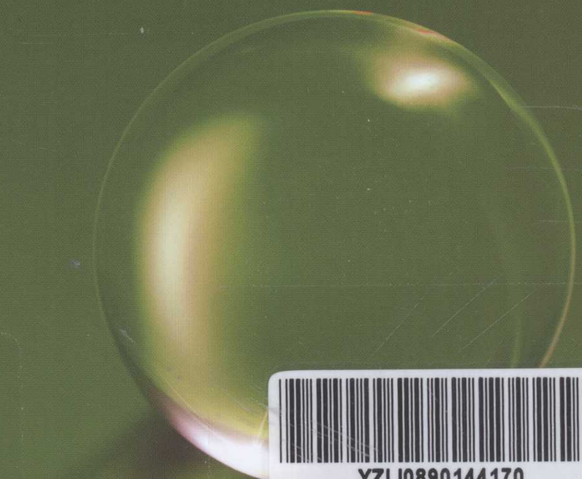
◎ 金牌教练推荐

◎ 经典竞赛教材

高中物理竞赛

考前辅导



张大同◎编著

华东师范大学出版社

金牌教练推荐　经典竞赛教材

高中物理竞赛考前辅导

张大同◎编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中物理竞赛考前辅导/张大同编著. —上海:华东师范大学出版社,2010
ISBN 978-7-5617-8339-9

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.物理课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 255619 号

高中物理竞赛考前辅导

编　著　张大同
组稿编辑　储成连
审读编辑　张红英
装帧设计　高　山

出版发行　华东师范大学出版社
社　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　址　www.ecnupress.com.cn
电　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　上海崇明裕安印刷厂
开　本　720×965　16 开
印　张　25
字　数　532 千字
版　次　2011 年 6 月第一版
印　次　2011 年 10 月第二次
书　号　ISBN 978-7-5617-8339-9/G·4891
定　价　36.00 元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

物理竞赛成功的要诀

张大同

屈指算来，我从1984年开始辅导物理竞赛已经有28年了，我们学校学生得国际大奖的纪录到目前为止在全国还是遥遥领先的。常有全国各地的老师或同学问我：你是怎样辅导的？你给学生教了哪些知识？练了哪些习题？做了哪些实验？我想借此套丛书出版的机会，给全国关心、参与物理竞赛的同行和同学们一个回答。

诚然，要想在物理竞赛中取得好的成绩，是要学很多知识，做很多习题和实验，但是很多更加重要的因素，却常容易被忽略。

一、热爱科学，痴迷物理

物理学是一门十分美丽的科学，这是我们热爱物理学并能为之献出毕生精力的根本原因。我建议同学们经常看看一些伟大的物理学家的故事，体会他们的卓越贡献怎样从根本上改变了人类的生活面貌（这样的例子不胜枚举：牛顿、法拉第、爱因斯坦及他们的贡献都是典型的例证）。

一个人一旦真正体会到了物理学的无穷魅力，将使他得到一种永不枯竭的学习物理的动力，特别是当他碰到困难的时候。正像第22届国际物理奥赛金牌得主王泰然说的那样："什么是连续不断的驱动力？科学本身！成功会给人带来额外的动力；而人处在低潮时，就会感到乏味。应该承认，很大程度上，是成功把我领入了科学的大门，并伴随我走出了第一步，但我又怎能苛求它伴我走过一生的道路呢？"他赴美留学以后，由于良好的基础和出色的学习能力，很多其他学科的教授都热情地表示愿意给他全额的奖学金。其中不乏目前在美国比物理学热门得多的、能赚钱得多的经济学、计算机、电子工程之类的专业。但他对物理学仍然是那样一往情深，毫不犹豫地将物理学作为自己的主修专业。他说："尽管美国人喜欢读物理的不多，也常有亲朋好友劝我转学其他专业，但物理学已成了我生命的一部分。物理学是我们生活开始的地方，我们永远不会离开她。"我想，一个学生如果能对物理学爱得那么深，那么他的成功就有了坚实的基础。

我要求学生将学习物理作为一种需要，而不是为日后谋求理想职业做出的一种付出。什么是需要？需要是人生活的和社会的要求在人脑中的反映。人的需要可分为物质上的需要和精神上的需要两大类。物质上的需要包括食物、水、空气、温暖、运动和休息等等，如果物质上的需要得不到基本的满足，人类将无法生存。精神上的需要包括劳动、交往、文化知识、艺术、事业成功等等，同样是一个心理健康的人所不能缺少的。试想，如果能使一个学生像需要食物、水、空气一样地需要学习物理，那将是一个多么大的动力！我所教的优秀学生一般都能将学习物理变成自己人生的需要。如果有一段时间我没有给他们安排比较多的学习任务，他们会觉得很难过。在他们身上，常可看到一种可贵的两重性：一方面是为了向夺取金牌的目标冲击，废寝忘食地拼搏；另一方面是一旦在物理竞赛中未能如愿，他们也显得十分坦然。因为他们知道自己这几年的拼搏决不会白废，他们已为自己日后的发展奠定了一个很好的基础。

