



普通高等教育机械类国家级特色专业系列规划教材



工程流体力学 (下册)

王保国 蒋洪德 马晖扬 司 鹄 编著



科学出版社

普通高等教育机械类国家级特色专业系列规划教材

工程流体力学

(下册)

王保国 蒋洪德 编著
马晖扬 司 鹤

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是面向理工类专业本科生的一部内容齐全、涵盖面广、深入浅出、构思巧妙的《工程流体力学》教材,由北京理工大学、清华大学、中国科学技术大学和重庆大学的四位教授共同编著。全书分为上、下两册,共五篇 18 章。上册包括前三篇,主要讲述流体力学的基本方程与重要定理、流体的不可压缩流动、可压缩无黏流体的流动;下册包括第四篇和第五篇,主要讲述流体力学的工程应用、计算流体力学基础。每一篇相对独立完整,授课教师可根据自身专业特点及学时选讲部分篇章或全部内容。* 号章节为本科生拓展内容。

本书可作为普通高等院校理工类专业本科生的教材,也可作为学生考研复习的辅导书,还可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程流体力学.下册/王保国等编著. 北京:科学出版社,2011
普通高等教育机械类国家级特色专业系列规划教材
ISBN 978-7-03-032171-8

I. ①工… II. ①王… III. ①工程力学:流体力学-高等学校-教材
IV. ①TB126

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 171806 号

责任编辑:毛 莹 杨 然 / 责任校对:宋玲玲
责任印制:张克忠 / 封面设计:迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 7 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2011 年 7 月第一次印刷 印张:13 3/4

印数:1—3 000 字数:344 000

定价:26.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书是由北京理工大学、清华大学、中国科学技术大学和重庆大学四位长期处于教学与科研第一线的教授共同编著的面向机械类、动力能源工程类和航空航天类本科生的《工程流体力学》教材。本书的第一作者王保国教授是北京市教学名师,他在中国科学院工作过 16 年,两次荣获中国科学院重大成果科技进步奖,曾先后在清华大学力学系和北京理工大学宇航学院任教授、博士生导师,长期从事流体力学、空气动力学和高超声速气动热力学方面的教学与科学研究工作,多次荣获清华大学教学优秀奖,并著有《流体力学》、《空气动力学基础》、《气体动力学》、《高超声速气动热力学》、《叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法》以及《稀薄气体动力学计算》等教材与专著;第二作者蒋洪德教授是中国工程院院士,工程热物理学家,清华大学热能工程系教授、博士生导师,他在叶轮机械流动的机理研究和数值分析方面具有非常深厚的理论功底,为我国汽轮机的气动热力设计以及汽轮机的更新改造作出了重大贡献;第三作者马晖扬教授是中国科学技术大学流体力学教授,他编著的《流体力学》教材和《涡动力学引论》专著深得学子们的喜爱;第四作者司鸽是重庆大学的教授,她在流固耦合以及安全工程方面颇有建树。四位作者密切合作、深入浅出地写出这部面向理工类本科生的《工程流体力学》基础性教材,从某种意义上可认为是 Prandtl 的 *Essentials of Fluid Dynamics* 一书的继续与发展,建议学子们不妨一读。

本书分五篇 18 章。第一篇(第 1~6 章)为流体力学的基本方程与重要定理,其中包括了静力学、运动学、动力学的主要基本方程及一些重要定理,另外还将量纲分析与相似原理作为一章进行了详细讨论;第二篇(第 7~10 章)为流体的不可压缩流动,其中包括无黏流、层流以及湍流流动;第三篇(第 11、12 章)为可压缩无黏流体的流动,其中主要包括一维与二维流动;第四篇(第 13~17 章)为流体力学的工程应用,其中包括内流、外流、气体射流与扩散、翼型与叶栅绕流、多相流以及非牛顿流体力学等;第五篇(第 18 章)为计算流体力学基础,该篇虽仅有一章,却概括了计算流体力学的最基本内容。每一篇都相对独立完整,便于各院校以及各专业教师根据自身专业特点及学时选择其部分篇章或全部内容进行讲解。本书主要具有如下三点特色:①内容齐全,涵盖面广,注重基础内容和基本概念的讲述,强调物理直观;②将当前最新科研成果深入浅出地编写入书,并抽取了其中最基本的部分编写成习题,更进一步辅助学生们掌握相关概念,深化理解;③十分注重介绍华人科学家(如王竹溪、李政道、周培源、钱学森、钱伟长、郭永怀、冯元桢、吴仲华、谈镐生、王承书、陆士嘉、卞荫贵、刘高联、童秉纲、罗时钧、柏实义、陈懋章、陶文铨等)的学术贡献,激励学子们奋发向上。

