



重力測量学 与地球形狀理論教程

中国人民解放军測繪学院

一九五六年 北京



重力測量学与地球形狀理論教程

A·A·米哈依洛夫著

中国人民解放军測繪学院譯印

一九五六年十二月 北 京

出 版 說 明

一、我院为了学习苏联先进測繪技术，故初步組織人力翻譯一些苏联的測繪技术教材和参考書，作为我院人員学习苏联先进測繪科学的主要資料。

二、本書系根据前苏联人民委员会測繪总局編輯出版局 (*Редбюро ГУГК при СНК СССР*) 1939年于莫斯科出版的重力測量学与地球形狀理論教程 (*КУРС Гравиметрии и теории фигуры земли*) 第二版譯出。本書作者系 А.А. 米哈依洛夫教授。經前苏联人民委员会高等学校委员会审定作为高等測量学校教科書。

三、本書由我院科学研究科翻譯，大地教授会天文重力教研室校訂。

四、由于教学上需要迫切，未能作反复审校，錯誤与不妥之处，在所难免，希望讀者提出宝贵意見，以便再版时修正。

中国人民解放军測繪学院

一九五六年七月

目 录

第二版序	7
第一版序	8

I 地球形狀理論

第一章 緒論、簡史	11
-----------------	----

§ 1. 課程內容	11
§ 2. 牛頓	14
§ 3. 惠更斯	18
§ 4. 旋轉流体之均衡形狀	21
§ 5. 克萊勞的研究	24
§ 6. 非等質之均衡形狀 『位』概念的引入	27
§ 7. 地球形狀和天文数据	30
§ 8. 地球之內部結構	32

第二章 引力的位	35
----------------	----

§ 9. 引力的位	35
§ 10. 位函数的一些基本性質	39
§ 11. 物質球層对外部点之引力	42
§ 12. 物質球層对內部点之引力	45
§ 13. 物質球体之引力	47
§ 14. 拉伯拉斯与布桑方程。引力位函数二阶导数之不連續性	52

第三章 重力和重力位函数	56
§ 15. 离心力的位	56
§ 16. 重力	58
§ 17. 其它天体对重力的干扰	61
§ 18. 旁卡定理	66
§ 19. 关于大地水准面的形状	70
§ 20. 引力位之级数展开	74
§ 21. 理想大地水准面方程	79
§ 22. 克莱劳定理	83
第四章 等质椭球体之引力	90
§ 23. 等质椭球体对内部点之引力	90
§ 24. 马可劳林关于共焦点椭球体引力之定理	99
§ 25. 等质椭球体对外部点之引力	109
§ 26. 椭球体是旋转的液体质量的平衡形状	118
第五章 斯托克斯问题	126
§ 27. 斯托克斯定理	126
§ 28. 椭球状水准面的斯托克斯问题	132
§ 29. 对于小扁率椭球顾及二次项的克莱劳定理	138
§ 30. 地球质量及其平均密度	147
第六章 大地水准面形状之研究	152
§ 31. 布桑积分	152
§ 32. 重力测量的基本微分方程	160
§ 33. 重力测量微分方程的积分。斯托克斯公式	165
§ 34. 应用斯托克斯公式决定大地水准面的形状	172
§ 35. 垂线偏差	187

