普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学
——微积分

主编　谢寿才　唐孝

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

大 学 数 学

——微 积 分

主　编　谢寿才　唐　孝

副主编　罗世敏　陈　渊

伍　杰　邓丽洪

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是编者根据多年的教学经验，结合高等学校经济管理类本科专业微积分课程的教学大纲及近几年的考研大纲编写而成的.

本书内容共分 8 章，分别为：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微分学与积分学，无穷级数，微分方程与差分方程.

本书结构严谨、逻辑清晰、概念准确. 其主要特点在于：注重各个知识点的衔接，内容上具有足够的理论深度，表达上尽可能深入浅出；重视例题、习题的设计和选配；内容编排上尽可能合理，尽量减少不必要的叙述；注重经济应用.

本书可作为高等院校经济管理类专业教材，也可作为考研学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学——微积分/谢寿才，唐孝主编 —北京：科学出版社，2011
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-031638-7
Ⅰ ①大… Ⅱ ①谢… ②唐… Ⅲ ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ ①O13 ②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 115043 号

责任编辑 张中兴／责任校对 鲁 素
责任印制 张克忠／封面设计. 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码 100717
http //www sciencep com

骏 杰 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 6 月第 一 版 开本 720×1000 1/16
2011 年 6 月第一次印刷 印张 17 1/4
印数 1—4 000 字数 340 000

定价：33 00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是编者根据高等学校经济管理类本科专业微积分课程的教学大纲, 并结合近几年“全国硕士研究生入学统一考试大纲”的要求编写而成的.

本书结构严谨、逻辑清晰、概念准确、注重应用. 其主要特点如下:

(1) 注重各个知识点的衔接, 内容上具有足够的理论深度, 表达上尽可能深入浅出.

(2) 重视例题、习题的设计和选配. 尽可能选择具有代表性的例题, 习题尽可能做到少而精

(3) 内容的编排上尽可能合理, 尽量减少不必要的叙述.

(4) 注重经济应用. 将常见的经济应用模型融入教材的各个章节中, 第 1 章介绍常见的经济函数和连续复利, 第 2 章介绍边际及弹性分析, 第 3 章介绍经济问题的最大、最小化, 第 5 章介绍定积分在经济学中的应用, 第 6 章中介绍交叉弹性, 第 7、第 8 章也介绍一些经济应用模型.

本书共 8 章, 初稿分别由罗世敏 (第 1、第 2 章)、唐孝 (第 3~5 章)、伍杰 (第 6 章)、陈渊 (第 7、第 8 章) 编写, 谢寿才对各章节的初稿作了详细的修改, 最后由谢寿才、唐孝、邓丽洪统一定稿.

本书在编写过程中得到了四川师范大学数学与软件科学学院领导及大学数学教研室各位老师的大力支持, 科学出版社对本书的编辑出版给予了热情的支持和帮助, 特别是科学出版社的张中兴老师为本书的出版付出了大量心血, 在此对他们表示由衷的感谢!

由于编者水平有限, 书中疏漏和不当之处在所难免, 敬请读者批评指正, 以期完善.

编　者

2011 年 6 月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一, 是现实世界中量与量之间的依赖关系在数学中的反映, 是微积分的主要研究对象, 其研究方法是极限法. 本章介绍函数、极限与连续的基本知识及基本方法.

1.1　函　　数

1.1.1　集合、区间、邻域

具有某种特定性质的对象的全体称为*集合*, 组成这个集合的每一个对象称为该集合的*元素*. 集合的表示及其运算在中学已学过了, 这里就不再一一介绍.

常用的数集有: 自然数集 $\mathbf{N}$, 整数集 $\mathbf{Z}$, 有理数集 $\mathbf{Q}$, 实数集 $\mathbf{R}$. 下面介绍一类特殊的集合: 区间.

定义 1.1.1　设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 称数集 $\{x|a < x < b\}$ 为*区间*, 记为 (a, b), 即

$$(a, b) = \{x|a < x < b\}.$$

称 a, b 为区间 (a, b) 的*端点*, $b - a$ 为区间 (a, b) 的*长度*.

区间可分为有限区间和无限区间. 有限区间可分为开区间、闭区间和半开区间. 将它们举例如下:

开区间　$(a, b) = \{x|a < x < b\}$;

闭区间　$[a, b] = \{x|a \leqslant x \leqslant b\}$;

半开区间　$[a, b) = \{x|a \leqslant x < b\}$, $(a, b] = \{x|a < x \leqslant b\}$.

无限区间　$[a, +\infty) = \{x|x \geqslant a\}$, $(-\infty, b) = \{x|x < b\}$, $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$.

