 $t \in T$ 使 $\omega \in A_t\}$.

---

① 符号$\forall$ 表示全称量词，即"任意"、"全体"、"所有"。

如果对$\forall\ i\neq j(i,j\in T)$有$A_iA_j=\phi$，则称其并$\bigcup\limits_{t\in T}A_t$为直和，并记为$\sum\limits_{t\in T}A_t$.

差与逆(余)：$A-B, B^C$

称"事件A发生而B不发生"的事件为事件A与B的差，记为$A-B$，即$A-B=\{\omega:\omega\in A$但$\omega\overline{\in}B\}$. 若$A=\Omega$，则称$B^C\triangleq\Omega-B$为事件B的逆(或余)，即B^C表示"事件B不发生"的事件：$B^C=\{\omega:\omega\overline{\in}B\}$. 若$B\subset A$，则称差$A-B$为"真差"。显然，$A-B=A\bigcap B^C$.

对称差：$A\triangle B$

称"事件A发生但B不发生或B发生但A不发生"的事件为事件A与B的对称差，记为$A\triangle B$，即$A\triangle B=\{\omega:\omega\in A$或$\omega\in B$但$\omega\overline{\in}AB\}$. 显然

$$A\triangle B=(A-B)\bigcup(B-A)=(A\bigcup B)-AB$$

上极限(上限事件，上限点集)：$\overline{\lim\limits_{n}}A_n$(或$\limsup\limits_{n}A_n$)①

称"事件列$\{A_n,n\geqslant1\}$中有无穷多个事件发生"的事件为事件列$\{A_n,n\geqslant1\}$的上限事件，记为$\overline{\lim\limits_{n}}A_n$，即$\overline{\lim\limits_{n}}A_n=\{\omega:\omega$属于无穷多个$A_n,n\geqslant1\}=\{\omega:\omega\in A_n,i,o\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$. ($i.\ o.$意指无限次发生，infinite occur)

下极限(下限事件，下限点集)：$\underline{\lim\limits_{n}}A_n$(或$\liminf\limits_{n}A_n$)

称"事件列$\{A_n,n\geqslant1\}$中至多有有限个A_n不发生"的事件为事件列$\{A_n,n\geqslant1\}$的下限事件，记为$\underline{\lim\limits_{n}}A_n$，即$\underline{\lim\limits_{n}}A_n=\{\omega:\omega$

① $\lim\limits_{n}$意指$\lim\limits_{n\to\infty}$，下同。

至多不属于有限个 $A_n, n\geqslant 1\} = \{\omega: \omega\in A_n, a.\ a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

($a.\ a.$ 意指几乎所有,almost all)

显然,$\underline{\lim\limits_n} A_n \subset \overline{\lim\limits_n} A_n$

极限(极限集):$\lim\limits_n A_n$

称事件列$\{A_n, n\geqslant 1\}$有极限 A,如果

$$\underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} A_n = A$$

单调集列:$A_n\uparrow$,$A_n\downarrow$

称集列$\{A_n, n\geqslant 1\}$为不减(记为 $A_n\uparrow$)或不增(记为 $A_n\downarrow$),如果 $A_n\subset A_{n+1}$或 $A_{n+1}\subset A_n$. 不减与不增集列统称为单调集列。易证:

若 $A_n\uparrow$,则$\lim\limits_n A_n = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$;

若 $A_n\downarrow$,则$\lim\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n$.

事件运算与集合运算具有相同的运算法则:

交换律:$A\cup B = B\cup A, AB = BA, A\triangle B = B\triangle A$.

结合律:$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C), (AB)C = A(BC)$,

$(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

分配律:$(A\cup B)C = AC\cup BC, AB\cup C = (A\cup C)(B\cup C)$.