本书反映了集体的智慧和心血,凝聚着众多教师们多年来教学与科研的经验与成果,同时也广泛继承与吸收了国内外同领域中的精华与营养,因此具有一定的代表性和通用性。

四位作者衷心地向流体力学界的老前辈、尤其是书中所提到的 18 位著名物理学家和流体力学家致以诚挚的感谢!向书中参考文献里所列出的作者以及历届讲授过这门课的老师与同仁表示感谢。

虽然书中的主要内容在多所高校的教学中多次讲授过而且反响较好,但由于作者水平有限,书中仍可能存在疏漏与不妥之处,敬请广大读者及专家批评指教。E-mail: wjmsef@yahoo. cn。

作 者

2011 年 7 月

目 录

前言

第四篇 流体力学的工程应用

第 13 章 内流流动的计算与分析	1
13.1 绝对坐标系与相对坐标系下广义一维黏性流动的基本方程组	1
13.2 影响一维定常流动的几个制约因素	9
13.3 Laval 喷管的几种流动状态	14
13.4 等截面一维定常绝热摩擦管流	23
13.5 等截面无摩擦一维定常加热(或冷却)管流	31
13.6 变流量管流	37
13.7 超声速进气道的气流流动及激波系分析	40
13.8 圆管中层流与湍流流动的沿程损失分析与计算	43
习题	49
第 14 章 气体射流与扩散	51
14.1 湍流射流的基本方程与可压缩湍流模型	51
14.2 二维自由湍流射流	60
14.3 二维复合自由湍动射流	62
14.4 Fick 定律以及扩散方程	66
14.5 层流与湍流的浓度边界层方程	69
14.6 动量、热量与质量传递之间的类比关系式	71
习题	74
第 15 章 绕翼型与叶栅的流动	77
15.1 绕翼型的不可压缩无黏流动	77
15.2 绕机翼与翼型的可压缩无黏流动	85
* 15.3 跨声速翼型与机翼的气动特性	92
15.4 压气机与涡轮的基元级分析	101
15.5 叶栅绕流以及吴仲华流面理论	107
* 15.6 压气机与涡轮的气动特性	121
习题	124
第 16 章 多相流体力学基础	130
16.1 两相混合物的热力学特性与平衡声速	130
16.2 颗粒相的一些重要特性	134
16.3 两相流基本方程	135

16.4	一维两相平衡喷管流动	139
16.5	气、固两相气力输送流动	142
16.6	气液两相管内流动	148
	习题	153
第 17 章	非牛顿流体的流动	155
17.1	非牛顿流体的几个典型现象	155
17.2	非牛顿流体力学的基本方程组	157
17.3	广义牛顿流体的本构方程	158
17.4	线性黏弹性 Maxwell 流体的本构方程	160
* 17.5	非线性黏弹性 Oldroyd-B 流体的本构方程	162
17.6	测黏流材料函数测定方法的概述	164
	习题	166
	参考文献	169

第五篇 计算流体力学基础

第 18 章	计算流体力学中的数值计算方法及 CFD 常用软件	171
18.1	Navier-Stokes 方程组	171
18.2	有限差分方法中的重要基本概念与定理	178
18.3	发展方程的有限差分方法	181
18.4	有限体积法与有限单元法	190
18.5	结构与非结构网格生成技术	196
18.6	CFD 中一些常用软件的概述	203
	习题	204
	参考文献	208
	部分习题参考答案	210

第四篇 流体力学的工程应用

本篇共有 5 章,主要讲述流体力学在内流(如管道流动以及叶轮机械内部的流动)、外流(如机翼绕流)、自由射流与湍流扩散、多相流以及非牛顿流体力学等方面的工程应用。由于涉及多方面工程实际问题,本篇在选材的处理上像文献[1]~[12]那样,仍然特别注重讲清基础、讲清原理、讲清算法的原则。另外,在本篇中经常大量出现 Mach 数与声速同时出现的现象,为避免读者造成误会,因此仍采用符号 a 与 M 分别表示声速与 Mach 数。

第 13 章 内流流动的计算与分析

这一章不同于一般教材中管道流动的素材,而是引入了开口体系的概念,在绝对坐标与相对坐标两种坐标系下讨论广义一维黏性流动问题,这使得黏性力的作用与黏性项的物理意义十分清晰。本章详细讨论 4 种制约因素对一维流动的影响,讨论摩擦管流、加热管流、变流量管流以及 Laval 喷管的几种流动状态。本章还特别讨论超声速进气道的气流流动以及圆管中层流与湍流的阻力与损失。

13.1 绝对坐标系与相对坐标系下广义一维黏性流动的基本方程组

13.1.1 绝对坐标系下气体广义一维黏性流动的基本方程组

1. 连续方程

在静止坐标 l 下,考虑在 $t=0$ 时长度为 δl 、体积为 $\delta\Omega$ 、质量为 δm 的微小封闭体系(控制体),如图 13.1 所示,由质量守恒定律得

$$\frac{d}{dt}(\rho A dl) = 0 \quad (13.1.1)$$

式中, ρ 与 A 分别为密度与截面积。注意到

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dl}{dt} = V \frac{\partial A}{\partial l} \\ \frac{d(dl)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} dl \\ \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial l} \end{cases} \quad (13.1.2)$$