去年底，我们国家高中毕业生保送进入大学的制度有了很大的变化——获得省、直辖市物理竞赛一等奖的同学不再具有保送资格。参加物理竞赛的目的是什么？这个问题又一次严肃地放在每一个参赛同学的面前。大浪淘沙，那些功利思想比较严重的学生和他们的家长不会再花大力气去搞物理竞赛，剩下的肯定是真正热爱物理的学生。从长远的观点来看，这个变化对物理竞赛是一个真正的利好，有利于物理竞赛健康地发展。

当然，如果我们的物理竞赛能够办得质量很高，获奖同学确实素质确实很好，那么这些获奖同学还是会有很好的出路的。最近几年来，名牌大学自主招生的力度越来越大。只要他们看中，完全可以通过自主招生的渠道来招收这些学生。

二、具有强烈的自信心

有一次，我任教的一个理科班的同学要我给他们的黑板报写一句话，我给他们写的是："将你们的潜能充分地发挥出来，就有可能取得你们自己也意想不到的成果。"我是想告诉他们，当一个人发奋图强的时候，是能够取得很大的成绩，希望他们去奋斗！一个人的一生，应该给自己树立一个足够高的目标，然后为之全力拼搏。很多同学都不清楚自己的能力到底有多强，总觉得自己是一个普通的学生，离那些尖子学生的距离非常远。至于要在全国几千万中学生中去拿冠军拿金牌，那是想都不敢想的。每次我接手培养一批新的同学时，在第一节课上，我总要给他们讲许多我以前的优秀学生的事例，讲他们崇高的理想，讲他们拼搏的精神，讲他们取得的成果，讲一些权威人士对他们的评价，讲得同学们一个个心里都热乎乎的。然后对他们说："既然你们的师兄能做到，你们为什么不能做到呢？你们一定能做到，而且应该做得比他们还要好。"在以后的日常活动中，我还经常给他们鼓劲。这样，同学们就会渐渐地树立起一种很强的自信心来，使他们觉得自己是很行的，相信自己可能而且应该向很高的目标（比如说竞赛中的金牌，将来的诺贝尔奖）奋进。这是一种内在的因素，是一种原动力。

三、重事业，轻名利

物理竞赛对我们每一个痴迷物理的学生来说，是一件大事，可说是一个"盛大的节日"，但我们又必须要正确地对待竞赛。一个学生在重大的物理竞赛中得到好的名次，就可以名声大振，可以轻而易举地进入他所向往的名牌大学，有时还能得到一笔可观的奖金。如果他要申请出国留学，也会方便得多。对一个学生来说，可谓是名利双收。但是如果一个学生真是只为这些目的而奋斗，那他是很难成功的。每当我接手一批新的尖子学生时，总要问他们："我们一块儿学习物理的目的是什么？"可能总会有一两个学生回答是为了拿金牌。对这个回答，我首先充分肯定他的积极性和雄心壮志，然后对大家说："金牌是我们所向往的，但我们的奋斗目标比金牌要高得多。如果你们在中学阶段能对物理进行卓有成效的学习，达到我们培养能力、提高素质的目的，那么即使在竞赛中什么奖也没有得到，我同样会对你们感到十分满意的。因为我们的目标是科学家，我们最终的目的是为人类作出自己的一点贡献。"

我有几个八四届的优秀学生，水平是很好的，但是未能碰上物理竞赛的机会。后来进了复旦大学的物理系后，立即显示出非凡的学习能力。其中有一个叫王菁的同学，只读了一年大学，就和大学毕业生、研究生一起参加李政道博士的研究生的入学考试，结果荣登全国榜首，此事震惊了复旦的老师。当时的复旦大学校长谢希德教授说，她教了三十几年书，还从来没有看到过这样的学生。我们一定要有远大的理想，要站得高，看得远，立志为伟大的科学事业献身。正因为如此，我的学生获得世界大赛的金牌后，都不会沾沾自喜，

他们只是感到自己已被推上了一条更加艰苦的道路。正像沈克琦教授所讲的那样:“竞赛得奖,对学生的今后发展来说只是一次荣誉,并没有多大重要意义,而提高他们的科学水平和能力对他一辈子都将有益。这才是我们工作的方向。”