定义 1.1.2　设 $a, \delta \in \mathbf{R}$, 且 $\delta > 0$, 称数集 $\{x||x - a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x||x - a| < \delta\}.$$

称点 a 为*邻域中心*, δ 为*邻域半径*.

由于 $|x - a| < \delta$ 相当于 $a - \delta < x < a + \delta$, 所以

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta),$$

即邻域在数轴上是一个以点 a 为中心, 长度为 2δ 的*开区间*(图 1.1).

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

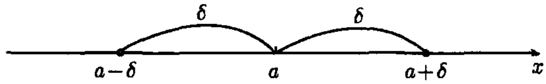

图 1.1

将邻域 $U(a,\delta)$ 的邻域中心 a 去掉, 得到的数集称为点 a 的 δ 去心邻域, 记为 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x\,|0<|x-a|<\delta\}\,.$$

为了方便, 把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的*左 δ 邻域*, 开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的*右 δ 邻域*.

1.1.2　函数的概念

1. **函数的概念**

函数是描绘多个变量间相互依赖关系的一种数学模型. 我们先研究两个变量的情形 (多于两个变量的将在第 6 章中学习). 例如, 自由落体运动中, 物体的位移 s 与时间 t 之间的关系为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$(其中 g 为重力加速度), 这就是一种函数关系.

定义 1.1.3　设 D 是一非空数集, 如果对任意 $x\in D$, 按某一对应法则 f , 总有唯一确定的 y 值与之对应, 则称 y 是 x 的**函数**, 记为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**, y 称为**因变量**或**函数**, D 称为**定义域**, 记为 $D=D(f)$. 当 $x_0\in D$ 时, 称 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**. 所有的函数值所构成的集合称为函数的**值域**, 记作 R_f, 即

$$R_f=\{y\,|y=f(x),x\in D\}\,.$$

平面上的点集 $\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形. 函数的定义域是使表达式有意义的一切实数的集合. 在实际问题中, 应根据问题的实际意义来确定. 例如, $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 中, 设开始下落时刻为 $t=0$, 落地时刻为 $t=T$, 则它的定义域为 $D=[0,T]$.

例 1.1.1　求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$ 的定义域.

解　要使函数有意义, 则 $\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$ 即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z},\end{cases}\Rightarrow -4\leqslant x<-\pi \text{ 或 } 0<x<\pi.$$

所以函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$ 的定义域为 $[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

2. **函数的表示**

函数通常用以下三种方法来表示:

(1) **解析法 (公式法)** 用数学解析式表示自变量 x 与因变量 y 之间关系的方法.

(2) **表格法** 函数与自变量的关系可用一表格表示.

(3) **图像法** 函数与自变量的关系由平面直角坐标系中的曲线给出.

3. 分段函数

在实际应用中通常遇到这样的函数: 在定义域的不同范围内, 函数分别用不同的解析表达式来表示, 这类函数称为**分段函数**. 例如, $y=\begin{cases} x-1, & x\geqslant 0, \\ x+1, & x<0. \end{cases}$ 下面介绍几个常用的分段函数.

(1) **符号函数**

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0, \end{cases}$$

它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\{1,0,-1\}$, 图形见图 1.2.

(2) **取整函数**

$$y=[x],$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[-3.12]=-4, [3.9]=3$. 它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\mathbf{Z}$(图 1.3).

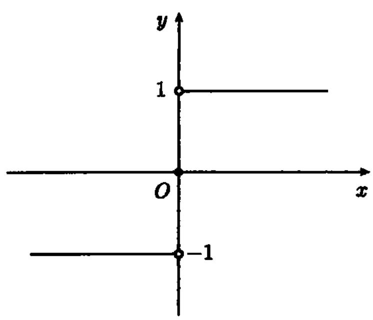

图 1.2

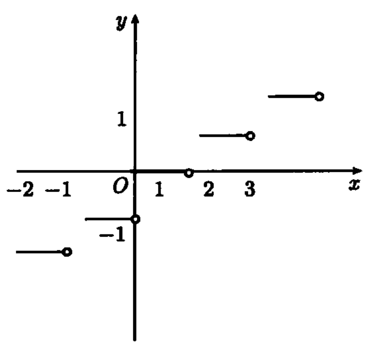

图 1.3

(3) **狄利克雷(Dirichlet)函数**

$$y=D(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbf{Q}, \\ 0, & x\notin\mathbf{Q}, \end{cases}$$

它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\{0,1\}$.

