高教版考试用书

www.eduexam.com.cn

2012年

考研数学历年真题解析与应试对策

（数学三适用）

● 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2012 NIAN KAOYAN SHUXUE LINIAN ZHENTI JIEXI YU YINGSHI DUICE
(SHUXUE 3 SHIYONG)

2012年
考研数学
历年真题解析与应试对策
(数学三适用)

● 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

2012年考研数学历年真题解析与应试对策./全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编.—北京：高等教育出版社，2011.5

数学三适用

ISBN 978-7-04-032093-0

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第054566号

策划编辑 刘 佳　　责任编辑 张耀明　　封面设计 王凌波　　责任校对 杨雪莲

责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×1092 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	9.25	版　　次	2011年5月第1版
字　　数	220 000	印　　次	2011年5月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	20.00元

物 料 号 32093-00

目 录

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：第 1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则

(A) $k=1,c=4$.　(B) $k=1,c=-4$.　(C) $k=3,c=4$.　(D) $k=3,c=-4$.

[　　]

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$.　(B) $-f'(0)$.　(C) $f'(0)$.　(D) 0.

[　　]

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.　(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.　(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

[　　]

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系是

(A) $I<J<K$.　(B) $I<K<J$.　(C) $J<I<K$.　(D) $K<J<I$.

[　　]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第三行得单位矩阵，记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.　(B) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.　(D) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$.

[　　]

(7) 设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

[　　]

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体的简单随机样本，则对应的统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, $T_2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$,

(A) $ET_1>ET_2, DT_1>DT_2$.　　(B) $ET_1>ET_2, DT_1<DT_2$.

(C) $ET_1<ET_2, DT_1>DT_2$.　　(D) $ET_1<ET_2, DT_1<DT_2$.

[　　]

二、填空题：第 9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$ ________.

(10) 设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=$ ________.

(11) 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点(0,0)处的切线方程为________.

(12) 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 中各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$ ________.

三、解答题：第 15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

(16)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f[(x+y),f(x,y)]$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}$.

(17)（本题满分 10 分）

求 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(18)(本题满分 10 分)

证明 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两实根.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数,$f(0)=1$,且 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t} f(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x,0\leqslant x\leqslant t\}$ $(0<t\leqslant 1)$,求 $f(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表出.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(21)(本题满分 11 分)

$\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,即 $r(\boldsymbol{A})=2$,且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

求:(Ⅰ)$\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 11 分)

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	−1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$P\{X^2=Y^2\}=1$.

求:(Ⅰ)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)$Z=XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)X,Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布,其中 G 是由 $x-y=0,x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的区域.

(Ⅰ)求边缘概率密度 $f_X(x)$;

(Ⅱ)求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题:第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合试题要求.

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^{x}\right]=1$,则 a 等于

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[ ]

(2) 设 y_1,y_2是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$是该方程的解,$\lambda y_1-\mu y_2$是该方程对应的齐次方程的解,则

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$. (B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$. (D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.

[ ]

(3) 设函数$f(x),g(x)$具有二阶导数,且 $g''(x)<0$. 若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值,则$f(g(x))$在 x_0取极大值的一个充分条件是

(A) $f'(a)<0$. (B) $f'(a)>0$.

(C) $f''(a)<0$. (D) $f''(a)>0$.

[ ]

(4) 设$f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时有

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$. (B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$. (D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

[ ]

(5) 设向量组 Ⅰ $:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组 Ⅱ $:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示. 下列命题正确的是

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关,则 $r\leqslant s$. (B) 若向量组 Ⅰ 线性相关,则 $r>s$.

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关,则 $r\leqslant s$. (D) 若向量组 Ⅱ 线性相关,则 $r>s$.

[ ]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

[　　]

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1, \\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$

(A) 0.　(B) $\frac{1}{2}$.　(C) $\frac{1}{2}-e^{-1}$.　(D) $1-e^{-1}$.

[　　]

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\leqslant 0, \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases} \quad (a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足

(A) $2a+3b=4$.　(B) $3a+2b=4$.　(C) $a+b=1$.　(D) $a+b=2$.