四、具有较强的承受挫折的能力

挫折产生的原因很多,但归结起来不外乎由客观和主观两个方面因素引起。在物理竞赛中,比如说由于学校条件的限制,有些实验仪器没有,而在竞赛中恰好要用到这些仪器,客观因素使同学们受到了挫折。但更多的挫折还是由于主观上的原因引起的。由于实力暂时还不够,由于竞赛的时候粗心大意等原因导致在竞赛中遭受挫折的例子是屡见不鲜的。作为一名优秀学生,必须能够正确地对待挫折,冷静地分析遭受挫折的原因,以利再战。

在获得金牌之后,王泰然在一封给我的信中这样写道:“在我们一起奋斗的几年里,您教会了我很多东西。有一样东西我觉得对我是很珍贵的:我体验了失败和各种心理上的不平衡。许多人可能只看到我们在领奖台上的笑而不知道这胜利是和伤心合在一个记忆里的。然而这些经验却让我更能正确对待未来道路上的挫折。”当我的学生碰到挫折时,我从来不安慰他们。因为我把这些孩子们当成男子汉,而一个男子汉在碰到挫折时是不需要安慰的。我们在分析了失败的原因之后,关键是要给自己提出新的目标,制定新的计划。事实证明,这是使自己摆脱苦恼、走出阴影、尽快振奋起来的最好方法。

五、营造一个和谐的集体

学科竞赛和体育比赛一样,竞争同样是非常激烈的,有时甚至是残酷的。作为一个尖子学生,一定要有比较高的思想境界,和自己的同伴一定要亲密相处、互相帮助,这样他才能有一个比较和谐的心理环境。我们立志学物理的同学,看上去都是竞争对手,但我们的目标应该是追求共同的成功。我的学生几乎每一周都互相交流各自在看什么书,做了多少题目、多少实验。任何一人一旦落后了,就要尽快赶上去。有一些书只有一个人有,碰到这种情况,他们总是交换着看,从不保密。每次竞赛之后,他们除了希望自己得高分之外,最大的愿望就是同伴也得到好成绩。

为了形成一个很好的集体,教师一定要以身作则。将学生的积极性调动起来之后,要十分爱护他们的积极性。每次活动,教师一定要精心准备,排好的活动计划,不能随意变动。如果老师一次活动缺席,或者哪一次活动没有好好准备,学生们肯定要失望的。有时我病了,只要有可能,我总是把学生们叫到床边来讨论。遇到这种情况,并不一定是这次活动有多少收获,主要是教师用自己的行动给学生们作了一个表率。在这个集体当中,教师是一个坚强的核心,学生们都紧紧地团结在教师的周围,这就是一个很有战斗力的集体。

但愿我的以上体会能对读者有所启发。

张大同老师和我的金牌

第三十一届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌得主　肖　晶

在我参加物理竞赛国家选拔队时,有一位外省市的队友告诉我这样一件事:他们学校

曾经搞过一次物理知识竞赛，试卷中有这样一道题目：请写出获得诺贝尔奖的华人科学家的名字。有一位同学写了3个人：杨振宁、李政道和张大同。当时大家都笑了，但从中我深深的感到张大同老师在全国中学生心目中的地位。

在我去清华的第一年，我所在的宿舍有三个来自边远省份的同学，他们听说我是华师大二附中的学生时都很羡慕我，因为二附中有像张大同老师这样全国闻名的老师。我很奇怪，他们怎么都知道张大同老师编写的物理竞赛辅导书？他们这样回答我："我们怎么能不知道这些书呢？在我们那里虽然参考书不多，但只要是读物理和搞物理竞赛的同学都必备这些书，它们是物理竞赛的圣经。"

回想起高中三年学习物理，参加竞赛，进而获得金牌的经历，我觉得张老师给我们这些学生的关心和鼓励是全方位的，体现在学习和生活的各个方面。

张老师首先注意树立我们的学习自信心。记得高一刚开学的时候，我参加了第十四届全国中学生物理竞赛，目标是能在上海市的复赛中出线，但却没能如愿。比赛后张老师让我去他家，我当时垂头丧气的。张老师先让我分析一下试卷，找出哪些是不会做的，哪些是会做而没有做好的。当时我对自己很失望，流下了泪水。张老师并没有安慰我，而是问了我一句话："经过这次比赛的失利，你是退却了，不准备再学物理了呢？还是继续努力，重新开始？"我选择了后者。事后张老师对我说：你们是男子汉，男子汉失败时需要的不是安慰，而是新的奋斗目标。