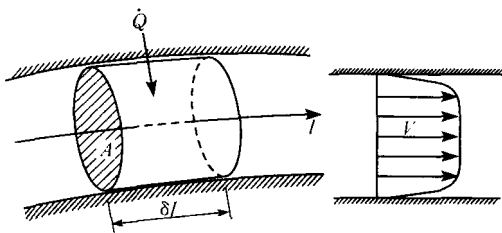


图 13.1 曲线坐标 l 与微小封闭体系

于是式(13.1.1)变为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial(\rho V A)}{\partial l} = 0 \quad (13.1.3)$$

如果取一个大的开口体系,如图 13.2 所示,在任意瞬时将式(13.1.3)应用到这个大开口体系中的一个微元体上,然后对 l 积分得到

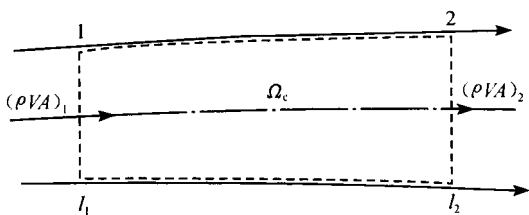


图 13.2 大开口体系

对于定常流，则式(13.1.3)变为

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial l} = 0 \quad (13.1.6)$$

或

$$\rho VA = \text{const} \quad (13.1.7)$$

将式(13.1.7)取对数再求导数得

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (13.1.8)$$

2. 动量方程

取微元体如图 13.3 所示。首先分析作用在微元体上的外力。假定 I 截面面积为 \$A\$，压强为 \$p\$，气流流动的方向与 \$l\$ 方向一致，作用在 I 截面的总压为 \$pA\$；令 II 截面的面积为 \$A+dA\$，压强为 \$p+dp\$，由于 \$p\$ 与 \$A\$ 都是 \$l\$ 与 \$t\$ 的函数，所以 II 截面的总压力为 \$-\left[pA + \frac{\partial(pA)}{\partial l}\delta l\right]\$，此处取负号是由于作用在 II 截面上总压力的方向与 \$l\$ 的正方向相反。壁面作用在微元体上的力除了压力之外还有摩擦应力 \$\tau_w\$；令 \$\tau_w\$ 所作用的壁面环形面积为 \$\delta A_w\$（常称为湿周面积），流道扩张角为 \$\alpha\$（在一维近似下可以认为 \$\alpha \approx 0\$），因此壁面摩擦力在 \$l\$ 方向的分量为

$$-\tau_w(\delta A_w)\cos\alpha \approx -\tau_w\delta A_w \text{ (对质量为 } \delta m \text{ 而言)}$$

由水力直径 \$D_e\$ 的定义

$$D_e = 4 \times \frac{\text{流道截面积}}{\text{湿周}} \quad (13.1.9)$$

对所讨论的问题，湿周 \$= \frac{\delta A_w}{\delta l}\$，流道截面积为 \$A\$，于是 \$D_e = \frac{4A\delta l}{\delta A_w}\$。利用上面结果，于是壁面摩擦力在 \$l\$ 方向的分量可改写为（对于质量为 \$\delta m = \rho A \delta l\$ 的微小封闭体系而言）

$$-\tau_w(\delta A_w)\cos\alpha = -\frac{4\tau_w A \delta l}{D_e}$$

除此之外，沿 \$l\$ 方向还有壁面 \$\delta A_w\$ 作用在微元体上的力 \$p(\delta A_w)\sin\alpha\$，注意到 \$(\delta A_w)\sin\alpha = \delta A\$，故

$$p(\delta A_w)\sin\alpha = p\delta A = p \frac{\delta A}{\delta l} dl$$

在这些外力的作用下，使气体沿流向 \$l\$ 产生了 \$\left(\frac{dV}{dt}\right)_l\$ 的加速度，这里

$$\int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial(\rho VA)}{\partial l} dl + \int_{l_1}^{l_2} \left(A \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dl = 0 \quad (13.1.4)$$

或者

$$(\rho VA)_2 - (\rho VA)_1 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_c} \rho d\Omega = 0 \quad (13.1.5)$$

式中，\$\Omega_c\$ 为大开口体系。

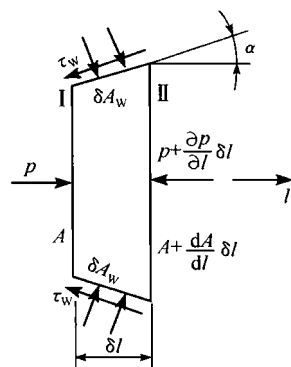


图 13.3 微小封闭体系的外力

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_l = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \frac{\mathbf{V}}{V} = \frac{dV}{dt} \quad (13.1.10)$$

