



普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学

——微积分

主编 谢寿才 唐孝



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学

——微积分

主 编 谢寿才 唐 孝

副主编 罗世敏 陈 渊

伍 杰 邓丽洪

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是编者根据多年的教学经验,结合高等学校经济管理类本科专业微积分课程的教学大纲及近几年的考研大纲编写而成的.

本书内容共分8章,分别为:函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,多元函数微分学与积分学,无穷级数,微分方程与差分方程.

本书结构严谨、逻辑清晰、概念准确.其主要特点在于:注重各个知识点的衔接,内容上具有足够的理论深度,表达上尽可能深入浅出;重视例题、习题的设计和选配;内容编排上尽可能合理,尽量减少不必要的叙述;注重经济应用.

本书可作为高等院校经济管理类专业教材,也可作为考研学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学——微积分/谢寿才,唐孝主编 —北京:科学出版社,2011
普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-031638-7

I ①大… II ①谢… ②唐… III ①微积分—高等学校—教材 IV ①O13
②O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第115043号

责任编辑 张中兴/责任校对 鲁素
责任印制 张克忠/封面设计 陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年6月第 一 版 开本 720×1000 1/16

2011年6月第一次印刷 印张 17 1/4

印数 1—4 000 字数 340 000

定价: 33.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书是编者根据高等学校经济管理类本科专业微积分课程的教学大纲,并结合近几年“全国硕士研究生入学统一考试大纲”的要求编写而成的.

本书结构严谨、逻辑清晰、概念准确、注重应用. 其主要特点如下:

(1) 注重各个知识点的衔接,内容上具有足够的理论深度,表达上尽可能深入浅出.

(2) 重视例题、习题的设计和选配. 尽可能选择具有代表性的例题,习题尽可能做到少而精.

(3) 内容的编排上尽可能合理,尽量减少不必要的叙述.

(4) 注重经济应用. 将常见的经济应用模型融入教材的各个章节中,第 1 章介绍常见的经济函数和连续复利,第 2 章介绍边际及弹性分析,第 3 章介绍经济问题的最大、最小化,第 5 章介绍定积分在经济学中的应用,第 6 章中介绍交叉弹性,第 7、第 8 章也介绍一些经济应用模型.

本书共 8 章,初稿分别由罗世敏(第 1、第 2 章)、唐孝(第 3~5 章)、伍杰(第 6 章)、陈渊(第 7、第 8 章)编写,谢寿才对各章节的初稿作了详细的修改,最后由谢寿才、唐孝、邓丽洪统一定稿.

本书在编写过程中得到了四川师范大学数学与软件科学学院领导及大学数学教研室各位老师的大力支持,科学出版社对本书的编辑出版给予了热情的支持和帮助,特别是科学出版社的张中兴老师为本书的出版付出了大量心血,在此对他们表示由衷的感谢!

由于编者水平有限,书中疏漏和不当之处在所难免,敬请读者批评指正,以期完善.

编 者
2011 年 6 月

目 录

前言

第 1 章 函数、极限与连续	1
1.1 函数	1
1.1.1 集合、区间、邻域	1
1.1.2 函数的概念	2
1.1.3 函数的特性	4
1.2 初等函数	6
1.2.1 反函数	6
1.2.2 基本初等函数	6
1.2.3 复合函数	8
1.2.4 初等函数	9
1.3 常用的经济函数	9
1.3.1 需求与供给函数	9
1.3.2 成本、收益、利润函数	10
1.4 数列的极限	11
1.4.1 数列极限的概念	11
1.4.2 数列极限的性质	14
1.5 函数的极限	15
1.5.1 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	15
1.5.2 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	16
1.5.3 函数极限的性质	19
1.6 无穷大与无穷小	19
1.6.1 无穷小量	19
1.6.2 无穷大量	20
1.6.3 无穷大量与无穷小量的关系	21
1.7 极限的运算法则	21
1.8 极限存在准则和两个重要极限	24
1.8.1 极限存在准则	25
1.8.2 两个重要极限	26
1.8.3 连续复利	29