张老师还给我看了任宇翔同学(1990年金牌得主)写给他的信，使我深受鼓舞。给我印象最深的是任宇翔在美国宾夕法尼亚大学三年学完了物理、数学和电子信息三个专业。平均一年学习一个专业，简直难以置信！张老师告诉我，师兄们这么优秀，你们通过自身的努力也一定能够做到。从此我暗下决心，要以任宇翔为榜样，努力拼搏。虽然我和任宇翔从未谋面，但他的事迹我都耳熟能详，每时每刻都在激励着我。在高二时的第十五届全国中学生物理竞赛前夕，我在自己的铅笔盒里写下了这样一张纸条："向任宇翔学习，争取在第十五届全国物理竞赛中赛出好成绩。"那年我虽然才高二，但却参加了最后的全国决赛，并获得了二等奖的第二名。后来妈妈告诉我，她知道我一定会成功的，因为她看了我写的纸条后觉得我有目标和自信。这自信就源于当初张老师帮我树立的目标和师兄们的榜样作用。

张老师不但教我们物理，更教我们怎么做人，他时时刻刻都在培养我们的人格。平时，我最喜欢去的就是张老师在师大二村的家。在那里我们不但谈学习，更多的是谈人生、谈理想、谈生活。一杯奶茶，一杯咖啡，两个人就可以心旷神怡地聊上一个下午或一个晚上。从物理竞赛到科学发现，从学习、做人到国家时政，什么都谈。正像王泰然(1990年金牌得主)所说的："每次从你家里出来，总感到天气特别晴朗，星空特别明亮，心里充满了信心，对什么困难都不怕！"高中三年中，我每周都要去张老师家一、二次，他的那间书房是我最熟悉不过的地方。在那里我不但学到了知识，更重要的是完善了人格。正如谢小林(1995年金牌得主)所说的："人格比金牌更重要！"张老师教会我们的不单是拿金牌的本领，更多的是为国争光，不断拼搏的精神。在张老师的那间书房，十多年来走出了我的师兄王泰然、任宇翔、杨亮(1994年金牌得主)；也走出了我的师弟魏轶闵、吴彬(2001年金、银牌得主)。我们每个人都接受过张老师像慈父般的谆谆教导。他教会我们的那种为国争光，勇于拼搏的金牌精神将永远流淌在我们每一位的血液中，激励我们终生。

目　录

contents

第一讲　物体的运动

【知识梳理】

一、抛体运动

1. 竖直抛体运动

竖直抛体运动的速度 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}t$，位移 $\vec{s}=\vec{v}_0t+\dfrac{1}{2}\vec{g}t^2$，这是两个矢量公式，在选定正方向后，可将矢量式化成标量式．凡是和正方向同方向的矢量都取正，反之则取负．

在地面上高 H_A 和 H_B 处各有一个相同的小球 A 和 B，两球在同一竖直线上（图 1 - 1），同时释放两个小球，假如小球之间以及小球和地面的碰撞都是弹性的，那么整个系统满足怎样的条件才能形成周期性的运动呢？

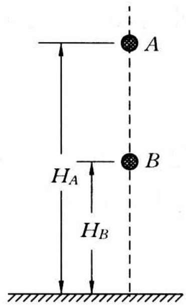


图 1 - 1

因为 A、B 相碰时总是速度交换，因此可以将碰后的 B 看成 A，A 看成 B，这样可将 A、B 看成互不影响的两个物体，系统形成周期性运动的条件是

$$mT_A=nT_B.\quad（m、n\text{ 为自然数}）$$

由自由落体公式可知

$$T_A=\sqrt{\frac{2H_A}{g}},$$

$$T_B=\sqrt{\frac{2H_B}{g}}.$$

所以要求

$$m\sqrt{H_A}=n\sqrt{H_B},$$

即
$$\frac{H_A}{H_B}=\frac{n^2}{m^2}.\quad（m、n\text{ 要互质}）$$

另外，因为要求 A、B 不能同时到地，所以 m、n 要求一奇一偶．

2. 斜抛运动

在研究斜抛运动时有多种方法，既可以将它看作是水平方向的匀速运动和竖直方向的上（或下）抛运动的合成；也可以将它看作是抛出方向的匀速运动和一个自由落体运动的合成．

地面上有一堵高 h 的墙，O 点离墙的距离为 d. 由 O 点以 v_0 抛出一石子，要石子越过墙顶 A，v_0 至少多大？(图 1－2)

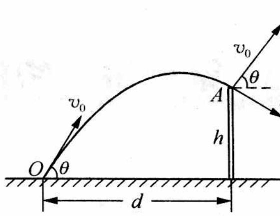


图 1－2

这道题目有多种解法. 可以用上述两种方法将斜抛运动进行分解，解方程组求 v_0 的极小值，但求三角函数的极值有一定的难度. 现在我们换一种思路来考虑这个问题.