于是沿流向写牛顿第二定律便可得到沿流向的运动微分方程(对单位质量的气体而言)

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} - \frac{4\tau_w}{\rho D_e} \quad (13.1.11)$$

注意到

$$\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{1}{V} \left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

则式(13.1.11)又可改写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) - V \frac{4\tau_w}{\rho D_e} \quad (13.1.12)$$

注意使用连续方程(13.1.3),则式(13.1.12)可变为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\frac{\partial(pAV)}{\rho A \partial l} + p \frac{d\rho^{-1}}{dt} - V \frac{4\tau_w}{\rho D_e} \quad (13.1.13)$$

显然,式(13.1.11)与式(13.1.12)实质上是同一个方程,因为后者可由前者两边乘 V 后得到。

3. 能量方程

由热力学第一定律

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{L} \quad (13.1.14)$$

式中, $\dot{Q}$ 和 $\dot{L}$ 分别代表单位时间外界对于上述体系的传热率和该体系对外界的做功率,而 dE/dt 则表示该体系的内能对时间的导数。应强调的是:在具体表达式(13.1.14)中的三项时,不同的观察者(如观察者静止或者观察者随气体运动时)所推导出的气体做功率、内能变化率是不同的。

但是无论观察者是静止还是随着体系一同运动, $\dot{Q}$ 总是由于所取体系的温度和外界温度之间的差别而导致的传热率,而体系中内能的增加率和体系边界上力对外界的做功率却是随着观察者位置的不同而不同,下面对此作些说明。

1) 观察者静止不动

在一般情况下,管道是静止的。对于一个静止的观察者来讲,他所看到的管壁施加于气体的摩擦力 $\tau_w \delta A_w$ 并没有对气体做功;而体系两头截面上的压力则推着外界气体移动,在一维流动下这个做功率是

$$\dot{L} = \frac{\partial(pAV)}{\partial l} \delta l \quad (13.1.15)$$

注意到在一维沿流向的曲线 l 下有

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial l} \quad (13.1.16)$$

利用连续方程(13.1.3)后,则式(3.1.15)可写为

$$\frac{\dot{L}}{\delta m} = \frac{d\left(\frac{p}{\rho}\right)}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (13.1.17)$$

式中, δm 代表所取微小封闭体系的质量。对于静止的观察者来讲,气体内能的增加率是

$$\frac{1}{\delta m} \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \quad (13.1.18)$$

式中, e 是气体热力学狭义内能。于是将式(13.1.17)与式(13.1.18)代入式(13.1.14)并注意到总焓的定义, 得

$$\frac{d\left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right)}{dt} = \frac{\dot{Q}}{\delta m} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dH}{dt} \quad (13.1.19)$$

式中, H 为总焓, 其定义式为

$$H = h + \frac{V^2}{2} = e + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \quad (13.1.20)$$

式(13.1.19)是能量方程的一种表达形式。显然, 如果流动是绝热与定常的, 则滞止焓(又称总焓) H 在流动中保持不变。如果将式(13.1.13)代入式(13.1.15), 再将它与式(13.1.18)一起代入式(13.1.14)中, 即得

$$\frac{de}{dt} = \frac{\dot{Q}}{\delta m} - \left[p \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} - \frac{4\tau_w V}{\rho D_e} \right] \quad (13.1.21)$$

这是能量方程的另一种表达形式。

2) 观察者随气体一起运动

取相对坐标 ξ 随气体以及观察者一起运动。在这个观点下, 观察者除了看到气体做膨胀功之外, 还看到外界摩擦力以 V 的速度推着壁面接触的气体向后移动, 所以

$$\frac{\dot{L}_\xi}{\delta m} = p \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} - \frac{4\tau_w V}{\rho D_e} \quad (13.1.22)$$

这时内能的变化率却只是

$$\frac{1}{\delta m} \frac{dE_\xi}{dt} = \frac{de}{dt} \quad (13.1.23)$$

于是将式(13.1.22)与式(13.1.23)代入式(13.1.14)便可得到式(13.1.21)。因此, 式(13.1.19)对于跟随气体一起运动的观察者来说其物理意义非常明确, 即当一个观察者随着气体一起移动时, 他能看到气体做膨胀功和管壁的摩擦力对气体做功, 却看不到气体动能的变化。

4. 热力学第二定律

热力学第二定律的基本形式是

$$T \frac{ds}{dt} \geq \frac{\dot{Q}}{\delta m} \quad (13.1.24)$$

注意到 Gibbs 热力学恒等式

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} \quad (13.1.25)$$

将式(13.1.25)代入式(13.1.21)中便得

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{Q}}{\delta m} + \frac{4\tau_w V}{\rho D_e} \quad (13.1.26)$$