1.1.3　函数的特性

1. **有界性**

定义 1.1.4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $X\subset D$. 如果存在正实数 M, 使得对任意 $x\in X$, 有 $|f(x)|\leqslant M$, 则称函数 $y=f(x)$ 为 X 上的**有界函数**, 否则称为**无界函数**.

注 1.1.1　有界性与区间有关. 例如, 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界, 但在区间 $(0,1)$ 内无界. 事实上, 对于任意 $x\in(1,2)$, 都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$, 所以函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界. 对于任何正实数 M(不妨设 $M>1$), 取 $x_0=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$, 有

$$|f(x_0)|=\left|\frac{1}{x_0}\right|=2M>M,$$

所以, 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

2. **单调性**

定义 1.1.5　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对任意的 $x_1,x_2\in I$, 且 $x_1<x_2$, 如果 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_2)\leqslant f(x_1)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上为**单调增加**(或**单调减少**)**函数**.

对任意的 $x_1,x_2\in I$, 且 $x_1<x_2$, 如果 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_2)<f(x_1)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上为**严格单调增加**(或**严格单调减少**)**函数**.

单调增加函数、单调减少函数统称为**单调函数**(也称函数具有单调性).

在几何上, 单调增加 (减少) 函数的图形是沿 x 轴的正向渐升的 (或渐降的)(图 1.4、图 1.5).

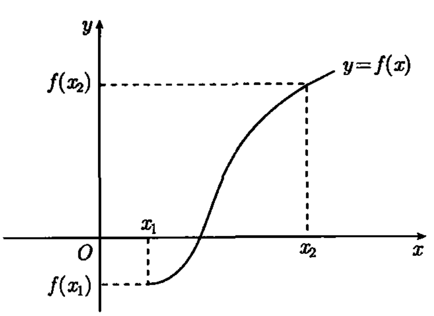

图 1.4

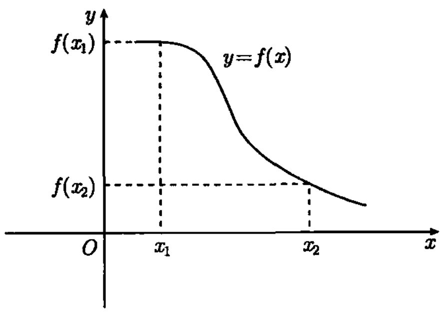

图 1.5

3. **奇偶性**

定义 1.1.6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (若 $x\in D$, 则 $-x\in D$),

如果对于 $\forall x \in D$, 有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$), 则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**(或**奇函数**).

如 $y=\sin x,\ x\in(-\infty,+\infty)$ 为奇函数, $y=\cos x,\ x\in(-\infty,+\infty)$ 为偶函数, $y=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1},\ x\in(-\infty,+\infty)$ 为奇函数.

奇函数的图形关于原点对称 (图 1.6); 偶函数的图形关于 y 轴对称 (图 1.7).

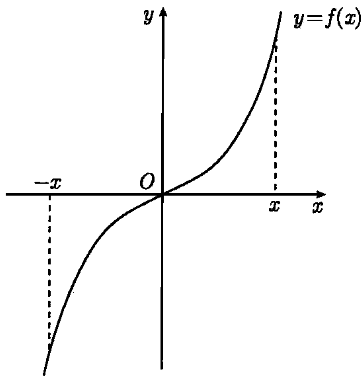

图 1.6

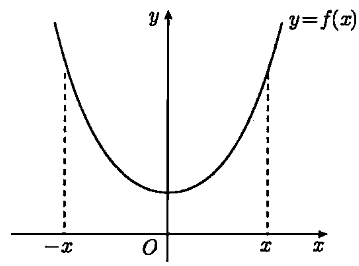

图 1.7

例 1.1.2　判断函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的奇偶性.

解　函数的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$. 因为

$$f(-x)+f(x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln 1=0,$$

所以

$$f(-x)=-f(x),$$

故函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 为奇函数.

4. 周期性

定义 1.1.7　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 若存在一个正数 T, 使得对于任一 $x\in D$, 有 $x+T\in D$, 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立, 则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**, T 称为函数的周期. 通常所说的周期是指**最小正周期**. 如三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi),\omega\neq 0$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

周期函数的图形特点是: 周期为 T 的周期函数, 在每个长度为 T 的区间上, 函数图形有相同的形状. 并非每个周期函数都有最小正周期. 例如,

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

任何正有理数都是它的周期, 但是它没有最小正周期.