§ 36. 質量平面分布之垂綫偏差	203
-------------------	-----

第七章 重力归算 210

§ 37. 重力归算至海水面上	210
-----------------	-----

§ 38. 中間地層的引力。布格改正	213
--------------------	-----

§ 39. 地球內部之重力变化。普萊改正	219
----------------------	-----

§ 40. 局部地形改正	221
--------------	-----

§ 41. 各种归算之測量意义	228
-----------------	-----

§ 42. 逆点法和赫尔默第一压缩法	238
--------------------	-----

第八章 均衡理論 242

§ 43. 均衡理論。普拉特假說	242
------------------	-----

§ 44. 爱黎的假說	248
-------------	-----

§ 45. 溫宁·曼尼斯之假說。均衡論的真实性	250
-------------------------	-----

§ 46. 重力的均衡归算	256
---------------	-----

§ 47. 各种归算法之比較	266
----------------	-----

§ 48. 布魯斯改正。赫尔默对重力异常的解釋	276
-------------------------	-----

§ 49. 正常重力公式	284
--------------	-----

II 重力測量

第九章 絕對重力測定 291

§ 50. 第一次用摆进行測量工作	291
-------------------	-----

§ 51. 数学摆的理論	296
--------------	-----

§ 52. 物理摆的理論	302
--------------	-----

§ 53. 可倒摆及其用于重力的絕對測定	310
----------------------	-----

第十章 相对重力測定 325

§ 54. 相对重力測定的原理。斯笛尔聶克仪	325
------------------------	-----

§ 55. 改正数計算	336
§ 56. 計算例。一般的探討	357
§ 57. 新型斯笛尔聶克仪。斯丘克拉特仪	362
§ 58. 在阻尼介質中摆的运动	370
§ 59. 支架共振改正	374
§ 60. 測定支架共振改正例	387
§ 61. 二摆同时摆动法	395
§ 62. 摆仪常数測定	407
§ 63. 相对重力測定的摆仪之最新改进	420
§ 64. 相对重力測定的精度估計。誤差研究	433
§ 65. 按溫宁·曼尼斯法測定海上重力	446
§ 66. 溫宁·曼尼斯仪器及其觀測	458
§ 67. 列若彈性摆	468
§ 68. 靜重力仪	475

第十一章 重力扭秤 489

§ 69. 仪器的基本概念，第一类型扭秤的原理	489
§ 70. 第二类型扭秤的原理	495
§ 71. 扭秤的構造。觀測的进行	500
§ 72. 用第二类型的扭秤进行觀測的計算	507
§ 73. 扭秤常数的測定	513

第十二章 扭秤觀測的应用 522

§ 74. 导数的測定意义	522
§ 75. 地形影响改正	536
§ 76. 导数的正常值。結果的判定	554
§ 77. 扭秤觀測和垂綫偏差	563
§ 78. 重力垂直梯度之測定	574
俄罗斯和苏联的重力測量發展史簡述	582

第 二 版 序

第二版內增补了几节，所談的是那些近几年来获得了發展的、或者是那些在第一版內闡述得不够充分的問題，其中包括关于用司托克斯法研究大地水准面形狀和按溫宁·曼尼斯公式決定垂綫偏差的詳細敘述；关于重力归算的补充；摆仪常数的測定以及一些最新的靜重力儀的敘述。此外，很多地方的闡述都作了修改和补充，以求更加准确、簡單、完美。書末，附加了苏联重力測量工作的發展簡史。在这里我对那些給我指出第一版內的錯誤、不足和刊誤的同志們，其中特別是对 $\Pi \cdot M \cdot$ 尼基弗洛夫， $H \cdot H \cdot$ 巴利依斯基和 $\mathcal{M} \cdot B \cdot$ 索罗金諸教授表示衷心的感謝。