1.9 无穷小的比较	29
1.10 函数的连续性与间断点	31
1.10.1 函数的连续性	31
1.10.2 函数的间断点	33
1.11 连续函数的运算与性质	35
1.11.1 连续函数的四则运算	35
1.11.2 反函数与复合函数的连续性	35
1.11.3 初等函数的连续性	36
1.11.4 闭区间上连续函数的性质	37
习题 1(A)	39
习题 1(B)	40
第 2 章 导数与微分	41
2.1 导数的概念	41
2.1.1 引例	41
2.1.2 导数的定义	42
2.1.3 求导数举例	45
2.1.4 导数的几何意义	46
2.1.5 函数的可导性与连续性的关系	47
2.2 函数的求导法则	47
2.2.1 导数的四则运算法则	48
2.2.2 反函数的导数	50
2.2.3 复合函数的求导法则	51
2.3 高阶导数	53
2.4 隐函数的导数	55
2.4.1 隐函数的导数	55
2.4.2 对数求导法	56
2.4.3 由参数方程所确定的函数的导数	57
2.5 函数的微分	59
2.5.1 微分的定义	59
2.5.2 微分的几何意义	61
2.5.3 基本初等函数的微分公式和微分的运算法则	61
2.5.4 微分在近似计算中的应用	63
2.6 导数在经济分析中的应用	63
2.6.1 边际分析	63
2.6.2 弹性分析	65

习题 2(A)	67
习题 2(B)	68
第 3 章 中值定理与导数的应用	69
3.1 中值定理	69
3.1.1 罗尔定理	69
3.1.2 拉格朗日中值定理	71
3.1.3 柯西中值定理	74
3.2 洛必达法则	75
3.3 函数的单调性与曲线的凹凸性	79
3.3.1 函数的单调性	79
3.3.2 曲线的凹凸性	82
3.4 函数的极值与最值	85
3.4.1 函数的极值	85
3.4.2 函数的最值	88
3.4.3 经济应用问题举例	89
3.5 函数图形的描绘	91
3.5.1 渐近线	91
3.5.2* 函数图形的描绘	92
习题 3(A)	94
习题 3(B)	95
第 4 章 不定积分	97
4.1 不定积分的概念与性质	97
4.1.1 原函数的概念	97
4.1.2 不定积分的概念	98
4.1.3 不定积分的几何意义	98
4.1.4 不定积分的性质	98
4.1.5 基本积分公式表	99
4.2 换元积分法	101
4.2.1 第一换元法	101
4.2.2 第二换元积分法	105
4.3 分部积分法	108
4.4 简单的有理函数的积分	111
习题 4(A)	114
习题 4(B)	115

第 5 章 定积分及其应用	117
5.1 定积分	117
5.1.1 引例	117
5.1.2 定积分的定义	120
5.2 定积分的性质	122
5.3 微积分基本公式	125
5.3.1 引例	126
5.3.2 积分上限函数及其导数	126
5.3.3 微积分基本公式	130
5.4 定积分的积分方法	132
5.4.1 定积分的换元积分法	132
5.4.2 定积分的分部积分法	135
5.5 广义积分	136
5.6 定积分的应用	138
5.6.1 微元法	138
5.6.2 平面图形的面积	139
5.6.3 旋转体的体积	142
5.6.4 平行截面面积为已知的立体的体积	144
5.7 定积分在经济分析中的应用	145
5.7.1 由边际函数求原经济函数	145
5.7.2 由变化率求总量	146
5.7.3 资本现值和投资问题	146
习题 5(A)	147
习题 5(B)	148
第 6 章 多元函数的微分学与积分学	150
6.1 多元函数的定义和一些基本概念	150
6.1.1 区域	150
6.1.2 曲面及其方程	151
6.1.3 多元函数的定义	153
6.1.4 多元函数的极限	154
6.1.5 多元函数的连续性	156
6.2 偏导数	157
6.2.1 偏导数的定义及其计算	157
6.2.2 偏导数的几何意义	160