抛到墙顶时，石子的速度矢量如图 1－2 所示. 三角形 ABC 的面积为

$$S = \frac{1}{2} v_0 \cdot \cos\theta \cdot gt,$$

由

$$d = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t,$$

可知

$$S = \frac{1}{2} dg.$$

这是一个和 v_0、θ 都无关的定值. 由机械能守恒不难知道，v 和 v_0 是正相关的，当 v_0 最小时，$v_0 \cdot v$ 也肯定最小. 又因为

$$S = \frac{1}{2} v_0 \cdot \sin\alpha \cdot v, \quad (\alpha \text{ 为 } v_0 \text{ 和 } v \text{ 的夹角})$$

S 为一定值，则当 $\sin\alpha = 1$，即 v 垂直于 v_0 时，v_0 有极小值.

由运动学公式有

$$v^2 = v_0^2 \cdot \cos^2\theta + (v_0 \cdot \sin\theta - gt)^2,$$

$$d = v_0 \cos\theta \cdot t,$$

$$h = v_0 t \cdot \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2.$$

当 $v \perp v_0$ 时，由图 1－2 矢量三角形有

$$v_0^2 + v^2 = g^2 t^2.$$

由以上四式可解得

$$v_0 = \sqrt{g(\sqrt{h^2 + d^2} + h)}.$$

二、关联速度

所谓关联速度就是两个通过某种方式联系起来的速度. 比如一根杆上的两个速度通过杆发生联系，一根绳两端的速度通过绳发生联系. 常用的结论有：

1. 杆(或张紧的绳)上各点沿杆(或张紧的绳)方向的速度分量相同；

2. 如果杆(或张紧的绳)围绕某一点转动，那么杆(或张紧的绳)上各点相对转轴的角

速度相同.

一根长为 l 的细杆 AB 靠在竖直墙上沿墙滑下(图 1-3),试确定一曲线,使曲线时时与杆相切.

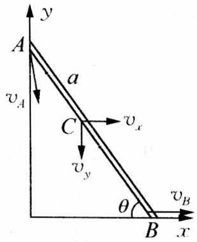


图 1-3

设某一时刻,A、B 两端的速度分别为 v_A 和 v_B,那么有

$$v_A \cdot \sin\theta = v_B \cdot \cos\theta,$$

$$v_B = v_A \cdot \tan\theta.$$

因为要求曲线时时与杆相切,则某时刻杆上该切点 C 的速度方向一定是沿杆方向的. 设 C 点离 A 端的距离为 a,x、y 方向的分速度分别为 v_x 和 v_y,那么应该有

$$v_y = \frac{l-a}{l} \cdot v_A,$$

$$v_x = \frac{a}{l} \cdot v_B = \frac{a}{l} \cdot \tan\theta \cdot v_A.$$

由 $\quad v_y = \tan\theta \cdot v_x,\quad$ (v_C 沿杆方向)

有 $$a = l \cdot \cos^2\theta.$$

因此该曲线的参数方程为

$$x = l \cdot \cos^3\theta,$$

$$y = l \cdot \sin^3\theta.$$

变形可得曲线的直角坐标方程

$$\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

三、圆周运动

圆周运动是一种特殊的曲线运动,但却是研究曲线运动的基础. 一般的曲线运动的任何一个位置,都可以作为一个瞬时的圆周运动来研究.

我们经常将圆周运动分解成法向和切向两个方向来研究. 法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$. 如果是变速圆周运动,那么它在切向上也有加速度 a_t,此时它的合加速度就是

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t.$$

将一个一般的曲线运动中的某一小段当作一个瞬时的圆周运动来研究时,要引进一个曲率半径的概念. 通俗地说,我们把这一小段曲线所在的圆的半径叫做这段曲线的曲率半径. 如果物体沿某一曲线以速率 v 运动,运动到某一曲率半径为 ρ 处,其法向加速度

便为

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

两个半径均为 R 的圆环，一个 O 静止，另一个 O' 以速度 v_0 向右匀速运动(图 1－4)，求如图位置时(θ 角已知)，A 点的速度和加速度.

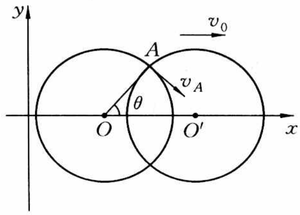


图 1－4

在三角形 AOO' 中可看出，A 点的水平位移永远是 O' 点的一半，所以 A 点的水平速度也是 O' 点的一半，即

$$v_{Ax} = \frac{1}{2}v_0.$$

因为 A 点沿圆环运动，所以

$$v_A = \frac{v_{Ax}}{\sin\theta} = \frac{v_0}{2\cdot\sin\theta}.$$

因为 $v_{Ax} = \frac{v_0}{2}$，即 v_{Ax} 为常量，所以 $a_{Ax} = 0$. 设 $a_A = a_{Ay}$，将其分解成法向分量 a_n 和切向分量 a_t，则