公式是按新的系統表示的，黑点前面的数字表示节，黑点后面的数字表示节內的公式順序號碼。

第 一 版 序

用俄文叙述的关于重力测量和它在大地测量上的应用方面的资料是極其貧乏的，除掉一些原作的和翻譯的文章以外（文內談的是用摆和扭秤进行觀測，但这些文章很早就已失去了銷路），只是在最近才出現了若干書籍和文章，而大部分也仅仅是叙述重力测量在矿山勘探上应用的觀測和器械方面，至于說到重力测量的理論原理及其在大地測量目的上的利用，則在这些問題上我們的資料尚远不及用最簡單的、不够严密的方法所作的克萊勞定理的推論。實則，关于重力測量学广泛应用的問題，不仅在那些已享有应得的显著地位的科学領域內应用（即在地質学和探查有用矿物上），就是在大地測量中，也利用它来研究地球形狀及与此問題有关的一些問題，首先就是測定垂綫偏差。這個問題，對我們來說，是属于与研究和闡述苏联广大領土有密切联系的一些最迫切的問題範圍內，但在這些問題上我們的資料却是極端貧乏。作者在国立莫斯科大学和莫斯科測量學院內講授相应的課程时强烈地感受到这种貧乏。因此，注意到充分地研究重力测量的理論方面，并對其原理作近代的叙述的时机早已成熟，故作者受莫斯科測量學院的委托編写了此書。

本書主要是想說明重力測量在大地測量方面的应用，并且首先是供天文員和大地測量員用的。其原因是：第一，如上所述，正是在这一方面我們的資料存在着最大的缺陷，就是国外的資料，系統的、相当全面的叙述這個問題也是不很多的；第二，作者對這些問題上是較接近的。至于重力測量在地質学方面的应用，則首先应从地質方面講授，而重力測量利用于勘查的目的，則应与高深的地質分析相联系，以使不致变成开藥方式地叙述作

業技術和一些偶然例子的羅列。

然而，在考慮到大地重力測量方面時，我們又不得不涉及到一些地球物理上的問題，首先就是均衡理論，因為不談均衡理論，就不可能（那怕是最不完全地）說明最複雜最主要的部分之一——重力歸算問題。均衡理論在現代已占居了很重要的地位，如重力和大地測定的計算，若脫離了這個理論就成為不可能。

本書的對象是那些已充分掌握數學知識的讀者，但同時他們又未精通一些比較專門的學識，如引力理論、位理論，特別是球面函數理論。因此，凡是在必須涉及到比較困難且複雜的數學問題的地方，我們不僅引証了數學上的相應篇章，而且也作了必要的推証，而敘述本身在數學計算方面我們則力圖做到尽可能詳盡。關於球面函數，我們則完全沒有採用。當然，這些情況不能不反應在推論和論証的嚴密程度上。

本書的目的不是在闡述重力觀測的技術，故如果在關於擺的觀測方面敘述得詳細些，那麼在扭秤方面就談得少些，而可去參考不久前問世的關於用此儀器進行觀測的書籍，所以我們大部分的注意力是用在重力測量所利用的理論原理上。本書分成兩個几乎是相等的部分，即地球形狀理論和重力測量，當然這是有條件性的。在第一部分內因為是採取論理式的敘述，故所包括的項目雖不是那通常所稱的地球形狀理論，但却與此問題有很近的關係，這就是一些關於引用重力的篇章和重力異常的某一分析；與此相同，在第二部分內包含的是一些與位理論緊密聯繫的項目，這就是用扭秤觀測所得資料之大地判斷。因此，我們要求讀者不要把沒有的含義加到此書的這一部分上來。

我們這本書是在倉促的時間內寫出來的——1931年冬至1932年，故不能不影響到敘述的質量，但待有可能對全部材料再作一次審查和修正後再將本書出版問世，我們却認為是不行的，因為重力測量對於研究蘇聯的領土已開始具有極大的意義，且若推遲本書的出版，雖然它在某種程度上能得出研究地球形狀的幾何法

