

萬 有 文 庫

第二集七種

王 雲 五 主 編

數 理 精 蘊

(五)

清 聖 祖 敕 編

商 務 印 書 館 發 行

數理精蘊

(五)

清聖祖編

國學基本叢書

萬有文庫

第二集七百種

著者 羅綱

五雲王

商務印書館發行

數理精蘊下編卷十一

面部一

平方

平方者等邊四直角之面積也。以形而言則爲兩矩所合。以積而言則爲自乘之數。因其有廣無厚故曰平方。因其縱橫相等故曰正方。蓋方積面也。而其邊則線也。有線求面則相乘而得積。有面求線則開方而得邊。開之之法略與歸除同。但歸除有法有實而開方則有實而無法。故古人立爲商除廉隅之制以相求。每積二位得邊之一位。所謂一百一十定無疑。一千三十有零餘。九千九百不離十一萬方爲一百推是也。其法先從一角而剖其畧。以自一至九自乘之數爲方根。與所有之積相審量其足減者而定之。是爲初商。初商減盡無餘則方邊止一位。若有餘實卽初商方積外別成一磬折形。其附初商之兩旁者謂之廉。兩廉之角所合一小方謂之隅。廉有二故倍初商爲兩廉之共長。是爲廉法。視餘積足廉法幾倍卽定次商。隅卽次商之自乘。故次商爲隅法。合廉隅而以次商乘之則得兩廉一隅之共積。所謂初商方積外別成一磬折形者是也。故次商爲初商所得方邊之零。如次商數與初商餘積相減尙有不盡之實則又成一磬折形而仍爲兩廉一隅。但較前廉愈長而隅愈小耳。凡有幾層廉隅俱照初商之例逐層遞析之。實盡而止。實不盡者必非自乘之正數遞析之至於纖塵終有奇零。若餘實不足廉隅法之數者則

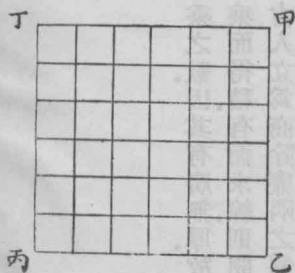
方邊爲空位。此開方之定法也。面形不一。而容積皆以方積爲準。故平方爲算諸面之本。諸面必通之方。積而後可施其法也。

設如正方面積三十六尺。開方。問每一邊數幾何。

法列方積三十六尺。自末位起算。每方積二位定方邊一位。今積止有二位。則於六尺上作記定單位。以自一至九自乘之方根數與之相審。知與六尺自乘之數恰合。乃以六尺書於方積六尺之上。而以六尺自乘之三十六尺書於方積原數之下。相減恰盡。即得開方之數爲六尺也。如圖甲乙丙丁正方形。每邊皆六尺。其中函一尺小正方形三十六。自邊計之。爲六尺自乘之積。以積開之。則與六尺自乘方根之數相準。故商除之恰盡也。蓋方積爲二位。是以方邊止一位。方積即六尺自乘之數。故無廉隅之可用次商。如有餘積則自成廉隅而用次商矣。

設如正方面積一丈四十四尺。開方。問每一邊數幾何。

法列方積一丈四十四尺。自末位起算。每方積二位定方邊一位。故隔一位作記。即於四尺上定尺位。一丈上定丈位。其一丈爲初商積。與一丈自乘之數相合。即定初商爲一丈。書於方積一丈之上。而以一丈自乘之平方一丈書於初商積之下。相減恰盡。爰以方邊末位積四十四尺續書於

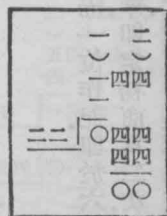
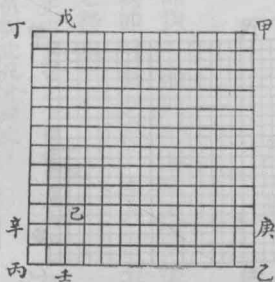