[　　]

二、填空题：第 9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2}dt=\int_0^x x\sin t^2 dt$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________.

(10) 设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ $(e\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________.

(11) 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$ ________.

(12) 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本. 记统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $ET=$ ________.

三、解答题：第 15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(16)(本题满分10分)

计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$由曲线$x=\sqrt{1+y^2}$与直线$x+\sqrt{2}y=0$及$x-\sqrt{2}y=0$围成.

(17)(本题满分10分)

求函数$u=xy+2yz$在约束条件$x^2+y^2+z^2=10$下的最大值和最小值.

(18)(本题满分10分)

(Ⅰ)比较$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$与$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$的大小,说明理由;

(Ⅱ)记$u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(19)(本题满分10分)

设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内存在二阶导数,且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3).$$

(Ⅰ)证明存在$\eta\in(0,2)$,使$f(\eta)=f(0)$;

(Ⅱ)证明存在$\xi\in(0,3)$,使$f''(\xi)=0$.

(20)(本题满分11分)

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$存在2个不同的解,

(Ⅰ)求λ,a;

(Ⅱ)求方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解.

(21)(本题满分11分)

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$,正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$为对角矩阵. 若$\boldsymbol{Q}$的第1列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,求$a,\boldsymbol{Q}$.

(22)(本题满分11分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求常数A及条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

(23)(本题满分11分)

箱中装有6个球,其中红、白、黑球的个数分别为1,2,3个. 现从箱中随机地取出2个球,记X为取出的红球个数,Y为取出的白球个数.

(Ⅰ)求随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)求$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：第 1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合试题要求.

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 无穷多个.

[　　]

(2) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则

(A) $a=1, b=-\dfrac{1}{6}$.　　(B) $a=1, b=\dfrac{1}{6}$.

(C) $a=-1, b=-\dfrac{1}{6}$.　　(D) $a=-1, b=\dfrac{1}{6}$.

[　　]

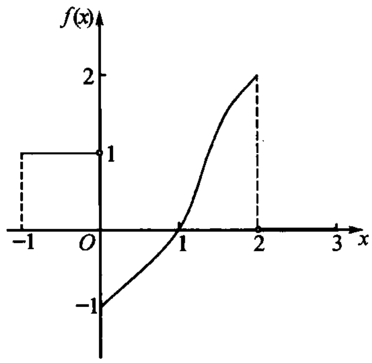
(3) 使不等式 $\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是

(A) $(0,1)$.　　(B) $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

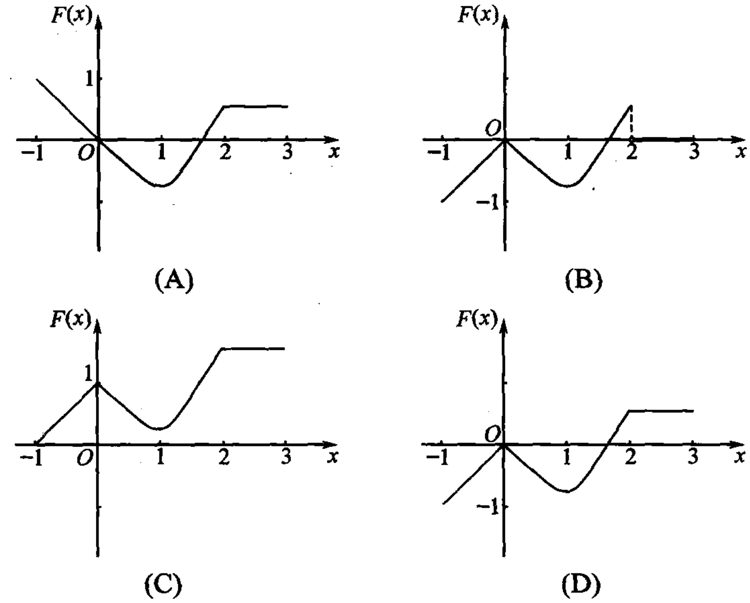
(C) $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.　　(D) $(\pi,+\infty)$.