和物理法之間的必要联系，但势必亦会使我們的大地測量者們与这門学科的隔离过分远了。

鑒于以上所述，作者衷心地恳求讀者以及所有使用本書的人們指出書內的一切毛病，含糊的地方、缺点和錯誤。

第一章 緒論、簡史

§ 1. 課程內容 高等測量學之主要任務是在於確定地球之大小及研究其形狀。通常我們所理解的地球形狀是指與不受潮水，氣壓變化及波濤騷擾之自由開闊海面相重合的重力水準面。為了便於表示起見，德國物理學家理士丁（*J. Listing* 1808—1882）於1873年提議將上述表面稱為**大地水準面**（ $\Gamma_{\text{eou}\theta}$ ）。經過各種理論推算和在多處地方進行實地測量的結果證明了大地水準面原是一個具有非常複雜而形狀不規則之表面（其形狀和物質在地殼內及地球表面上之分布狀況都有關係）。拿這樣一個複雜的大地水準面去作為各種實際工作的基礎（例如作為三角測量計算、地圖投影及大地座標換算之基礎）就顯然會十分不便，且在大多數場合下，由於對大地水準面本身的形狀缺乏充分的研究，這種作法甚至是不可能的。因而，我們在實際工作上就採用一種較為簡單而便於用數學公式來推算的表面，即旋轉橢圓面或扁率不大之所謂橢球面來代替大地水準面。這種表面和大地水準面非常接近，因而在大多數實際的應用上，我們都可方便而成功地用橢球面（注）來代替大地水準面。

為了避免誤會起見，必須指出在歷史的路程上是剛好走着相反的、也就是說從簡單到複雜的道路的。在十七世紀末和十八世紀初，人們發現扁球體較為近似於地球形狀，至於其表面和地球真實形狀相差多遠，則尚未得出明確之結論。當時，橢球面即被應用到大地測量之實際工作中去，被視為高等測量學和制圖學中

（注）在國外的論著中，特別是在德國的論著中，橢球一詞往往就是指一種接近球的曲面，我們在以後所有的論述中，橢球體一詞都是指旋轉橢圓體而言。

之基本曲面。过了一百年后，从处理三角測量时所發生的不符值中人們才确信，地球之真实形狀不能用任何橢球体表示，亦不能用一般数学公式来表示，其原因是由于物質在地壳內部和地球表面分布之不規則性。于是接着就产生关于大地水准面概念的学說，并找到了部分研究該面形狀的各种方法。

于是高等測量学中之这个問題也就划分为二，第一个基本問題是測定某一和大地水准面非常接近的橢球体之諸要素；第二个問題是依据这个橢球体來測定大地水准面各部之位置。高等測量学是利用几何法来解决这两个問題的。因为大地水准面是依借重力方向或所謂鉛垂綫方向來确定的，既如此，就非得在地球表面各点上來确定这个方向不可。借助天文觀測通过恒星关系确定該方向，并将某几个鄰近点上該方向的变化和这些鄰近点間之相互距离作一比較，我們就可确定水准面在不同方向上之曲率，由此，再根据各个点得出大地水准面之相应部份。而这在實質上就是几何法。

地球形狀理論 是用另外一种方法即物理方法来解决这二个問題的。在地球形狀理論中研究的并不是重力方向，而是重力大小。重力大小是用重力施于物体上的加速度來表示的。看来，重力大小也和水准面之形狀有关系，不过，除此而外，它还与地球的內部物質之分布情况有关。在某些已知条件下，我們可避免后者（即地球內部物質之分布情形）之影响而正确地得出重力大小和大地水准面形狀之間的关系。这样如果地球表面上所有各点之重力大小都知道，則大地水准面之形狀也就可以知道了。当然，我們現在离这个理想还比較远。虽然重力的研究工作近来也正在飞速地往前發展着，可是無論在理論上或是实际上，就解決問題來說，它还是差得很远的。不过，目前物理法却至少有一个較之几何法为大之优点。近年来，在海上进行重力測定已告成功了，在科学史上它第一次使精密測量工作（就广泛意义來說）中的一种应用到海洋面上去，它也使我們有可能在71%为水所遮盖的地

