钟书金牌

高中数学

XUEKEYOUXIAOXUEFA ZHIDAO

学科有效学法指导

丛书主编：沈龙明

最有效的学教方法
于思维之全面

最实用的内容设计
于思维之细致

最创新的体例形式
于思维之发散

十年创新专业教辅品牌

时代出版传媒股份有限公司
安徽教育出版社

钟书金牌

高中数学

XUEKEYOUXIAOXUEFA
ZHIDAO 学科

有效学法

指导

丛书主编 沈龙明
丛书副主编 汪佳敏
本册主编 王国江 曹建华 沈龙明
编委 王国江
徐 飞
王惠萱 陈立强
王莉影 娄 毅 张 谊
赵 阳 高 森

最有效的学教方法
于思维之全面
最实用的内容设计
于思维之细致
最创新的体例形式
于思维之发散

十年创新专业教辅品牌

时代出版传媒股份有限公司
安徽教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

学科有效学法指导丛书. 高中数学 / 沈龙明主编.
—合肥 ：安徽教育出版社，2011.4

ISBN 978—7—5336—5918—9

Ⅰ. ①学… Ⅱ. ①沈… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 051933 号

书名:学科有效学法指导·高中数学　　　沈龙明　主编

出 版 人:朱智润　　责任编辑:杜伟伟　　装帧设计:林　栋

出版发行:时代出版传媒股份有限公司 http://www.press—mart.com
　　安徽教育出版社 http://www.ahep.com.cn
　　(合肥市繁华大道西路 398 号，邮编:230601)
　　营销部电话:(0551)3683010,3683011,3683015

排　　版:安徽创艺彩色制版有限责任公司

印　　刷:广水市新闻印务有限公司　　电话:0722—6899858

(如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂商联系调换)

开本:710×1000　1/16　　印张:13　　字 数:219 千字

版次:2011 年 4 月第 1 版　　2011 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978—7—5336—5918—9　　定价:23.00 元

前　言

2009年1月，本人主编的《学科有效教学实用课堂教学艺术》系列丛书问世，涉及小学语文、数学、英语，初中和高中语文、数学、英语、物理、化学等学科共13种。丛书编写的目的是给已在中小学教育岗位上的教师和即将踏上这一岗位的“准教师”提供一套有关如何确立课堂教学新理念，如何提高自己课堂教学艺术水平，进而提高教学效率，以收到理想的教学效果的教学参考书。

现在出版的这套《学科有效学法指导》系列丛书是《学科有效教学实用课堂教学艺术》系列丛书的“姐妹篇”。前一套丛书的读者对象主要是教师，而现在这一套丛书的读者对象除教师外，扩展到广大中小学学生。大家知道，要真正实施“有效教学”，收到“花时少，收益高”的效果，教师除了要摆脱传统教学思想中落后因素的束缚，确立适应时代发展需要的教学新理念外，还必须牢固地掌握并娴熟地运用课堂教学艺术。但是，是否教师掌握和运用了课堂教学艺术，教学就一定高效了呢？答案是：不一定。因为课堂教学是一种“教”与“学”双方的互动活动，如果只有“教”的高水平而没有“学”的高水平，那么要想收到理想的效果，显然是不可能的。而要提高学生“学”的水平，教师除了想方设法激发学生浓厚的学习兴趣和强烈的求知欲外，还应当根据不同学科的特点，教给他们一些具体实用的学习方法。不言而喻，学习方法与学习效果之间有着十分密切的联系：方法不当，便会“事倍功半”；而方法得当，便会“事半功倍”。学生掌握了“因科而异”、具体实用的学习方法后，他们“学”的水平自然而然就会迅速提高。因此，我现在主编的这套系列丛书把重点放在了“有效学法指导”上。

本套系列丛书最大的特色是实用性强。丛书编写的目的是“为广大中小学生和各科教师提供实用性强的半工具式的学习方法辅导书”，所以编写时有意淡化理论色彩，尽量介绍得通俗、具体。我们期望这套丛书能成为各学科教师“教”的“好帮手”，中小学生“学”的“好伙伴”。在这一总体特色的统摄下，具体说来，在写作方面还有以下两个特点：一是体例新颖。介绍每种方法时，一般从“简述”、“适用”、“操作”和“注意”四个方面加以叙说，针对性强，因而对读者富