6.2.3	高阶偏导数	160
6.2.4	偏导数在经济分析中的应用 —— 交叉弹性	162
6.3	全微分	163
6.3.1	全微分的定义	163
6.3.2	全微分的应用	166
6.4	多元复合函数的求导法与隐函数的求导公式	167
6.4.1	多元复合函数的求导法	167
6.4.2	全微分的形式不变性	171
6.4.3	隐函数的求导公式	172
6.5	多元函数的极值及其求法	173
6.5.1	多元函数的极值及最值	173
6.5.2	条件极值	177
6.6	二重积分的概念与性质	179
6.6.1	曲顶柱体的体积	179
6.6.2	二重积分的定义	180
6.6.3	二重积分的性质	181
6.7	二重积分的计算	182
6.7.1	利用直角坐标计算二重积分	183
6.7.2	利用极坐标计算二重积分	189
	习题 6(A)	193
	习题 6(B)	195
第 7 章	无穷级数	196
7.1	常数项级数的概念和性质	196
7.1.1	引例	196
7.1.2	常数项级数的概念	196
7.1.3	收敛级数的基本性质	198
7.2	常数项级数的审敛法	201
7.2.1	正项级数的审敛法	201
7.2.2	交错级数的审敛法	206
7.2.3	绝对收敛与条件收敛	208
7.3	幂级数	209
7.3.1	函数项级数的概念	209
7.3.2	幂级数的收敛性	210
7.3.3	幂级数的运算	214
7.4	函数展开成幂级数	216

7.4.1	泰勒级数的概念	217
7.4.2	将函数展开成幂级数	218
7.4.3*	函数的幂级数展开式的应用	220
习题 7(A)		221
习题 7(B)		222
第 8 章	微分方程与差分方程	224
8.1	微分方程的基本概念	224
8.2	一阶微分方程	226
8.2.1	可分离变量的微分方程	226
8.2.2	齐次方程	229
8.2.3	一阶线性微分方程	230
8.3	可降阶的二阶微分方程	234
8.3.1	$y'' = f(x)$ 型	234
8.3.2	$y'' = f(x, y')$ 型	235
8.3.3*	$y'' = f(y, y')$ 型	236
8.4	二阶线性微分方程解的结构	237
8.5	二阶常系数齐次线性微分方程	239
8.5.1	二阶常系数齐次线性微分方程	239
8.5.2*	n 阶常系数齐次线性微分方程	242
8.6	二阶常系数非齐次线性微分方程	242
8.6.1	$f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型	243
8.6.2	$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型	245
8.7	差分方程简介	246
8.7.1	差分的概念与性质	247
8.7.2	差分方程的概念	247
8.7.3	一阶常系数线性差分方程	249
8.7.4	二阶常系数线性差分方程	251
习题 8(A)		253
习题 8(B)		255
部分习题答案		256

第1章 函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一,是现实世界中量与量之间的依赖关系在数学中的反映,是微积分的主要研究对象,其研究方法是极限法.本章介绍函数、极限与连续的基本知识及基本方法.

1.1 函 数

1.1.1 集合、区间、邻域

具有某种特定性质的对象的全体称为集合,组成这个集合的每一个对象称为该集合的元素.集合的表示及其运算在中学已学过了,这里就不再一一介绍.

常用的数集有:自然数集 \mathbf{N} , 整数集 \mathbf{Z} , 有理数集 \mathbf{Q} , 实数集 \mathbf{R} . 下面介绍一类特殊的集合: 区间.

定义 1.1.1 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 称数集 $\{x|a < x < b\}$ 为区间, 记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x|a < x < b\}.$$

称 a, b 为区间 (a, b) 的端点, $b - a$ 为区间 (a, b) 的长度.

区间可分为有限区间和无限区间. 有限区间可分为开区间、闭区间和半开区间. 将它们举例如下:

开区间 $(a, b) = \{x|a < x < b\}$;

闭区间 $[a, b] = \{x|a \leq x \leq b\}$;

半开区间 $[a, b) = \{x|a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x|a < x \leq b\}$.

无限区间 $[a, +\infty) = \{x|x \geq a\}$, $(-\infty, b) = \{x|x < b\}$, $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$.

定义 1.1.2 设 $a, \delta \in \mathbf{R}$, 且 $\delta > 0$, 称数集 $\{x||x - a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x||x - a| < \delta\}.$$

称点 a 为邻域中心, δ 为邻域半径.