$$\begin{array}{r} 6 \\ 36 \\ \hline 00 \end{array}$$

下。大凡以餘積續書於下者。每取方積之二位以當方邊之一位也。爲次商廉隅之共積。乃以初商之一丈作一十尺。倍之得二十尺爲廉法。以除四十四尺。足二尺。卽定次商爲二尺。書於方積四尺之上。而以次商二尺爲隅法。與廉法二十尺相加。共得二十二尺爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商二尺乘之得四十四尺。與次商廉隅共積相減恰盡。是開得一丈二尺。爲方面每一邊之數也。如圖甲乙丙丁正方形。每邊皆一丈二尺。其中函積一丈四十四尺。是爲共積。其從一角所分用庚己戊己辛丁。兩長商數。其中函正方形積一丈。卽初商自乘數。所餘庚己壬乙。戊己辛丁。兩長方爲兩廉。其各長十尺。卽初商數。其各闊二尺。卽次商數。廉有二。故倍初商爲廉法。其己壬丙辛一小正方形爲隅。其邊二尺。亦卽次商數。故以次商爲隅法。合兩廉一隅成一聲折形。附於初商自乘方之兩邊。而成一總正方形。此廉隅之法所由生也。

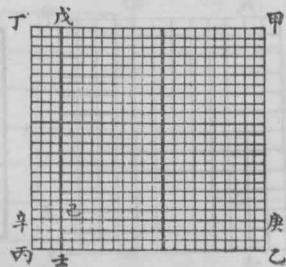
設如正方面積五百二十九尺開方。問每一邊數幾何。此題正方面積之三位皆以尺命位。似與前題分丈尺者不同。然其取方積二位續書於下。其末位卽命爲單位立算。則與丈尺同也。

法列方積五百二十九尺。自末位起算。每方積二位定方邊一位。故隔一位作記。乃於九尺上定單位。五百尺上定十位。其五百尺爲初商積。以初商本位計之。則五百尺爲初商積之單位。止與二自乘之數相



準。卽定初商爲二。書於方積五百尺之上。而以二自乘之四。書於初商積之下。相減餘一百尺。爰以方邊第二位積二十九尺。續書於下。共一百二十九尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商之二作二十尺。倍之得四十尺。爲廉法。以除一百二十九尺。足三尺。卽定次商爲三尺。書於方積九尺之上。而以次商三尺爲隅法。與廉法四十尺相加。共得四十三尺。爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商三尺乘之。得一百二十九尺。與次問廉隅共積相減。恰盡。是開得二十三尺。爲方面每一邊之數也。如圖甲乙丙丁正方形。每邊皆二十三尺。其中函積五百二十九尺。是爲共積。其從一角所分甲庚己戊正方形。每邊二十尺。卽初商數。其中函積四百尺。卽初商自乘數。所餘庚己壬乙戊己辛丁。兩長方爲兩廉。其各長二十尺。卽初商數。其各闊三尺。卽次商數。其己壬丙辛一小正方形爲隅。其邊三尺。亦卽次商數。右兩廉一隅成一磬折形。附於初商自乘方之兩邊。而成一總正方形也。設如正方面積五丈四十七尺五十六寸。開方。問每一邊數幾何。

法列方積五丈四十七尺五十六寸。自末位起算。每方積二位定方邊一位。故隔一位作記。卽於六寸上定寸位。七尺上定尺位。五丈上定丈位。其五丈爲初商積。與二丈自乘之數相準。卽定初商爲二丈。書於方積五丈之上。而以二丈自乘之四丈。書於初商積之下。相減餘一丈。卽一百尺。爰以方邊第二位積四



三	九	二	四	一	一	二	九	〇	〇	〇
二	五	四	一	一	二	九	〇	〇	〇	〇
四	三	一	一	二	九	〇	〇	〇	〇	〇

十七尺續書於下。共一百四十七尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商之
 二丈作二十尺。倍之得四十尺。爲廉法。以除一百四十七尺。足三尺。卽定次
 商爲三尺。書於方積七尺之上。而以次商三尺爲隅法。與廉法四十尺相
 加。共得四十三尺。爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商三尺乘之。得一百
 二十九尺。與次商廉隅共積相減。餘一十八尺。卽一千八百寸。復以方邊
 末位積五十六寸續書於下。共一千八百五十六寸。爲三商廉隅之共積。
 乃以初商次商之二丈三尺作二百三十寸。倍之得四百六十寸。爲廉法。
 以除一千八百五十六寸。足四寸。卽定三商爲四寸。書於方積六寸之上。而以三商四寸爲隅法。與廉法
 四百六十寸相加。共得四百六十四寸。爲廉隅共法。書於餘積之左。以三商四寸乘之。得一千八百五十
 六寸。與三商廉隅共積相減。恰盡。是開得二丈三尺四寸。爲方面每一邊之數也。