13.1.2 在相对坐标系下气体的广义一维流动

设叶轮以等角速度 ω 绕 z 轴旋转, 叶片通道中心线 ξ 也随着旋转, 如图 13.4 所示。假设观

察者位于以另一个角速度 ω_0 绕 z 轴转动的参考系中。显然,当 $\omega_0=0$ 时的观察者为绝对观察者;当 $\omega_0=\omega$ 时的观察者为相对观察者。当观察者随同流体一起运动时则称随动观察者。

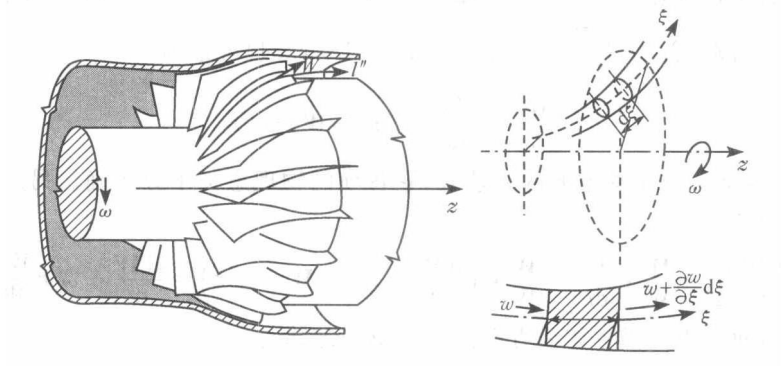


图 13.4 旋转的广义一维流道和微元封闭体系

1. 连续方程

取以角速度 ω 转动的相对坐标 ξ ,取 W 为相对速度,于是采用与绝对坐标系完全类似的推导方法可得到连续方程为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial(WA)}{A\partial\xi} = 0 \tag{13.1.27}$$

或者

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial(\rho WA)}{\partial\xi} = 0 \tag{13.1.28}$$

2. 动量方程

为了得到气体的绝对速度 V 与相对速度 W 以及绝对加速度与相对加速度之间的关系,今考虑绝对圆柱坐标系 (r,θ,z) 与相对圆柱坐标系 (r,φ,z) 存在着如下关系^[13,14]

$$\theta = \varphi + \omega t \tag{13.1.29}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \omega \tag{13.1.30}$$

$$V_r = \frac{dr}{dt} = W_r \tag{13.1.31}$$

$$V_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = W_\varphi + \omega r \tag{13.1.32}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = W_z \tag{13.1.33}$$

$$\frac{d_a V}{dt} = \frac{d_R W}{dt} + 2\omega \times W - \omega^2 r \tag{13.1.34}$$

$$V = W + \omega \times r \tag{13.1.35}$$

以及

$$\frac{d_a f}{dt} = \frac{d_R f}{dt} \tag{13.1.36}$$

$$\frac{d_a \mathbf{B}}{dt} = \frac{d_R \mathbf{B}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \quad (13.1.37)$$

式中, f 与 $\mathbf{B}$ 分别代表任意标量与任意矢量。在本节中为书写简洁, 在不会产生误会的情况下将 $\frac{d_a \mathbf{V}}{dt}$ 中的下注脚 a 省略, 并将 $\frac{d_R \mathbf{W}}{dt}$ 记为 $\frac{d' \mathbf{W}}{dt}$, 于是式(13.1.34)可记为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d' \mathbf{W}}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} - \omega^2 \mathbf{r} \quad (13.1.38)$$

显然, 式(13.1.38)是一个非常重要的表达式, 它各项的物理意义十分明确。另外, 绝对加速度在 ξ 切线方向的分量为

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_\xi = \frac{\mathbf{W}}{W} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mathbf{W}}{W} \cdot \left(\frac{d' \mathbf{W}}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} - \omega^2 \mathbf{r}\right) = \frac{d' \mathbf{W}}{dt} - \omega^2 \mathbf{r} \frac{W_r}{W} \quad (13.1.39)$$

使用式(13.1.39)便可得出沿 ξ 切线方向的牛顿第二定律是

$$\frac{d' \mathbf{W}}{dt} - \omega^2 \mathbf{r} \frac{d' r}{d\xi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{4\tau_w}{\rho D_e} = \frac{d' \mathbf{W}}{dt} - \omega^2 \mathbf{r} \frac{W_r}{W} \quad (13.1.40)$$

如果将式(13.1.40)两边乘 W 并使用连续方程便可得

$$-\frac{d'}{dt} \left(\frac{W^2 - \omega^2 r^2}{2} \right) - \frac{4\tau_w W}{\rho D_e} = \frac{W}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d' p}{dt} - \frac{\partial' p}{\partial t} \right) \quad (13.1.41)$$