$$a_n = \frac{v_A^2}{R} = \frac{v_0^2}{4R\cdot\sin^2\theta}.$$

因为 a_A 竖直向下，所以

$$a_A = \frac{a_n}{\sin\theta} = \frac{v_0^2}{4R\cdot\sin^3\theta}.$$

四、相对运动

在大多数情况下，我们都习惯于以地面作为参照物，但在某些场合，我们选择其他一些相对地面有速度的物体作为参照物，这样会给解决问题带来方便. 比如 A 物体相对地面的速度为 $v_{A地}$，如果取另一个相对地面有速度 $v_{B地}$ 的 B 物体作参照物，那么 A 物体相对 B 物体的速度为

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{A地} + \vec{v}_{地B}.$$

或写作 $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{A地} - \vec{v}_{B地}$.

上式我们有时表述为“相对速度等于绝对速度和牵连速度之差”. 在列矢量式时，要注意相对速度的前脚标和绝对速度的前脚标相同，相对速度的后脚标和牵连速度的前脚标相同. 一个矢量如果前、后脚标对换，则符号相反.

有一艘船相对水以 4 m/s 的速度向正东行驶，河水以 3 m/s 的速度向南流，雨点以

10 m/s 的收尾速度匀速竖直下落，求船中的人看到雨点的速度.

所谓船中人看到雨点的速度，就是雨点相对人的速度. 根据相对运动的矢量式法则，可得

$$\vec{v}_{雨人}=\vec{v}_{雨地}+\vec{v}_{地人},$$

$$\vec{v}_{地人}=-\vec{v}_{人地},$$

$$\vec{v}_{人地}=\vec{v}_{人水}+\vec{v}_{水地}.$$

将以上三式合并，可得

$$\vec{v}_{雨人}=\vec{v}_{雨地}-\vec{v}_{水地}-\vec{v}_{人水}.$$

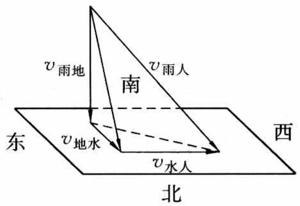


图 1－5

按照上式画出矢量图，如图 1－5 所示. 代入题给数据，可得 $v_{雨人}=5\sqrt{5}$ m/s，方向是北偏西 53°，与竖直方向成 $\arctan\dfrac{1}{2}$ 角度.


【例题精讲】

【例 1】 轰炸机在离地 h 高处以 v_0 的速度水平飞行，在飞机的正前方地面上有一目标 M(图 1－6)，求：(1) 飞机应在离 M 的水平距离 L 为多少时投弹，才能击中目标？(2) 如果在 M 左侧 D 处有一高射炮，在飞机投弹的同时以初速度 v_1 发射炮弹，炮弹要击中飞机投下的炸弹，v_1 的最小值为多少？

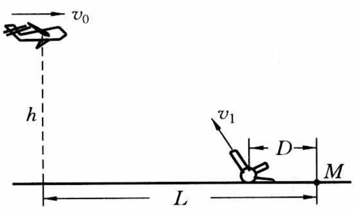


图 1－6

【解答】 (1) 炸弹飞行时间

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

由 $v_0t=L$ 可得

$$L=v_0\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

(2) 在地面参照系中，炮弹和炸弹做的都是曲线运动，不易研究. 我们可以取炸弹为参照物，只要炮弹的相对初速度指向飞机即可(图 1－7). 在炸弹参照系中，不用考虑 g，炮弹有一水平向左的速度 v_0 和 v_1，要 v_0 和 v_1 的合速度沿 BA 方向，而且又要 v_1 最小，显然要 v_1 垂直于 BA，此时

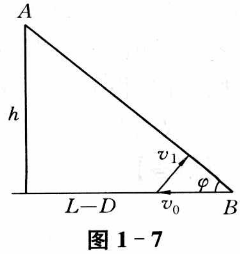


图 1－7

$$v_1 = v_0 \cdot \sin\varphi = \frac{v_0 h}{\sqrt{h^2+(L-D)^2}} = \frac{v_0 h}{\sqrt{h^2+\left(v_0\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}-D\right)^2}}.$$

v_1 取这个最小值的条件是炸弹尚未落地，即炮弹的飞行时间要小于炸弹飞行时间

$$t = \frac{\sqrt{h^2+(L-D)^2}}{v_0\cdot\cos\varphi} = \frac{h^2+(L-D)^2}{v_0(L-D)} \leqslant \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

将 L 代入，即得
$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{g}{2h}}\cdot\frac{h^2+D^2}{D}.$$

(3) 若 $v_0 < \sqrt{\frac{g}{2h}}\cdot\frac{h^2+D^2}{D}$，则只能在炸弹刚落地时炮弹恰好击中它，此时 v_1 最小.