由于 $|x - a| < \delta$ 相当于 $a - \delta < x < a + \delta$, 所以

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta),$$

即邻域在数轴上是一个以点 a 为中心, 长度为 2δ 的开区间(图 1.1).

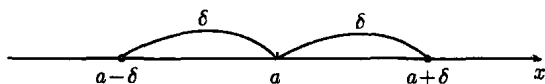


图 1.1

将邻域 $U(a, \delta)$ 的邻域中心 a 去掉, 得到的数集称为点 a 的 δ 去心邻域, 记为 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}.$$

为了方便, 把开区间 $(a - \delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域, 开区间 $(a, a + \delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

1.1.2 函数的概念

1. 函数的概念

函数是描绘多个变量间相互依赖关系的一种数学模型. 我们先研究两个变量的情形 (多于两个变量的将在第 6 章中学习). 例如, 自由落体运动中, 物体的位移 s 与时间 t 之间的关系为 $s = \frac{1}{2}gt^2$ (其中 g 为重力加速度), 这就是一种函数关系.

定义 1.1.3 设 D 是一非空数集, 如果对任意 $x \in D$, 按某一对应法则 f , 总有唯一确定的 y 值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记为 $y = f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量或函数, D 称为定义域, 记为 $D = D(f)$. 当 $x_0 \in D$ 时, 称 $f(x_0)$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值. 所有的函数值所构成的集合称为函数的值域, 记作 R_f , 即

$$R_f = \{y | y = f(x), x \in D\}.$$

平面上的点集 $\{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形. 函数的定义域是使表达式有意义的一切实数的集合. 在实际问题中, 应根据问题的实际意义来确定. 例如, $s = \frac{1}{2}gt^2$ 中, 设开始下落时刻为 $t = 0$, 落地时刻为 $t = T$, 则它的定义域为 $D = [0, T]$.

例 1.1.1 求函数 $y = \sqrt{16 - x^2} + \ln \sin x$ 的定义域.

解 要使函数有意义, 则 $\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0, \\ \sin x > 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} -4 \leq x \leq 4, \\ 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}, \end{cases} \Rightarrow -4 \leq x < -\pi \text{ 或 } 0 < x < \pi.$$

所以函数 $y = \sqrt{16 - x^2} + \ln \sin x$ 的定义域为 $[-4, -\pi) \cup (0, \pi)$.

2. 函数的表示

函数通常用以下三种方法来表示:

- (1) 解析法 (公式法) 用数学解析式表示自变量 x 与因变量 y 之间关系的方法.
 (2) 表格法 函数与自变量的关系可用一表格表示.
 (3) 图像法 函数与自变量的关系由平面直角坐标系中的曲线给出.

3. 分段函数

在实际应用中通常遇到这样的函数: 在定义域的不同范围内, 函数分别用不同的解析表达式来表示, 这类函数称为分段函数. 例如, $y = \begin{cases} x-1, & x \geq 0, \\ x+1, & x < 0. \end{cases}$ 下面介绍几个常用的分段函数.

(1) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn}x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

它的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \{1, 0, -1\}$, 图形见图 1.2.

(2) 取整函数

$$y = [x],$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[-3.12] = -4$, $[3.9] = 3$. 它的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \mathbf{Z}$ (图 1.3).

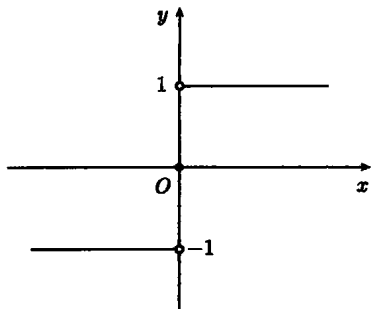


图 1.2

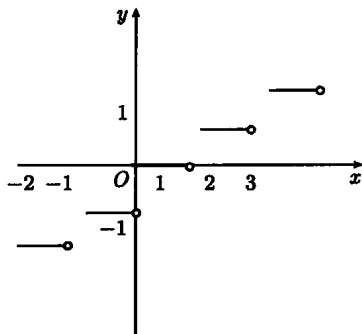


图 1.3

(3) 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

它的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \{0, 1\}$.