De·Morgan 法则

$$(\bigcup_{t\in T} A_t)^C = \bigcap_{t\in T} A_t^C \quad , \quad (\bigcap_{t\in T} A_t)^C = \bigcup_{t\in T} A_t^C.$$

直和分解法

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

其中 $B_iB_j = \phi(i\neq j), B_n = A_n - \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} A_k = A_n\bigcap\limits_{k=0}^{n-1} A_k^C (n\geqslant 1), A_0 = \phi$.

三、集合类

(一) 几个重要集类及其关系

对随机试验 E 而言，我们不仅关心单个事件，而且需要考虑与 E 有关的事件的全体(记为 $\mathscr{F}$)，显然 $\mathscr{F}$ 不是 Ω 的子集，它是以集合为元素所组成的集合类。称以集合为元素的集合为集类或集合类，用草体字母 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{F}$ ……等表示。显然，对试验 E 而言，相应的 $\mathscr{F}$ 不能太大，否则不易于对事件发生可能性大小的讨论，但也不能太小，太小了事件不够用。为此需要讨论一些重要的集类。

定义 1.1 设 $\mathscr{A}$ 是非空集类。如果 $\mathscr{A}$ 对差及有限并运算封闭[①]，则称 $\mathscr{A}$ 为环；如果 $\mathscr{A}$ 对差及可列并运算封闭，则称 $\mathscr{A}$ 为 σ 环；如果 $\mathscr{A}$ 对余及有限并运算封闭，则称 $\mathscr{A}$ 为代数(或域)；如果 $\mathscr{A}$ 对余及可列并运算封闭，则称 $\mathscr{A}$ 为 σ 代数(或 σ 域)。

定义 1.2 如果 $\mathscr{F}$ 是由样本空间 Ω 的一些子集构成的 σ 代数，则称 $\mathscr{F}$ 为事件体，$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件。

由定义可知，Ω 的任一子集不一定是事件；基本事件不一定是事件。

例 1.1 设 $T=\{\phi,\Omega\}$，$\mathscr{S}=\{A:A\subset\Omega\}$，则 T，$\mathscr{S}$ 都是 σ 代数，又 $\mathscr{A}$ 是 Ω 上的任一 σ 代数，则有 $T\subset\mathscr{A}\subset\mathscr{S}$．故称 T 是空间 Ω 上最小的 σ 代数，$\mathscr{S}$ 是空间 Ω 上最大的 σ 代数。

例 1.2 (有限样本空间)如果随机试验 E 的基本事件是有限个的，即 $\Omega=\{\omega_i:1\leqslant i\leqslant n\}$ 为有限样本空间，则事件体 $\mathscr{F}=\{A:A\subset\Omega\}=\{\Omega$ 的一切子集$\}$，$\mathscr{F}$ 中的元素共有 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$ 个。

---

① 所谓 $\mathscr{A}$ 对运算 * 封闭，意指 $\mathscr{A}$ 中的元素经过 * 运算后所得的结果仍在 $\mathscr{A}$ 中。

命题 1.1 (1) 设 $\mathscr{A}$ 是代数，则 $\Omega\in\mathscr{A}$，$\phi\in\mathscr{A}$，且 $\mathscr{A}$ 对差，对称差，有限交运算封闭。

(2) 设 $\mathscr{A}$ 是 σ 代数，则 $\mathscr{A}$ 是代数且对可列交运算封闭。

证 (1) 设 $A\in\mathscr{A}$，则 $A^C\in\mathscr{A}$，$\Omega=A\cup A^C\in\mathscr{A}$，故 $\phi=\Omega^C\in\mathscr{A}$. 又若 $\{A_i,i=1,2,\cdots,n\}\subset\mathscr{A}$，则 $A_i^C\in\mathscr{A}$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i^C\in\mathscr{A}$，$(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i^C)^C=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{A}$. $A_1-A_2=A_1A_2^C\in\mathscr{A}$，$A_1\triangle A_2=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_1)\in\mathscr{A}$.