式中, $\frac{\partial'}{\partial t}$ 代表 $\frac{\partial_R}{\partial t}$ 。

3. 能量方程

1) 观察者和坐标系 ξ (也可以是叶片) 一起以等 ω 的角速度转动

此时, 观察者看到的气体的加速度只是 $d\mathbf{W}/dt$, 于是式(13.1.40)改写为

$$\frac{d' \mathbf{W}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{4\tau_w}{\rho D_e} + \omega^2 \mathbf{r} \frac{W_r}{W} \quad (13.1.42)$$

式(13.1.42)右边第三项为“惯性力”项。当这个观察者去写气体的做功率时, 除了气体压力的做功率外还要加上“哥氏惯性力”的做功率, 即

$$\frac{\dot{L}}{\delta m} = \frac{1}{\rho A} \frac{\partial(pAW)}{\partial \xi} - \omega^2 r W_r = \frac{d' \left(\frac{p}{\rho} \right)}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial' p}{\partial t} - \frac{d'}{dt} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} \right) \quad (13.1.43)$$

这时内能增加率为

$$\frac{1}{\delta m} \frac{d'E}{dt} = \frac{d'}{dt} \left(e + \frac{W^2}{2} \right) \quad (13.1.44)$$

将上边两式代入式(13.1.14)得

$$\frac{d'I}{dt} = \frac{d' \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{W^2 - \omega^2 r^2}{2} \right)}{dt} = \frac{\dot{Q}}{\delta m} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial' p}{\partial t} \quad (13.1.45)$$

式中, I 为转子焓。

从式(13.1.45)可以看出: 对于相对观察者而言, 管壁是静止的, 因此管壁摩擦力并不对气体做功。

2) 对于随动观察者

这时观察者将看不到微元体的整体运动, 只看到它的体积和形状的变化, 于是气体所做的膨

胀功率为 $p \frac{d'(\frac{1}{\rho})}{dt}$, 壁面摩擦力对气体的做功率为 $\frac{4\tau_w}{\rho D_e} W$; 又由于观察者随微元体一起运动, 所以它所看到的能量变化为 $\frac{d'e}{dt}$; 于是, 将它们代入式(13. 1. 14)便得到

$$\frac{d'e}{dt} = \frac{\dot{Q}}{\delta m} - \left[p \frac{d'(\frac{1}{\rho})}{dt} - \frac{4\tau_w}{\rho D_e} W \right] \quad (3. 1. 46)$$

4. 热力学第二定律

借助于 Gibbs 热力学关系式(13. 1. 25), 则式(13. 1. 46)又可改写为

$$T \frac{d's}{dt} = \frac{\dot{Q}}{\delta m} + \frac{4\tau_w}{\rho D_e} W \quad (13. 1. 47)$$

或者

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{Q}}{\delta m} + \frac{4\tau_w}{\rho D_e} W \quad (13. 1. 48)$$

13. 1. 3 绝对坐标系与相对坐标系下一维定常流动的基本关系式

1. 绝对坐标系下广义一维定常流动的基本方程

对于绝对运动是定常流动的一维流, 这时连续方程(13. 1. 3)、动量方程(13. 1. 11)和能量方程(13. 1. 19)分别被简化为

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial l} = 0 \quad (13. 1. 49)$$

$$V \frac{\partial V}{\partial l} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} - \frac{4\tau_w}{\rho D_e} \quad (13. 1. 50)$$

$$V \frac{\partial H}{\partial l} = \frac{\dot{Q}}{\delta m} = \dot{q} \quad (13. 1. 51)$$

式中, H 为滞止焓(又称总焓); $\dot{q}$ 代表外界对每单位质量气体的传热量; $\frac{\partial}{\partial l}$ 表示沿绝对流线求偏导数。

2. 相对坐标系下广义一维定常流动的基本方程

所谓相对定常流动是指在相对坐标系中流动是定常的。在这个假定下, 连续方程(13. 1. 28)、动量方程(运动方程)(13. 1. 40)与能量方程(13. 1. 45)被退化为

$$\frac{\partial(\rho WA)}{\partial \xi} = 0 \quad (13. 1. 52)$$

$$W \frac{\partial W}{\partial \xi} - \omega^2 r \frac{W_r}{W} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{4\tau_w}{\rho D_e} \quad (13. 1. 53)$$

$$W \frac{\partial I}{\partial \xi} = \frac{\dot{Q}}{\delta m} = \dot{q} \quad (13. 1. 54)$$

式中, I 为转子焓; $\dot{q}$ 代表外界对单位质量气体的传热量; $\frac{\partial}{\partial \xi}$ 表示沿相对流线求偏导。

3. 绝对坐标系下绝热流和等熵流的基本关系式

1) 能量方程及特征常数

下面以绝对运动为例,简单汇总一下 11.4 节所得到的一维定常绝热流动中的一些基本关系。在这种假定下,能量方程(13.1.51)被进一步简化为

$$\frac{\partial H}{\partial l} = 0 \quad (13.1.55)$$

或者

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h + \frac{V^2}{2} = \text{const} \quad (13.1.56)$$