設如正方面積四十五萬九千六百八十四尺。開方。問每一邊數幾何。此題正方面積之六位皆以尺命位。似與
 前題分丈尺寸三色者不同。然其每取方積二位續書於下。其末位卽命爲單位立算。仍與丈尺寸同也。

法列方積四十五萬九千六百八十四尺。自末位起算。每方積二位定方邊一位。故隔一位作記。乃於四
 尺上定單位。六百尺上定十位。五萬尺上定百位。其四十五萬尺爲初商積。以初商本位計之。則五萬尺
 爲初商積之單位。而四十五萬尺爲四十五。與六自乘之數相準。卽定初商爲六。書於方積五萬尺之上。
 而以六自乘之三十六書於初商積之下。相減餘九萬尺。爰以方邊第二位積九千六百尺續書於下。共

	二	三	四
	二	三	四
	五	四	五
	四	七	六
四三	一	四	七
	一	二	九
四六四	〇	一	八
	一	八	五
		六	六
		〇	〇
		〇	〇

九萬九千六百尺爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則六百尺爲次商積之單位。而九萬九千六百尺爲九百九十六。而初商之六卽爲六十。故以初商之六作六十。倍之得一百二十爲廉法。以除九百九十六。足七倍。卽定次商爲七。書於方積六百尺之上。而以次商七爲隅法。與廉法一百二十相加。共得一百二十七爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商七乘之。得八百八十九。與次商廉隅共積相減。餘一萬零七百尺。復以方邊末位積八十四尺續書於下。共一萬零七百八十四尺。爲三商廉隅之共積。

以三商本位計之。則積與邊皆仍爲本位。乃以初商次商之六百七十倍之。得一千三百四十爲廉法。以除一萬零七百八十四。足八倍。卽定三商爲八。書於方積四尺之上。而以三商八爲隅法。與廉法一千三百四十相加。共得一千三百四十八爲廉隅共法。書於餘積之左。以三商八乘之。得一萬零七百八十四。與三商廉隅共積相減。恰盡。是開得六百七十八尺。爲方面每一邊之數也。

設如正大面積三十五丈九十一尺六十寸四十九分。問每一邊數幾何。

法列方積三十五丈九十一尺六十寸四十九分。自末位起算。每隔一位作記。卽於九分上定分位。空寸上定寸位。一尺上定尺位。五丈上定丈位。其三十五丈爲初商積。與五丈自乘之數相準。卽定初商爲五丈。書於方積五丈之上。而以五丈自乘之二十五丈。書於初商積之下。相減餘一十丈。卽一千尺。爰以方邊第二位積九十一尺續書於下。共一千零九十一尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商五丈作五十尺。倍

	六	七	八
	四	五	六
	三	六	九
一	二	七	〇
		九	八
		八	九
一	三	四	八
		一	〇
		〇	七
		〇	〇
		〇	〇
		〇	〇

之得一百尺爲廉法。以除一千零九十一尺。足九尺。卽定次商爲九尺。書於方積一尺之上。而以次商九尺爲隅法。與廉法一百尺相加。共得一百零九尺爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商九尺乘之。得九百八十一尺。與次商廉隅共積相減。餘一百一十尺。卽一萬一千寸。復以方邊第三位積六十寸續書於下。共一萬一千零六十寸。爲三商廉隅之共積。乃以初商次商之五丈九尺作五百九十寸。倍之得一千一百八十寸爲廉法。以除一萬一千零六十寸。足九寸。卽定三商爲九寸。書於方積空寸之上。而以三商九寸爲隅法。與廉法一千一百八十寸相加。共得一千一百八十九寸爲廉隅共法。書於餘積之左。以三商九寸乘之。得一萬零七百零一寸。與三商廉隅共積相減。餘三百五十九寸。卽三萬五千九百九十分。復以方邊末位積四十九分續書於下。共三萬五千九百四十九分。爲四商廉隅之共積。乃以初商次商三商之五丈九尺九寸作五千九百九十分。倍之得一萬一千九百八十分爲廉法。以除三萬五千九百四十九分。足三分。卽定四商爲三分。書於方積九分之上。而以四商三分爲隅法。與廉法一萬一千九百八十分相加。共得一萬一千九百八十三分爲廉隅共法。書於餘積之左。以四商三分乘之。得三萬五千九百四十九分。與四商廉隅共積相減。恰盡。是開得五丈九尺九寸三分。爲方面每一邊之數也。設如正方面積五百八十五萬六千四百尺開方。問每一邊數幾何。