(2) 设 $A_i\in\mathscr{A}$ $(i\geqslant1)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\cup A_1\cup A_1\cup\cdots\in\mathscr{A}$，故 $\mathscr{A}$ 是代数。又 $A_i^C\in\mathscr{A}$，$\bigcup\limits_{i\geqslant1}A_i^C\in\mathscr{A}$，所以 $(\bigcup\limits_{i\geqslant1}A_i^C)^C=\bigcap\limits_{i\geqslant1}A_i\in\mathscr{A}$.

命题 1.2 设 $\mathscr{A}$ 是代数，则下述 5 种可数集运算的封闭性是相互等价的：

(1) 可数和运算封闭；

(2) 可数交运算封闭；

(3) 可数直和运算封闭；

(4) 不减极限运算封闭；

(5) 不增极限运算封闭。

证 由直和分解式及命题 1.1 知，(1)⇔(3). 由 $\bigcap\limits_{n\geqslant1}A_n=(\bigcup\limits_{n\geqslant1}A_n^C)^C$ 及 $\bigcup\limits_{n\geqslant1}A_n=(\bigcap\limits_{n\geqslant1}A_n^C)^C$ 知，(1)⇔(2). 设 $A_n\uparrow$，则 $\lim\limits_{n}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，故(1)⇒(4). 又若 $A_n\in\mathscr{A}$ $(n\geqslant1)$，令 $C_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，则 $C_n\uparrow$ 且 $\lim\limits_{n}C_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，故(4)⇒(1)，所以(1)⇔(4). 同理可证(2)⇔(5).

定义 1.3 设 $\mathscr{A}$ 是非空集类，称 $\mathscr{A}$ 为 π 类，如果 $\mathscr{A}$ 对有限交运算封闭；称 $\mathscr{A}$ 是 λ 类，如果 $\Omega\in\mathscr{A}$ 且 $\mathscr{A}$ 对真差及不减极限运算封闭；称 $\mathscr{A}$ 是单调类，如果 $\mathscr{A}$ 对单调极限运算封闭。

根据定义及命题 1.1、命题 1.2，不难证明上述重要集类之间有如下关系：

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{代数} \arrow[dr] & & \\
\sigma\text{代数} \Longrightarrow & \sigma\text{环} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{环} \arrow[r] & \pi\text{类} \\
 & \lambda\text{类} \arrow[r] & \text{单调类} &
\end{tikzcd}
$$

σ 环 $\Leftrightarrow$ 单调环（环且为单调类）

$$
\sigma\text{代数}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{含 }\Omega\text{ 的 }\sigma\text{ 环}\\ \text{既是 }\lambda\text{ 类又是 }\pi\text{ 类}\\ \text{单调代数（代数且为单调类）}\end{cases}
$$

（二）由非空集类产生的重要集类

定义 1.4 设 $\mathscr{C}$ 是非空集类，如果存在 σ 代数 $\mathscr{A}$ 满足

(i) $\mathscr{A}\supset\mathscr{C}$；

(ii) 如果 $\mathscr{A}'$ 是任一包含 $\mathscr{C}$ 的 σ 代数，则 $\mathscr{A}'\supset\mathscr{A}$. 那么就称 $\mathscr{A}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ 代数或由 $\mathscr{C}$ 产生的 σ 代数，记为 $\sigma(\mathscr{C})$.

类似地可以定义由 $\mathscr{C}$ 产生的代数 $\mathscr{A}(\mathscr{C})$，λ 类 $\lambda(\mathscr{C})$，单调类 $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ 等等。

下面两个引理指出上述定义是合理的，且含 $\mathscr{C}$ 的最小类是唯一的。

引理 1.1 设 T 是非空参数集，“$*$”表示某一种集运算。如果集类 $\mathscr{A}_t$ $(\forall\, t\in T)$ 对“$*$”运算封闭，则其交 $\bigcap_{t\in T}\mathscr{A}_t$ 对“$*$”运算也封闭。