炸弹平抛

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2v_1\cdot\sin\theta}{g}.$$

炮弹斜抛

$$D = 2v_1^2\sin\theta\cdot\frac{\cos\theta}{g}.$$

可解得

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{2h}}\cdot\sqrt{h^2+D^2}.$$

最后

$$v_{1\min} = \begin{cases} \sqrt{\frac{g}{2h}}\cdot\sqrt{h^2+D^2}, & \left(v_0 < \sqrt{\frac{g}{2h}}\cdot\frac{h^2+D^2}{D}\right) \\ \frac{v_0 h}{\sqrt{h^2+\left(v_0\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}-D\right)^2}}. & \left(v_0 \geqslant \sqrt{\frac{g}{2h}}\cdot\frac{h^2+D^2}{D}\right) \end{cases}$$

【例 2】 一间足够大的房间高为 H，一盏灯挂在离地高 h 处.灯泡破裂，碎片以同样大小的速度向四面八方飞去，如果碎片与天花板的碰撞是弹性的，与地板的碰撞是完全非弹性的，那么碎片洒落在地板上的半径多大？若 $H = 5\,\mathrm{m}$，$v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$，求：h 为多大时 R 有最大值，并求出该最大值.

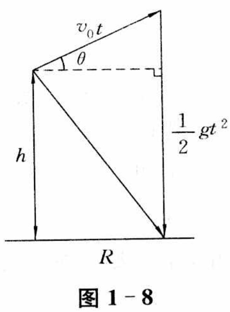


图 1-8

【解答】 (1) 假设碎片不会碰顶，应有(图 1-8)，

$$v_0^2t^2 - \left(\frac{1}{2}gt^2 - h\right)^2 = R^2,$$

$$-\frac{1}{4}g^2t^4+(v_0^2+gh)t^2-h^2=R^2.$$

配方得

$$-\frac{1}{4}g^2\left[t^2-\frac{2(v_0^2+gh)}{g^2}\right]^2+\frac{v_0^2}{g^2}(v_0^2+2gh)=R^2.$$

可见，当 $t^2=\frac{2(v_0^2+gh)}{g^2}$ 时，

$$R_{\max}=\frac{v_0}{g}\cdot\sqrt{v_0^2+2gh}\text{，此时 }\theta=\sin^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}gt^2-h}{v_0t}\right).$$

以上假设要求

$$h+\frac{v_0^2\cdot\sin^2\theta}{2g}\leqslant H,$$

即　　$h\leqslant H-\dfrac{v_0^4}{4g(v_0^2+gh)}.$

(2) 若 h 不满足上述要求，则以 θ 角飞出的碎片将撞击天花板，飞行轨迹发生变化. 此时，抛得最远的碎片应该是未撞击天花板而最高点恰好和天花板相切的碎片. 这时有

$$v_0^2\cdot\sin^2\theta=2g(H-h),$$

$$-h=v_0\cdot\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2,$$

$$R=v_0\cdot\cos\theta\cdot t.$$

由以上三式可解得

$$R'_{\max}=\sqrt{\frac{2v_0^2}{g}-4(H-h)}\cdot(\sqrt{H-h}+\sqrt{H}).$$

(3) 因为 $R_{\max}=\frac{v_0}{g}\cdot\sqrt{v_0^2+2gh}$，所以在不碰顶时，$h$ 越大 R 越大. h 可取的最大值是

$$h=H-\frac{v_0^4}{4g(v_0^2+gh)}=2.56\ \text{m}.$$

此时 $R_{\max}=12.3$ m.

下面再考虑碎片碰顶的情况.

$$R'_{\max}=\sqrt{\frac{2v_0^2}{g}-4(H-h)}\cdot(\sqrt{H-h}+\sqrt{H}).$$

求极值，可得当 $h=3.75\ \mathrm{m}$ 时 R 有极大值

$$R'_{\max}=12.99\ \mathrm{m}>R_{\max}.$$

所以最后的结果是当 $h=3.75\ \mathrm{m}$ 时，R 有最大值 $12.99\ \mathrm{m}$.

【例 3】 有一块直角三角板 ABC，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$（图 1-9），一开始 B 点在 O 点，然后沿着 x 轴向右移动，A 点始终不离开 y 轴，最后移动到 O 点. 求此过程中 C 点经过的路程.