球表面上来进行大地水准面形状的研究。

但是，我們这门课程还不仅限于研究大地水准面之形状，虽然这种研究無論在科学上和实际工作上都是一个很重要的問題。我們上面已經說过，重力大小一般地是需取决于两种情况的：即水准面之形状和物質之分布状态。又因为这两种影响在某些已知条件下是可以划分开来的，所以我們就可以提出測定物質在地球内部和地壳附近分布之問題。前者对于地球物理学來說是有很大之意义的，因为它指出地球内部构造的某几个方面，特别是它可以指出从地球表面到地球中心之密度分布規律；后者則对地質学較为重要，因为它闡明了地壳之構造情况，并且它已愈来愈多地被用作为探求矿物的方法（这些矿物本身之密度和周圍的岩石不同，或者这些矿層和其他不同密度之岩石年代是相适应的）。

确定地球整个形状之基本因素之一是地球繞軸的旋轉，由此，复可看出地球旋轉理論和我們这门课程也有密切的联系，在天文学中当研究岁差、章动以及兩極沿地球表面移动等現象时，地球旋轉理論都有着很大的用处。

最后，我們这门课程还可以在另外一門科学上得到应用。我們知道，地球之所以有着現在的这样形状和構造是由于加在它身上各种作用的影响，这样，根据現有已經确定了的数据，可以把我們的理論推广到太陽系的其他天体，首先是其他的行星上。研究这些行星的形状（这种研究工作是在天文学內进行的），即可為我們提供一定的有关行星内部結構及它們过去的形状和历史等之数据。从这里，我們就可以看出这门课程是如此自然的扩展至研究天体的演变和發展，以至于轉用到宇宙学上。

这样一来，我們这门课程竟是与一連串最重要的科学部門和技术部門如天文学、測量学、地球物理学、地質学和矿山勘测等密切地联系着，它可以說是一个樞紐点，在这里，所有上述这些学科都籍着数学、力学和物理学連系着。我国很多大專学校今日之所以要研究重力測量这一門科学其原因亦在于此。由于我們这

門課程所要解決的問題之多样性和各項問題所要達到的目的不同，它的敘述可以是多种多样的。

對於重力測量的某幾個應用方面來說，一些高深的數學問題，如在天體力學和理論物理學的某些專門章節里面碰到的數學問題是重要的。在其他的應用上，用精密儀器進行野外觀測較為重要。我們在以後的論述中，將主要著重於重力測量在測量工作方面的應用，至於在其他方面之應用，則只擇其主要部份順便提及之。

現在再來解釋一下我們這部教程的兩大部份的劃分。所謂地球形狀理論就是指理論力學這部份而言，它研究重力的位能理論。皮蔡奇（Пуцемму）在他那篇論地球形狀的著名論文里是這樣來規定這門科學的內容：1）研究重力水準面以及這些水準面的形狀和行星在空間所產生的引力之關係；2）根據假說研究行星全體或局部液體狀態之均衡形狀和研究其內部密度分布情況之假說。

重力測量學^(註)就狹意來說則是指重力加速度的實驗測定或是重力加速度導函數之實驗測定（借助某些相應之儀器）。這樣，這一部份就恰巧用來補充另一部份。地球形狀理論的用途就是將自己的一些結論應用到重力測量所求得之數據上去。其實，我們這門課程這個稍微冗長和堆砌的名字也可用一個簡單的 *Гравитология*（意即研究重力或關於重力的理論）字來代替，但這個名稱一般都不採用。