对于量热完全气体,式(13.1.56)又可写为下面几种形式

$$\begin{cases} C_p T + \frac{V^2}{2} = \text{const} \\ \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \text{const} \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const} \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT + \frac{V^2}{2} = \text{const} \end{cases} \quad (13.1.57)$$

式(13.1.57)右端的常数可用某个参考状态的物理量来表示,并将这个物理量称为特征常数。常用的参考状态有三种:①速度为零的滞止状态(参数的下标以“0”表示);②温度达到零度(开氏温度)时的最大速度($V_{\max}$)状态;③流速等于当地声速时的临界参数状态(参数的下标以“*”表示)。气体一维定常流动的任何一个状态都可以假想通过等熵过程转变为对应的参考状态,用这些特征常数来表示该状态下气流的能量,而不管实际流动过程是否等熵。若用特征常数表达式(13.1.57)右端项时可写为

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0 = C_p T_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{1}{\gamma - 1} a_0^2 \quad (13.1.58)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{V_{\max}^2}{2} = \frac{1}{\gamma - 1} a_0^2 \quad (13.1.59)$$

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{a_*^2}{2} = \frac{1}{\gamma - 1} a_0^2 \quad (13.1.60)$$

式中, h_0 、 T_0 和 p_0 分别称为总焓、总温和总压,以区别于静焓 h 、静温 T 和静压 p ; $V_{\max}$ 、 a_0 与 a_* 分别代表最大速度、滞止声速与临界声速。另外,常引入两个量纲数为 1 的数 M 与 λ 去衡量气流速度的特征,它们间的关系是

$$\begin{cases} M^2 = \frac{\lambda^2}{1 - \frac{\gamma - 1}{2}(\lambda^2 - 1)} \\ \lambda^2 = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}(M^2 - 1)} \end{cases} \quad (13.1.61)$$

2) 等熵流的基本关系及气体动力学函数

对于热完全气体,熵增可表示为

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (13.1.62)$$

因此,对于量热完全气体,积分式(13.1.62)并注意使用 Clapeyron 方程,则最后变为

$$\begin{aligned} S &= C_v \ln T v^{\gamma-1} + \text{const} \\ &= C_p \ln \frac{T}{p^{(\gamma-1)/\gamma}} + \text{const} \\ &= C_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const} \\ &= R \ln \frac{T^{\gamma/(\gamma-1)}}{p} + \text{const} \end{aligned} \quad (13.1.63)$$

式中, ν 为气体的比容。所以对于量热完全气体的等熵过程则有

$$\begin{cases} T v^{\gamma-1} = \text{const} \\ \frac{T}{p^{(\gamma-1)/\gamma}} = \text{const} \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} \\ \frac{T^{\gamma/(\gamma-1)}}{p} = \text{const} \end{cases} \quad (13.1.64)$$

由此便可得到如下等熵关系

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (13.1.65)$$

由式(13.1.57)并注意到热完全气体的状态方程则可得静温与总温间的关系,即

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \quad (13.1.66)$$

另外,在计算中常引入 $\tau(\lambda)$ 、 $\pi(\lambda)$ 、 $\epsilon(\lambda)$ 、 $q(\lambda)$ 、 $f(\lambda)$ 等气体动力学函数,即

$$\begin{cases} \tau(\lambda) = \frac{T}{T_0}, \quad \pi(\lambda) = \frac{p}{p_0}, \quad \epsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_0} \\ q(\lambda) = \pi(\lambda) y(\lambda) = \frac{\rho V}{\rho_0 a_0} = \lambda \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ f(\lambda) = q(\lambda) \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{cases} \quad (13.1.67)$$

式中, $q(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 分别称为密流函数与冲量函数。显然,这些气动函数方便了工程计算。

13.2 影响一维定常流动的几个制约因素

本节主要讨论流道截面面积变化、管道存在着摩擦、管路中有加热源并且流动时具有添质流的复杂一维流动,推导出这种流动的数学表达式。为此,首先,分析了每个制约因素单独在基本方程出现时产生的影响;其次,分析四种制约因素同时作用时对一维定常流基本方程产生的作用,并给出相应的影响系数。