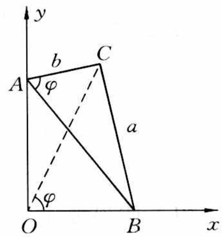


图 1-9

【解答】 (1) 任意时刻，A、B、C、O 四点共圆，因此有

$$\angle COB=\angle CAB=\varphi.$$

φ 是一个定值，即 C 点始终在 $y=\tan\varphi\cdot x$ 的直线上运动.

(2) 由关联速度可知，C 点的速度 v_C 和 B 点的速度 v_B 沿 BC 的分量必须相等. 同理 v_C 和 v_A 沿 AC 的分量也必须相等. 因此，当 BC 垂直于 x 轴时，$v_C=0$. 这个位置就是 C 点由向上运动转而向下运动的转折点. 所以 C 点经过的总路程

$$\begin{aligned}s&=2(\sqrt{a^2+b^2}-a)+(a-b)\\&=2\sqrt{a^2+b^2}-(a+b).\end{aligned}$$

【例 4】 三个舞蹈演员站在一个边长为 l 的等边三角形的三个顶点上，同时开始互相追逐（A 追 B、B 追 C、C 追 A），速率都是 v. 求：

(1) 他们多少时间后相遇？

(2) 他们刚开始追时的加速度是多少？

【解答】 (1) 第一小题有多种解法. 我们这里介绍一种比较简单的速度分解的方法. 因为三人的对称性，所以三人始终在一个等边三角形的三个顶点上，速度方向始终沿着该三角形的一条边. 因此每个人向着中心 O 的速度的分量不变，总是 $v_1=v\cdot\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}v$（图 1-10）. 因此到达 O 点的时间

$$t=\frac{\overline{AO}}{v_1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}l}{\frac{\sqrt{3}}{2}v}=\frac{2l}{3v}.$$

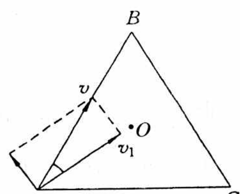


图 1-10

(2) 由 A 点出发，过了一段极短的时间 Δt，A 到了 A'，B 到了 B'，$\overline{AA'}=\overline{BB'}=v\cdot\Delta t$，在三角形 $A'B'D$ 中

$$\Delta\theta=\frac{\overline{B'D}}{\overline{A'B'}}=\frac{v\cdot\Delta t\cdot\sin 60^\circ}{l-v\cdot\Delta t}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{v\cdot\Delta t}{l},$$

$$\Delta v=v\cdot\Delta\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{v^2\cdot\Delta t}{l},$$

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{v^2}{l}.$$

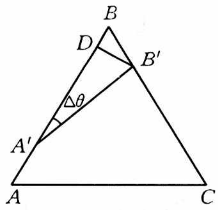


图 1-11

【例 5】 一块小木块 P 放在很粗糙的水平面上，被一根绳拉着滑动，绳的另一端 Q 以速度 v_0 在轨道中运动，绳长 l，绳与轨道的夹角是 θ(图 1-12). 求此时 P 的速度和加速度.

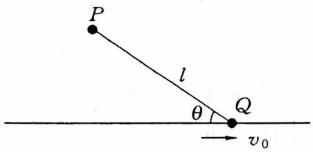


图 1-12

【解答】 由于水平面很粗糙，不沿绳方向的速度很快就被摩擦力消耗，因此 P 的速度一定沿绳的方向. 那么 P 的速度

$$v=v_0\cdot\cos\theta.$$

现取 Q 为参照系. 因为 Q 无加速度，所以 P 在 Q 系中的加速度等于 P 在地面系中的加速度.

$$\vec{a}_P=\vec{a}_t+\vec{a}_n.$$

在 Q 系中，P 有一个垂直于 PQ 的速度 $v_1=v_0\cdot\sin\theta$ (图 1-13).

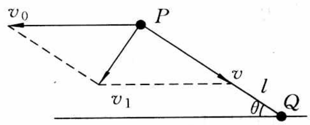


图 1-13

$$a_n=\frac{v_1^2}{l}=\frac{v_0^2\cdot\sin^2\theta}{l},$$

$$a_t=\frac{\Delta v_1}{\Delta t}=\frac{v_0\cdot\Delta\sin\theta}{\Delta t}=\frac{v_0}{\Delta t}[\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta]$$

$$=\frac{v_0}{\Delta\theta}[\sin\theta\cos\Delta\theta+\cos\theta\sin\Delta\theta-\sin\theta]\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

因为 $\Delta\theta$ 很小，所以 $\cos\Delta\theta=1$，$\sin\Delta\theta=\Delta\theta$，因此

$$a_t=v_0\cdot\cos\theta\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{v_0^2}{l}\cdot\sin\theta\cos\theta.$$

以上的 a_t，对自学过高等数学的同学，很容易通过求导得出.