有吸引力。二是叙说平实并能紧密联系实际。每种方法介绍过程中都配有具体的教学实例，叙说注重自然、平实，这样写无疑会增强书中介绍的各种方法的实用性，以收到“要让读者愿意阅读，读来有用”的预期效果。

本套系列丛书共13种，即《学科有效学法指导·小学语文》、《学科有效学法指导·小学数学》、《学科有效学法指导·小学英语》、《学科有效学法指导·初中语文》、《学科有效学法指导·初中数学》、《学科有效学法指导·初中英语》、《学科有效学法指导·初中物理》、《学科有效学法指导·初中化学》、《学科有效学法指导·高中语文》、《学科有效学法指导·高中数学》、《学科有效学法指导·高中英语》、《学科有效学法指导·高中物理》、《学科有效学法指导·高中化学》，可供广大中小学学生、中小学各学科教师以及师范院校相关专业的学生选读。

由于编写者水平有限，加上撰写时间较为仓促，书中疏漏、不妥之处在所难免，恳请广大读者不吝批评指正，以便日后再版时加以修正。

丛书主编　沈龙明

2011年4月

目　　录

1　待定系数法 …… 1

2　等积法 …… 9

3　分类讨论法 …… 14

4　数学归纳法 …… 23

5　向量法 …… 33

6　综合法 …… 40

7　递推法 …… 49

8　定义法 …… 53

9　反证法 …… 61

10　分析法 …… 66

11　降次法 …… 70

12　赋值法 …… 73

13　图像法 …… 78

14 割补法 …… 85

15 比较法 …… 91

16 配方法 …… 99

17 换元法 …… 108

18 判别式法 …… 118

19 消元法 …… 128

20 增量法 …… 137

21 估算法 …… 140

22 导数法 …… 146

23 构造法 …… 152

24 解选择题的特殊方法 …… 167

25 枚举法 …… 179

26 探索法 …… 195

1 待定系数法

方法简介

所谓“待定系数法”，就是依题意引进字母作为数学问题的待定系数，然后根据相关条件研究解决有关问题或列出含有待定系数的方程或方程组，确定这些待定系数的方法.

适用范围

待定系数法有着广泛应用，在函数、方程、复数、向量、解析几何、立体几何、数列、圆锥曲线等数学问题中都有涉及.

应用举例

【例 1】 已知二次函数 $y=f(x)$ 在 $x=\frac{t+2}{2}$ 处取得最小值 $-\frac{t^2}{4}(t\neq 0)$，$f(1)=0$.

(1)求 $y=f(x)$ 的表达式；

(2)若任意实数 x 都满足等式 $f(x)g(x)+mx+n=x^3$，其中 $g(x)$ 为多项式，试用 t 表示 m 和 n；

(3)设 $t=-3$，圆 C_k 的方程为 $(x-mq^k)^2+(y-nq^k)^2=r_k^2(0<q<1,r_k>0)$，圆 C_k 与 x 轴相切，圆 C_k 与圆 C_{k+1} 外切 $(k=0,1,2,\cdots)$，设 S 为所有这些圆的面积之和. 求 q,S 的值.

分析：求函数解析式的常用方法之一就是待定系数法.

解：(1)设二次函数 $f(x)=a\left(x-\frac{t+2}{2}\right)^2-\frac{t^2}{4}$（$a$ 为待定系数）.

$\because f(1)=0,\therefore a\left(1-\frac{t+2}{2}\right)^2-\frac{t^2}{4}=0,\therefore a=1.\therefore f(x)=x^2-(t+2)x+t+1.$

(2)令 $f(x)=(x-1)[x-(t+1)]$ 代入已知等式，得 $(x-1)[x-(t+1)]\cdot g(x)+mx+n=x^3$. ①

令 $x=1$ 代入①，得 $m+n=1$. ②

令 $x=t+1$ 代入①，得 $(t+1)m+n=(t+1)^3$．　③

由②③及 $t\neq0$，得 $m=t^2+3t+3, n=-t^2-3t-2$．

(3) 当 $t=-3$ 时，$m=3, n=-2$，则圆 C_k 的方程为 $(x-3q^k)^2+(y+2q^k)^2=r_k^2$．

$\because$ 圆 C_k 与 x 轴相切，且 $0<q<1$，$\therefore r_k=2q^k$．而圆 C_k 的圆心 O_k 的坐标为 $\left(3q^k,-2q^k\right)$，