[　　]

(4) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为



[　　]

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为

(A) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

[　　]

(7) 设事件 A 与事件 B 互不相容，则

(A) $P(\bar{A}\bar{B})=0$.　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(A)=1-P(B)$.　　(D) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$.

[　　]

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

[　　]

二、填空题：第 9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________.

(10) 设 $z=(x+e^y)^x$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$ ________.

(11) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为________.

(12) 设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$，其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$，则当需求量为 10 000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加________元.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm T}$. 若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$ ________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\bar X$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T=\bar X-S^2$，则 $ET=$ ________.

三、解答题：第 15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 9 分）

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

(16)（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)\mathrm dx\ (x>0)$.

(17)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)\,\mathrm dx\mathrm dy$，其中 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant2,y\geqslant x\}$.

(18)（本题满分 11 分）

(Ⅰ) 证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ) 证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分 10 分)

设曲线 $y=f(x)$,其中 $f(x)$ 是可导函数,且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍,求该曲线的方程.

(20)(本题满分 11 分)

设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求满足 $A\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1,A^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,求 a 的值.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<y<x,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$;

(Ⅱ)求条件概率 $P\{X\leqslant 1|Y\leqslant 1\}$.

(23)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次,每次取一个球. 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(Ⅰ)求 $P\{X=1|Z=0\}$;

(Ⅱ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

2008 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题:第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

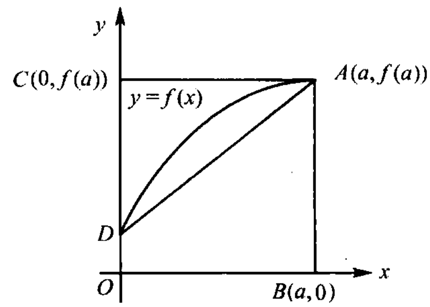
(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}$ 的

(A) 跳跃间断点. (B) 可去间断点.

(C) 无穷间断点. (D) 振荡间断点.

[ ]

(2) 如图,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数,则定积分 $\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 等于



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 的面积.

(D) 三角形 ACD 的面积.

[ ]

(3) 已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$,则

(A) $f_x'(0,0)$,$f_y'(0,0)$ 都存在.

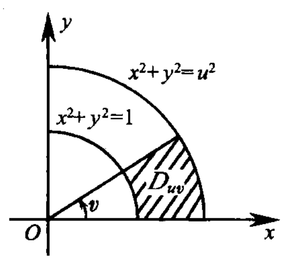
(B) $f_x'(0,0)$ 不存在,$f_y'(0,0)$ 存在.

(C) $f_x'(0,0)$ 存在,$f_y'(0,0)$ 不存在.

(D) $f_x'(0,0)$,$f_y'(0,0)$ 都不存在.

[ ]

(4) 设函数 f 连续. 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分,则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$



(A) $vf(u^2)$. (B) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$.

(C) $vf(u)$. (D) $\dfrac{v}{u}f(u)$.

[ ]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

[ ]

(6) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

[ ]

(7)设随机变量 X,Y 独立同分布,且 X 的分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

(A) $F^2(x)$.　　(B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-[1-F(x)]^2$.　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

[ ]

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(1,4)$,且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$.　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$.　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

[ ]

二、填空题:第 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $c=$________.

(10) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$,则 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=$________.

(11) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则 $\iint\limits_D (x^2-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

(12) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$________.

(13) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,2,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则 $|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$________.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P\{X=EX^2\}=$________.

三、解答题:第 15 ~ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

（16）（本题满分 10 分）

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq-1$.

（Ⅰ）求 $\mathrm{d}z$;

（Ⅱ）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

（17）（本题满分 11 分）

计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

（18）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

（Ⅰ）证明对任意的实数 t，有 $\int_t^{t+2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$;

（Ⅱ）证明 $G(x)=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

（19）（本题满分 10 分）

设银行存款的年利率为 $r=0.05$，并依年复利计算. 某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元，…，第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元，并能按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元？

（20）（本题满分 12 分）

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix}_{n\times n},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

（Ⅱ）当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1;

（Ⅲ）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

（21）（本题满分 10 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}\ (i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.