1.1.3 函数的特性

1. 有界性

定义 1.1.4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$. 如果存在正实数 M , 使得对任意 $x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 为 X 上的有界函数, 否则称为无界函数.

注 1.1.1 有界性与区间有关. 例如, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内有界, 但在区间 $(0, 1)$ 内无界. 事实上, 对于任意 $x \in (1, 2)$, 都有 $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$, 所以函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内有界. 对于任何正实数 M (不妨设 $M > 1$), 取 $x_0 = \frac{1}{2M} \in (0, 1)$, 有

$$|f(x_0)| = \left|\frac{1}{x_0}\right| = 2M > M,$$

所以, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

2. 单调性

定义 1.1.5 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 如果 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_2) \leq f(x_1)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上为单调增加 (或单调减少) 函数.

对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 如果 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_2) < f(x_1)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上为严格单调增加 (或严格单调减少) 函数.

单调增加函数、单调减少函数统称为单调函数 (也称函数具有单调性).

在几何上, 单调增加 (减少) 函数的图形是沿 x 轴的正向渐升的 (或渐降的) (图 1.4、图 1.5).

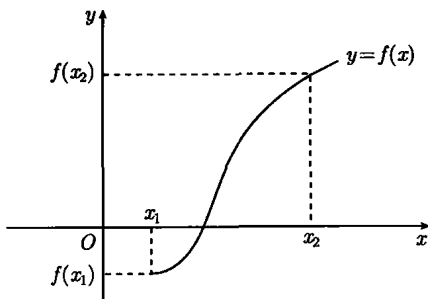


图 1.4

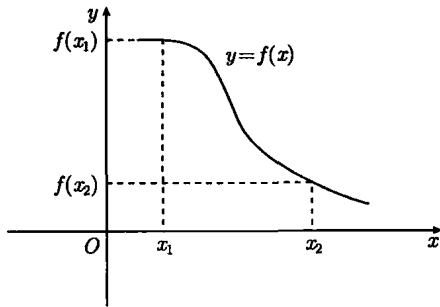


图 1.5

3. 奇偶性

定义 1.1.6 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (若 $x \in D$, 则 $-x \in D$),

如果对于 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$ (或 $f(-x) = -f(x)$), 则称 $y = f(x)$ 为偶函数 (或奇函数).

如 $y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$ 为奇函数, $y = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$ 为偶函数,
 $y = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}, x \in (-\infty, +\infty)$ 为奇函数.

奇函数的图形关于原点对称 (图 1.6); 偶函数的图形关于 y 轴对称 (图 1.7).

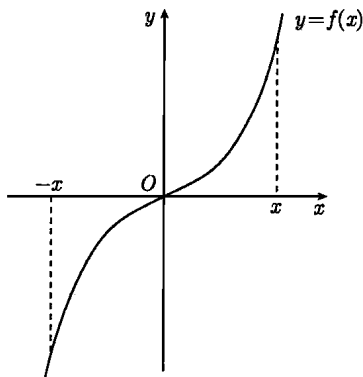


图 1.6

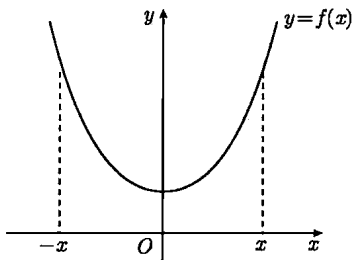


图 1.7

例 1.1.2 判断函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 函数的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$. 因为

$$f(-x) + f(x) = \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \ln 1 = 0,$$

所以

$$f(-x) = -f(x),$$

故函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

4. 周期性

定义 1.1.7 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若存在一个正数 T , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $x+T \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数, T 称为函数的周期. 通常所说的周期是指最小正周期. 如三角函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi), \omega \neq 0$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

周期函数的图形特点是: 周期为 T 的周期函数, 在每个长度为 T 的区间上, 函数图形有相同的形状. 并非每个周期函数都有最小正周期. 例如,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

任何正有理数都是它的周期, 但是它没有最小正周期.