$\therefore |O_kO_{k+1}|^2=(3q^{k+1}-3q^k)^2+(-2q^{k+1}+2q^k)^2=13q^{2k}(q-1)^2$．

$\therefore |O_kO_{k+1}|=\sqrt{13}q^k(1-q)$．

又圆 C_k 与圆 C_{k+1} 相外切，$\therefore r_k+r_{k+1}=|O_kO_{k+1}|$，

即 $2q^k+2q^{k+1}=\sqrt{13}q^k(1-q)$，解得 $q=\dfrac{\sqrt{13}-2}{\sqrt{13}+2}$．

$\because$ 圆 C_k 的面积 $S_k=\pi r_k^2=4\pi q^{2k}$，

故 $S=S_0+S_1+S_2+\cdots+S_k+S_{k+1}+\cdots=4\pi(1+q^2+q^4+\cdots+q^{2k}+q^{2(k+1)}+\cdots)=\dfrac{4\pi}{1-q^2}=\dfrac{4\pi}{1-\left(\dfrac{\sqrt{13}-2}{\sqrt{13}+2}\right)^2}=\pi\left(2+\dfrac{17}{26}\sqrt{13}\right)$．

点拨：本题首先用待定系数法求二次函数 $f(x)$，用直接法解之．待定系数法在函数中有着广泛的应用．

【例 2】　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1$，求 a_n．

分析：待定系数 m 将递推公式 $a_{n+1}=2a_n+1$ 转化为 $(a_{n+1}+m)=2(a_n+m)$（m 为待定系数），再确定待定系数 m 的值，从而构造等比数列，求 a_n 的通项公式．

解：原递归公式化为 $(a_{n+1}+m)=2(a_n+m)$（m 为待定系数），则展开后，经比较，得 $m=1$．$\therefore$ 数列 $\{a_n+1\}$ 组成以 $a_1+1=2$ 为首项，2 为公比的等比数列．

故 $a_n+1=2\cdot2^{n-1}$，即 $a_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

点拨：本题的解题实质就是转化．形如 $a_{n+1}=pa_n+q$（p、q 为常数，且 $p\neq1$）型的一阶性传递公式，可以将递归式化为：$(a_{n+1}+m)=p(a_n+m)$（m 为待定系数）．再经展开与原式比较，得 $m=\dfrac{q}{p-1}$．这样，数列 $\{a_n+m\}$ 组成一个以 a_1+m 为首项，p 为公比的等比数列．应用等比数列通项公式，即可得 $a_n=(a_1+m)\cdot p^{n-1}-m$．

【例 3】　已知 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量，并且 $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$．若 A, B, D 三点共线，求 k 的值．

分析：由 A,B,D 三点共线可得 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BD}$，故设待定系数为 λ，进而求得 k 的值.

解：依题意，得 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)-(2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=-\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$.

∵ A,B,D 三点共线，即 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线，

∴可设 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$（$\lambda$ 为待定系数，且 $\lambda\in\mathbf{R}$）.

则 $3\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda(-\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2)$，∴ $\begin{cases}3=-\lambda,\\k=-4\lambda.\end{cases}$ 故 $k=12$.

点拨：利用三点共线转化到向量平行，令 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$（$\lambda$ 为待定系数，且 $\lambda\in\mathbf{R}$），解出 k 的值.

【例 4】 已知圆满足：①截 y 轴所得弦长为 2；②被 x 轴分成两段弧，其弧长的比为 3 ∶ 1；③圆心到直线 l：$x-2y=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，求该圆的方程.

分析：设圆的标准方程，求解待定系数 a,b,r.

解：设所求圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，则圆心 P 为 (a,b)，半径为 r.