1.2 初等函数

1.2.1 反函数

在函数关系中, 哪个量作为自变量, 哪个量作为因变量 (函数), 是由具体情况而定的. 例如, 某种商品的需求量 Q 与价格 P 的函数关系为 $Q=200-5P$. 若以 Q 为自变量, 则 $P=40-\dfrac{Q}{5}$, 这里 P 为函数. 这两个函数的对应法则不同, 所以是不同的函数, 称它们*互为反函数*.

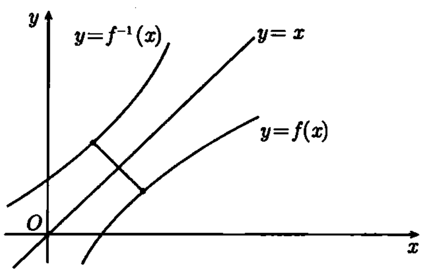

图 1.8

定义 1.2.1 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 R_f. 如果对任意 $y\in R_f$, 有唯一确定的 $x\in D$ 与它对应, 且满足 $f(x)=y$, 这样 x 也是 y 的函数, 称其为函数 $y=f(x)$ 的*反函数*, 记为 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上, 将其记为 $y=f^{-1}(x)$. 称 $y=f(x)$ 为*直接函数*.

直接函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称 (图 1.8).

1.2.2 基本初等函数

1. *常数函数*

$y=C, x\in(-\infty,+\infty)$.

2. *幂函数*

$y=x^\mu$(μ 为常数), $\mu=-1,\dfrac{1}{2},1,2$ 的图形如图 1.9 所示.

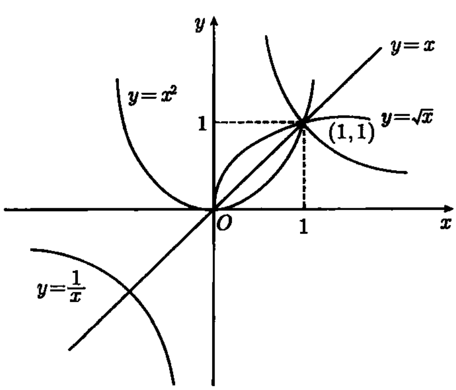

图 1.9

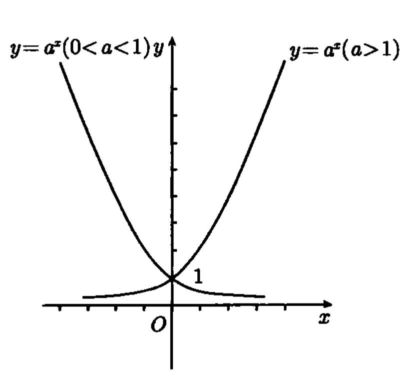

图 1.10

3. 指数函数

$y=a^x(a>0,a\neq 1)$, 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $(0,+\infty)$, 都过 $(0,1)$ 点. 当 $a>1$ 时单调增加, 当 $0<a<1$ 时单调减少 (图 1.10). 其中最常用的是以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$.

4. 对数函数

$y=\log_a x \quad (a>0,a\neq 1)$, 定义域为 $(0,+\infty)$, 值域为 $(-\infty,+\infty)$. 它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数, 它们的单调性相同, 图像关于直线 $y=x$ 对称. 其中最常用的是以 e 为底的对数函数 $y=\ln x$, 称其为**自然对数函数**. 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的图形见图 1.11.

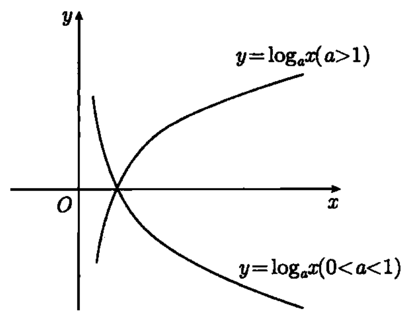

图 1.11

5. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 值域为 $[-1,1]$, 周期为 2π 的奇函数.

余弦函数 $y=\cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 值域为 $[-1,1]$, 周期为 2π 的偶函数.

正切函数 $y=\tan x$, $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$, 值域为 $(-\infty,+\infty)$, 周期为 π 的奇函数.

余切函数 $y=\cot x$, $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$, 值域为 $(-\infty,+\infty)$, 周期为 π 的奇函数.

正割函数 $y=\sec x$, $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

余割函数 $y=\csc x$, $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

6. 反三角函数

(1) 函数 $y=\sin x,x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的反函数称为**反正弦函数**, 记为 $y=\arcsin x$, 定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$(图 1.12);

(2) 函数 $y=\cos x,x\in[0,\pi]$ 的反函数称为**反余弦函数**, 记为 $y=\arccos x$, 定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[0,\pi]$(图 1.13);

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com