13.2.1 面积变化在基本方程中的数学表达

截面面积的变化,主要体现在连续方程上,这里以变截面管流为例。由一维定常流的连续方程

$$\dot{m} = \rho VA = \text{const} \quad (13.2.1)$$

其微分形式为 $d\dot{m}=0$ 即

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (13.2.2)$$

13.2.2 管道摩擦在基本方程中的数学表达

管道摩擦主要体现在动量方程上,这里以图 13.5(a)所示的摩擦管为例。取该图所示的开口控制体,显然长度为 dx 的一段管壁对气流的摩擦力 δR_f 的大小为

$$\delta R_f = \tau_w C_w dx / \cos\theta$$

式中, C_w 为截面的周长,又称湿周。对于非圆截面来讲它与截面面积 A 、水力学直径 D_e 间的关系为

$$D_e = \frac{4A}{C_w} \quad (13.2.3)$$

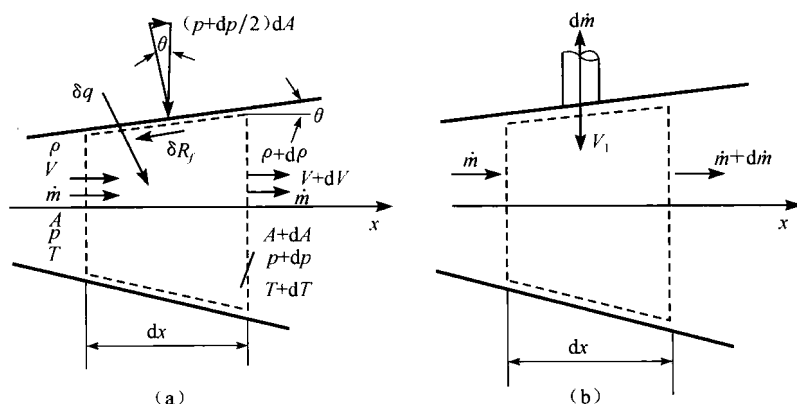


图 13.5 一维管流中的开口体系

δR_f 在 x 轴上的投影为

$$\delta R_{fx} = \delta R_f \cos(\pi - \theta) = -\tau_w C_w dx \quad (13.2.4)$$

式中, τ_w 是壁面剪切应力,它可以表示为

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho V^2 f \quad (13.2.5)$$

式中, f 称为摩阻系数(它是量纲为 1 的量)。利用式(13.2.3)和式(13.2.5), δR_{fx} 可表示为

$$\delta R_{fx} = -\frac{1}{2} \rho V^2 \frac{4f}{D_e} A dx \quad (13.2.6)$$

对图 13.5(a)所示的开口系统列动量方程,有

$$\begin{aligned} & \dot{m}(V + dV)(A + dA) - \dot{m}VA \\ &= -(p + dp)(A + dA) + pA + \left(p + \frac{dp}{2}\right)dA + \delta R_{fx} \end{aligned}$$

略去高阶项,简化得

$$VdV = -\frac{dp}{\rho} - \frac{2fV^2}{D_e}dx \quad (13.2.7)$$

显然,式(13.2.7)是式(13.1.50)的特例。

13.2.3 管路中有加热源时在基本方程中的数学表达

管路中有加热源主要体现在能量方程的表达上,下面以一维加热管流为例。设 δq 和 $\dot{q}$ 分别表示对开口系统内的单位质量气体的加热量和加热率[图 13.5(a)],设 $\dot{Q}$ 为对开口系统内气体的总加热率,有

$$\delta q = \dot{q}dx/V = \dot{q}dt \quad (13.2.8)$$

$$\dot{Q} = \rho \dot{q}Adx = \rho VA \delta q \quad (13.2.9)$$

对如图 13.5(a)所示的开口系统写出能量方程,有

$$\begin{aligned} &(\rho + d\rho) \left[\left(e + \frac{V^2}{2} \right) + d \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] (V + dV)(A + dA) - \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) VA \\ &= -(p + dp)(V + dV)(A + dA) + pVA + \dot{Q} \end{aligned}$$

略去高阶小量,代入式(13.2.9),上式简化为

$$d \left(e + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \delta q$$

由焓的定义 $h = e + \frac{p}{\rho}$, 于是一维定常加热流的能量方程为

$$d \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = \delta q \quad (13.2.10)$$

显然它与式(13.1.51)是等价的。如果积分式(13.2.10)又可得到

$$h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} + \Delta q \quad (13.2.11)$$

13.2.4 具有添质流动时基本方程的数学表达

添质作用对连续方程、动量方程和能量方程都有影响,这里以简单添质流为例。假设添质流 $d\dot{m}$ 垂直于主流方向 x , 并且添质流和主流属同一气体,它们的热力学变量也彼此相等,如 $p = p_i, \rho = \rho_i, T = T_i, C_p = C_{pi}$, 此处下标“ i ”表示添质流的变量。由于添质作用,连续方程、动量方程和能量方程都要重新推导。

1. 连续方程

$$\dot{m}(x) = \rho VA \neq \text{const} \quad (13.2.12)$$

其微分形式为

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} \quad (13.2.13)$$

2. 动量方程

对如图 13.5(b)所示的开口系统列出动量方程

$$(\dot{m} + d\dot{m})(V + dV) - \dot{m}V = -(p + dp)(A + dA) + pA + \left(p + \frac{dp}{2} \right) dA$$