∵圆 P 截 y 轴所得弦长为 2，∴ $a^2+1=r^2$. ①

而圆 P 被 x 轴分成两段弧，其弧长的比为 3 ∶ 1，即圆 P 被 x 轴截得劣弧所对圆心角为 $90°$，∴ $b^2=\frac{1}{2}r^2$. ②

又圆心 $P(a,b)$ 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，∴ $\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，即 $a-2b=\pm1$. ③

联立①②③，解得 $\begin{cases}a=1,\\b=1,\\r=\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\b=-1,\\r=\sqrt{2}.\end{cases}$

故所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

点拨：求圆的方程，只需求 a,b,r，因此必须列出三个独立方程.

【例 5】 双曲线的中心在坐标原点 O，焦点在 x 轴上，过双曲线的右焦点且斜率为 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 的直线交双曲线于 P,Q 两点，若 $OP\perp OQ$，$|PQ|=4$，求双曲线的方程.

分析：设双曲线的标准方程，求解待定系数 a,b.

解：设所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

则直线 PQ 的方程为 $y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)\left(c=\sqrt{a^2+b^2}\right)$.

联立$\begin{cases} b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2, \\ y=\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x-c) \end{cases}$ 得

$(5b^2-3a^2)x^2+6a^2cx-(3a^2c^2+5a^2b^2)=0.$

设两交点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $y_1=\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x_1-c)$，$y_2=\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x_2-c)$.

若 $5b^2-3a^2=0$，则$\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$，直线 PQ 与渐近线平行，故 PQ 与双曲线只有一个交点，与题设矛盾. ∴$5b^2-3a^2\neq 0$.

由韦达定理，得$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{6a^2c}{5b^2-3a^2}, & ① \\ x_1x_2=-\dfrac{3a^2c^2+5a^2b^2}{5b^2-3a^2}. & ② \end{cases}$

∵$OP\perp OQ$，∴$k_{OP}\cdot k_{OQ}=-1$，即$\dfrac{\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x_1-c)}{x_1}\cdot\dfrac{\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x_2-c)}{x_2}=-1$，整理后，得 $3c(x_1+x_2)-8x_1x_2-3c^2=0$.

将①②及 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 代入上式并整理，得$(a^2+3b^2)(3a^2-b^2)=0$.

∵$a^2+3b^2\neq 0$，∴$b^2=3a^2$. ∴$c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$.

由$|PQ|=4$，得

$\left(1+\dfrac{3}{5}\right)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=4^2$，即$\left(-\dfrac{6a^2c}{5b^2-3a^2}\right)^2+\dfrac{4(3a^2c^2+5a^2b^2)}{5b^2-3a^2}=10.$　③

将 $b^2=3a^2$ 及 $c=2a$ 代入③，解得 $a^2=1$，$b^2=3$. 故所求双曲线方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

点拨：待定系数法是解决圆锥曲线乃至整个解析几何问题的基本方法，它的特点是思想直接，入门容易，但运算量大，有时甚至很繁琐，所以不但要求心细，提高运算质量，而且还要注意应用一些技巧（如韦达定理等）简化运算过程.

【例 6】 设复数 z 满足 $4z+2\bar{z}=3\sqrt{3}+\mathrm{i}$，$\omega=\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta(\theta\in\mathbf{R})$.

(1)求复数 z 的值；

(2)求$|z-\omega|$的取值范围.

分析：设复数 z 的形式为 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，求解待定系数 a,b.

解：(1)设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，

则 $4(a+b\mathrm{i})+2(a-b\mathrm{i})=3\sqrt{3}+\mathrm{i}\Rightarrow\begin{cases}4a+2a=3\sqrt{3},\\4b-2b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}\therefore z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}.$

(2) $|z-\omega|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}+\cos\theta\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}=\sqrt{2-2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

$\therefore|z-\omega|\in[0,2]$.

点拨：求复数用待定系数法，第 2 小题也可用几何法：复平面上定点 z 到以单位圆为轨迹的动点 ω 的距离范围.

高考题赏析

【例 7】 (全国春季高考试题)某椭圆的焦点是 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$，过点 F_2 并垂直于 x 轴的直线与椭圆的一个交点为 B，且 $|F_1B|+|F_2B|=10$，求该椭圆的方程.