1.2 初等函数

1.2.1 反函数

在函数关系中, 哪个量作为自变量, 哪个量作为因变量 (函数), 是由具体情况而定的. 例如, 某种商品的需求量 Q 与价格 P 的函数关系为 $Q = 200 - 5P$. 若以 Q 为自变量, 则 $P = 40 - \frac{Q}{5}$, 这里 P 为函数. 这两个函数的对应法则不同, 所以是不同的函数, 称它们互为反函数.

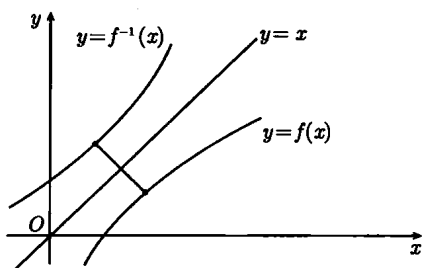


图 1.8

定义 1.2.1 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 R_f . 如果对任意 $y \in R_f$, 有唯一确定的 $x \in D$ 与它对应, 且满足 $f(x) = y$, 这样 x 也是 y 的函数, 称其为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上, 将其记为 $y = f^{-1}(x)$. 称 $y = f(x)$ 为直接函数.

直接函数 $y = f(x)$ 的图形与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称 (图 1.8).

1.2.2 基本初等函数

1. 常数函数

$$y = C, x \in (-\infty, +\infty).$$

2. 幂函数

$y = x^\mu$ (μ 为常数), $\mu = -1, \frac{1}{2}, 1, 2$ 的图形如图 1.9 所示.

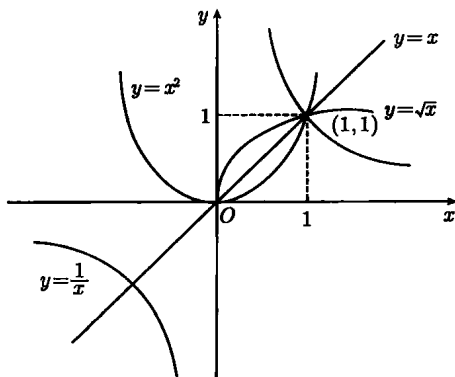


图 1.9

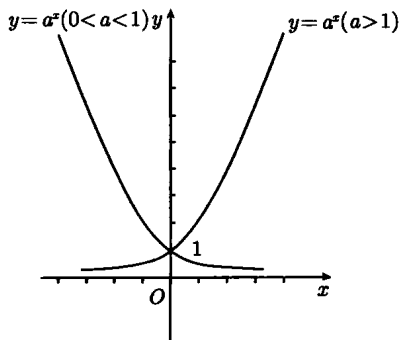


图 1.10

3. 指数函数

$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$, 都过 $(0, 1)$ 点. 当 $a > 1$ 时单调增加, 当 $0 < a < 1$ 时单调减少 (图 1.10). 其中最常用的是以 e 为底的指数函数 $y = e^x$.

4. 对数函数

$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, 定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 它是指数函数 $y = a^x$ 的反函数, 它们的单调性相同, 图像关于直线 $y = x$ 对称. 其中最常用的是以 e 为底的对数函数 $y = \ln x$, 称其为自然对数函数. 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 的图形见图 1.11.

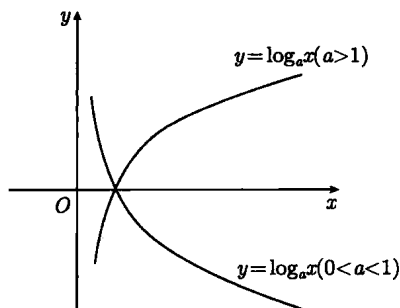


图 1.11

5. 三角函数

正弦函数 $y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 周期为 2π 的奇函数.

余弦函数 $y = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 周期为 2π 的偶函数.

正切函数 $y = \tan x, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 周期为 π 的奇函数.

余切函数 $y = \cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 周期为 π 的奇函数.

正割函数 $y = \sec x, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

余割函数 $y = \csc x, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

6. 反三角函数

(1) 函数 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数称为反正弦函数, 记为 $y = \arcsin x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (图 1.12);

(2) 函数 $y = \cos x, x \in [0, \pi]$ 的反函数称为反余弦函数, 记为 $y = \arccos x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$ (图 1.13);