下面我們將要介紹一些關於地球形狀理論的發展簡史，至於重力測定和重力一些主要試驗工作的歷史將於本教程之第二部份內述及之。

§ 2. 牛頓（*I. Newton*, 1643—1727）。我們這門科目的歷史是從牛頓這個時代開始的。1672年牛頓的同時代人，法國天文

（註）由拉丁文 *gravitas*（勁）和希臘文 *metron*（量度）而來。

學家理查(J. Richer)為了進行天文觀測，特別是為了確定火星的視差曾到位於南美洲接近赤道的 *Кайенна* 地方作了一次旅行，在這次旅行中，他發現在巴黎對准過的帶擺的天文鐘在 *Кайенна* 却每晝夜慢 $2\frac{1}{2}$ 分，要使它恢復正常狀態則非將擺長縮短 $1\frac{1}{4}$ 之巴黎綫（將近 3 公厘）不可，同樣的現象也為其他許多旅行家們所覺察，但直到牛頓對這問題提出注意以前，這些現象一直都沒有得到應有的重視和正確的解釋。在『自然哲學底數理原理』第三卷內，牛頓將這種現象解釋為重力在赤道附近減少，並由此而得出『地球在赤道上較高』的証論。在同一書內，牛頓並嘗試從理論上來確定地球之形狀。他是從研究兩個與這個問題有着密切關係的力——亦即當地球旋轉時所發生的引力和離心力之作用開始的，他想，如果地球並不旋轉而所有它的微粒都只是單純地相互吸引着的話，則從對稱理論來看它應該成球狀。正由於地球的旋轉於是乎才產生一種與旋轉軸垂直並于赤道上達到最大值的離心力，該種離心力企圖將地球朝赤道方向擴張，木星的形狀（當從望遠鏡內觀察該星時，可清晰地發現它在兩極方向是壓縮的）即可証實該結論。但這裡卻產生了另外一個問題，到底這個旋轉行星（其全部微粒都依牛頓定律相互吸引着）的形狀又是怎樣的呢？這個問題直到現在還沒有得出一個十分滿意的解答，自然它在那個時候就更不能解決了。不過牛頓當時曾推測，當旋轉速度不過分快時，行星外表面之形狀為一扁率不大的橢球面，他還根據下面這樣一些設想來確定該扁率之值。

設想現有兩條水道 *A* 和 *B*；*A* 為自地球中心引向赤道某一點的水道，*B* 為自中心引向極的水道。此時欲使兩水道中之液體處於平衡狀態，則施于地球中心兩水道底部之壓力應該互等。如果地球是不旋轉的話，則兩水道一定是等長的。但若地球旋轉，則將產生一種離心力，該離心力減少了水道 *A* 內液體之重量，但對水道 *B* 內之重量却不發生影響，這是因為對所有位於旋轉軸上之

点来说，离心力皆为零的缘故。

对赤道上之点来说，根据牛顿的计算离心力应为引力之 $q = \frac{1}{288}$ 倍。对地球内部水道 A 所有之点来说，此关系亦真，因为牛顿曾指出过，在地球内部，两相互作用力是依同一规律变化的，即与到地球中心之距离成正比。以离心力来说，这种距离关系对水道 A 是完全正确的，但对引力来说，则只有在等质地球（亦即密度在所有点上都是一致的地球）的情况下才对，这一点，我们以后就会看到。

在这种理想情况下，要求地球之扁率 $\alpha (\alpha = \frac{a-b}{a}, a, b$ 为两水道之长或地球椭球体的两半轴之长)，就需要先求出地球在赤道点上之引力与地球在极点上之引力相差多少，而这个难题又促使我们要去确定椭球体对位于它表面上之点的引力。全面的解决这个问题是作得比较晚的。牛顿当时只是近似地解决了这问题，他利用了地球之扁率是很小的假定，首先令 $\alpha = 0.01$ ，并将该微小值之平方忽略掉，依借数字计算的方法，即找出下面三个关系式：

1) 对半轴为 a, b 之椭球体来说：

$$\frac{\text{椭球体对极点之引力}}{\text{半径为 } b \text{ 之球体引力}} = \frac{1}{1 - \frac{4}{5}\alpha};$$

2) 对位于球体表面之点来说：

$$\frac{\text{半径为 } b \text{ 之球体引力}}{\text{半径为 } a \text{ 之球体引力}} = \frac{b}{a} = \frac{1}{1 + \alpha};$$

3) 对半轴为 a, b 之椭球体来说：

$$\frac{\text{半径为 } a \text{ 之球体引力}}{\text{椭球体对赤道点之引力}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}\alpha}.$$