分析：设椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，求解待定系数 a,b.

解：设所求椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由椭圆的定义及题设条件，得

$2a=|F_1B|+|F_2B|=10$，$\therefore a=5$.

$2c=|F_1F_2|=8$，$\therefore c=4$.

$\therefore b^2=a^2-c^2=9$.

故所求椭圆的方程为

$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

【例 8】 (2008 年上海文)若 z 是实系数方程 $x^2+2x+p=0$ 的一个虚根，且 $|z|=2$，则 $p=$________.

分析：设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则方程的另一个根为 $z'=a-b\mathrm{i}$，且 $|z|=2\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=2$.

由韦达定理得 $z+z'=2a=-2$，$\therefore a=-1$，$\therefore b^2=3$，$b=\pm\sqrt{3}$.

所以 $p=z\cdot z'=(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)=4$.

答案:4

【例 9】 如图 1,矩形 $ABCD$ 和梯形 $BEFC$ 所在平面互相垂直,$BE /\!/ CF$,$\angle BCF=\angle CEF=90°$,$AD=\sqrt{3}$,$EF=2$.

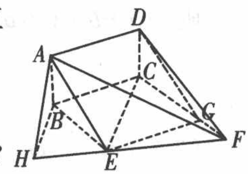

图 1

(1)求证:$AE /\!/$ 平面 DCF;

(2)当 AB 的长为何值时,二面角 $A-EF-C$ 的大小为 $60°$?

解法一:(1)过点 E 作 $EG\perp CF$ 交 CF 于点 G,联结 DG,可得四边形 $BCGE$ 为矩形.

又四边形 $ABCD$ 为矩形,所以 $AD \underline{/\!/} EG$,从而四边形 $ADGE$ 为平行四边形,故 $AE /\!/ DG$.

因为 $AE\not\subset$ 平面 DCF,$DG\subset$ 平面 DCF,所以 $AE /\!/$ 平面 DCF.

(2)过点 B 作 $BH\perp EF$ 交 FE 的延长线于点 H,联结 AH.

由平面 $ABCD\perp$ 平面 $BEFC$,$AB\perp BC$,得

$AB\perp$ 平面 $BEFC$,

从而 $AH\perp EF$.

所以 $\angle AHB$ 为二面角 $A-EF-C$ 的平面角.

在 $Rt\triangle EFG$ 中,因为 $EG=AD=\sqrt{3}$,$EF=2$,所以 $\angle GFE=60°$,$FG=1$.

又因为 $CE\perp EF$,所以 $CF=4$,

从而 $BE=CG=3$.

于是 $BH=BE\cdot\sin\angle BEH=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

因为 $AB=BH\cdot\tan\angle AHB=\dfrac{9}{2}$,

所以当 AB 为 $\dfrac{9}{2}$ 时,二面角 $A-EF-C$ 的大小为 $60°$.

解法二:如图 2,以点 C 为坐标原点,射线 CB,CF 和 CD 方向分别作为 x 轴,y 轴和 z 轴的正方向,建立空间直角坐标系 $Cxyz$.

设 $AB=a$,$BE=b$,$CF=c$,

则 $C(0,0,0)$,$A(\sqrt{3},0,a)$,$B(\sqrt{3},0,0)$,$E(\sqrt{3},b,0)$,$F(0,c,0)$.

(1)$\overrightarrow{AE}=(0,b,-a)$,$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},0,0)$,$\overrightarrow{BE}(0,b,0)$,

所以$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AE}=0$,$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BE}=0$,从而 $CB\perp AE$,$CB\perp BE$,

所以 $CB\perp$ 平面 ABE.

因为 $CB\perp$ 平面 DCF，所以平面 $ABE /\!/$ 平面 DCF. 故 $AE /\!/$ 平面 DCF.

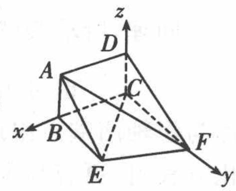

图 2

(2)因为 $\overrightarrow{EF}=(-\sqrt{3},c-b,0)$，$\overrightarrow{CE}=(\sqrt{3},b,0)$，$|\overrightarrow{EF}|=2$，$\angle CEF=90°$.

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，从而

$$\begin{cases}-3+b(c-b)=0,\\ \sqrt{3+(c-b)^2}=2,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}b=3,\\ c=4.\end{cases}$$

所以 $E(\sqrt{3},3,0)$，$F(0,4,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(1,y,z)$ 与平面 AEF 垂直，

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FE}=0$，解得 $\boldsymbol{n}=\left(1,\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{a}\right)$. 又因为 $BA\perp$ 平面 $BEFC$，$\overrightarrow{BA}=(0,0,a)$，

所以 $\dfrac{|\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\sqrt{3}a}{a\sqrt{4a^2+27}}=\dfrac{1}{2}$，得 $a=\dfrac{9}{2}$.

所以当 AB 为 $\dfrac{9}{2}$ 时，二面角 $A-EF-C$ 的大小为 $60°$.

点拨：本题主要考查空间线面关系、空间向量的概念与运算等基础知识，同时考查空间想象能力和推理运算能力. 在运用空间向量解决问题时，设 $AB=a$，$BE=b$，$CF=c$，$\boldsymbol{n}=(1,y,z)$，求解待定系数 a,b,c 等.

创新问题

【例 10】 设椭圆中心在原点，它的一个焦点与短轴两端点的连线互相垂直，且此焦点与长轴较近的端点的距离是 $\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求椭圆的标准方程.

分析：求椭圆方程，根据所给条件，确定几何数据 a,b,c 的值，问题就全部解决了，设出椭圆的方程，等待确定 a,b 和 c，由椭圆的几何量之间的关系得到第一个方程，由已知的垂直关系联想到勾股定理建立第二个方程，再由焦点与长轴较近的距离转化为 $a-c$ 的值后列出第三个方程.

解法一：设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，长轴为 $2a$，焦点为 $2c$，则

$$\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ a^2+a^2=(2b)^2,\\ a-c=\sqrt{10}-\sqrt{5}.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=\sqrt{10},\\ b=\sqrt{5}.\end{cases}\text{故所求椭圆的方程是}\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1.$$

同理,所求椭圆的另一方程为$\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{5}=1$.

解法二:也可由“一个焦点与短轴两端点连线互相垂直”的几何条件推出焦点与短轴两端点组成等腰直角三角形,得 $b=c$,替换方程组中的第二个方程,简化方程组,更容易求出 a,b 的值.

点拨——误区解读

圆锥曲线中,几何量(a,b,c,p)的确定,是待定系数法的生动体现.如何确定,要抓住已知条件,将其转换成表达式.在曲线的平移中,几何量仍然不变,一般地,解析几何中求曲线方程的问题,大部分用待定系数法,解题的基本步骤是:设方程→列方程→求值→系数代入.

【例 11】 已知双曲线经过点 $P\left(\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right)$,渐近线方程是 $y=\pm 2x$,求其焦点坐标.

解:设双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=\lambda(\lambda\neq 0)$,

因为 $P\left(\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right)$在双曲线上,所以$\lambda=\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{4}=\frac{9}{16}-\frac{25}{16}=-1$.

故所求双曲线方程为$\frac{y^2}{4}-x^2=1$.

双曲线焦点在 y 轴上,中心在原点,焦半距 $c=\sqrt{5}$.

故焦点坐标为 $F_1(0,-\sqrt{5})$,$F_2(0,\sqrt{5})$.

点拨:本题也可以设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,再将点 P 坐标代入双曲线方程,再利用渐近线方程为 $y=\pm 2x$,联立两已知条件,得出 a,b.相比较可以发现,上面的方法比较简单.因此,在设待定系数时,需要考虑设定原则——少,巧,这样可以减少计算量,提高解题正确度.

2 等积法

方法简介

点、线、面之间的距离问题均可转化为点到平面的距离问题加以解决.点到平面的距离除了用上述方法求解,还可以利用求以该点为一顶点,该平面为一底面的三棱锥的体积而求之.这种求解方法称为等积法.

适用范围

常用的等积变换有:平面图形等面积变换、三棱锥等体积变换和平行六面体等体积变换.

(1)顶底组合转换法

三棱锥有四组顶点与相对底面,每一组称顶底的一个组合,由于任一个顶底组合中的顶点到对应底面的距离与该底面面积都可以计算出此三棱锥的体积,因此这四个顶底组合算出的体积是相等的.这样便可以利用等体积法倒过来求此三棱锥的某个顶点到相应底面的距离或求某面的面积.

(2)共底平顶法或共顶平底法

如果两个三棱锥共底面,而顶点在同一条平行于底面的直线上,那么这两个三棱锥体积相等.或者如果两个三棱锥共一顶点,而底面在同一平面内且面积相等,那么这两个三棱锥的体积相等.这样便可以用一个三棱锥的体积求另一个三棱锥的体积,或借助于一个三棱锥的体积等于另一个三棱锥的体积从而求该三棱锥的底面、高等相关量.

应用举例

【例 1】 如图 1,已知正方形 $ABCD$ 的边长是 a,正方形 $CEFG$ 的边长为 b,且点 B,C,E 在一条直线上.联结 AG,GE,AE,求 $S_{\triangle AGE}$.

分析:用"等面积变换"方法.

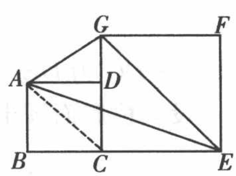

图 1

解:如图,联结 AC,易证 $AC\parallel GE$.根据"平行线间的距离处处相等"可知$\triangle AGE$ 和$\triangle CGE$ 同底(GE)等高,

$\therefore S_{\triangle AGE}=S_{\triangle CEG}=\dfrac{1}{2}b^2$.

点拨:相比较其他方法,等积法较为简单.

【例 2】 在正三棱锥 $A-BCD$ 中，已知底面△BCD 的边长为 2，侧棱的长为 3，求底面顶点到相对侧面的距离.

分析：利用等积法求点到平面的距离.

解：设顶点 B 到侧面 ACD 的距离为 d，正三棱锥 $A-BCD$ 的高为 h.

因为 $BC=CD=DB=2, AB=AC=AD=3$，

所以 $h=\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\right)^2}=\frac{\sqrt{69}}{3}, S_{\triangle BCD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$，

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3^2-\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^2}=2\sqrt{2}$.

而 $V_{A\text{-}BCD}=V_{B\text{-}ACD}$，所以 $\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCD}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ACD}\cdot d$，

即 $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{69}}{3}=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot d$，

所以 $d=\frac{\sqrt{46}}{4}$.

点拨：利用等积法求点到平面的距离是一种行之有效的方法.

【例 3】 如图 2，圆柱的轴截面 $ABCD$ 是正方形，点 E 在底面圆周上，且 $AF\perp DE$，F 为垂足.

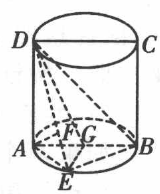

图 2

(1)求证：$AF\perp DB$；

(2)若圆柱与三棱锥 $A-BDE$ 的体积之比为 $3\pi:1$，求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小.

分析：利用三棱锥 $A-BDE$ 与 $D-ABE$ 的体积相等求相关量.

解：(1)$DA\perp$平面 $ABE\Rightarrow\left.\begin{matrix}DA\perp BE\\ BE\perp AE\end{matrix}\right\}\Rightarrow BE\perp$平面 DAE

$\left.\begin{matrix}\Rightarrow AF\perp BE\\ AF\perp DE\end{matrix}\right\}\Rightarrow AF\perp$平面 $BDE\Rightarrow AF\perp DB$.

(2)作 $EG\perp AB$ 交 AB 于点 G，联结 DG.

$\left.\begin{matrix}AD\perp\text{平面 } AEB\Rightarrow AD\perp EG\\ EG\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow EG\perp$平面 $ABCD\Rightarrow$

$\angle EDG$ 为 DE 与平面 $ABCD$ 所成的角.

设圆柱底面圆半径为 r，

$V_{\text{圆柱}}=2\pi r^3\Rightarrow V_{A\text{-}BDE}=V_{D\text{-}ABE}=\frac{2}{3}r^3\Rightarrow\frac{1}{3}S_{\triangle AEB}\cdot AD=\frac{2}{3}r^3$