			三	九	九	五
			四	六	一	五
			九	一	九	三
			〇	〇	五	二
一〇九		一〇九	一			
		九八	一			
一一八九		〇	〇	六	〇	
		一〇七	〇	一		
一九八三		〇〇	三	五	九	四
			三	五	九	四
			〇	〇	〇	〇

單位者皆依此例補足位分。然開之。

設如正方面積八十二丈六十二尺八十一寸開方。問每一邊數幾何。
 法列方積八十二丈六十二尺八十一寸。自末位起算。每隔一位作記。於一寸上定寸位。於二尺上定尺位。於二丈上定丈位。其八十二丈爲初商積。與九丈自乘之數相準。即定初商爲九丈。書於方積二丈之上。而以九丈自乘之八十一丈。書於方積八十二丈之下。相減餘一丈。即一百尺。爰以方邊第二位積六十二尺續書於下。共一百六十二尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商九丈作九十尺。倍之得一百八十尺。爲廉法。以除一百六十二尺。其數不足。是次商爲空位也。乃書一空於方積二尺之上。以存次商之位。復以方邊末位積八十一寸續書於下。共一百六十二尺八十一寸。即一萬六千二百八十一寸。爲三商廉隅之共積。仍以一百八十尺作一千八百寸爲廉法。以除一萬六千二百八十一寸。足九寸。即定三商爲九寸。書於方積一寸之上。而以三商九寸爲隅法。與廉法一千八百寸相加。共得一千八百零九寸爲廉隅共積。書於餘積之左。而以三商九寸乘之。得一萬六千二百八十一寸。與三商廉隅共積相減恰盡。是開得九丈零九寸。爲方面每一邊之數也。此法方積無空位。而商出之方邊有空位。凡廉法除餘積而數不足者。皆依此例推之。

設如正方面積六千四百一十一萬二千零四十九尺開方。問每一邊數幾何。

九	〇	九
八二六八	二八	一
八八	一	
一八〇九	〇	一六二八一
	一六二八一	
	〇〇〇〇〇	

法列方積六千四百一十一萬二千零四十九尺。自末位起算。每隔一位作記。於九尺上定單位。空百尺上定十位。一萬尺上定百位。四百萬尺上定千位。其六千四百萬尺爲初商積。以初商本位計之。則四萬爲初商積之單位。而六千四百萬爲六十四。與八自乘之數相合。即定初商爲八。書於方積四百萬尺之上。而以八自乘之六十四。書於初商積之下。相減無餘。爰以方邊第二位積一十一萬尺續書於下。爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則一萬尺爲次商積之單位。而一十一萬尺爲一十一。而初商之八即爲八十。故以初商之八作八十倍之得一百六十爲廉法。以除一十一。其數不足。是次商爲空位。乃書一空於方積一萬尺之上。以存次商之位。復以方邊第三位積二千尺續書於下。共一十一萬二十尺爲三商廉隅之共積。以三商本位計之。則空百尺爲三商積之單位。而一十一萬二千尺爲一千一百二十尺。而初商之八即爲八百。次商之空即爲空十。故以初商次商之八空作八百。倍之得一千六百爲廉法。以除一千一百二十。其數仍不足。是三商亦爲空位。乃再書一空於方積空百尺之上。以存三商之位。復以方邊末位積四十九尺續書於下。共一十一萬二千零四十九尺。爲四商廉隅之共積。以四商本位計之。則積與邊皆仍爲本位。乃以初商次商三商之八千倍之。得一萬六千爲廉法。以除一十一萬二千零四十九。足七倍。即定四商爲七。書於方積九尺之上。而以四商七爲隅法。與廉法一萬六千相加。共得一萬六千零七爲廉隅共法。書於餘積之左。而以四商七乘之。得一十一萬二千

八	○	○	七
六四	—	二〇	四九
六四			
一六〇〇七	〇〇	—	二〇四九
		—	二〇四九
		〇〇〇〇〇〇	

零四十九與餘積相減恰盡。是開得八千零七尺。爲方面每一邊之數也。此法方積中雖有一空位。而商出之方邊却有二空位。凡開方遇此類者。皆依此例推之。

法列積一萬四千九百二十八尺。自末位起算。每隔一位作記。於八尺上定單位。九百尺上定十位。一萬尺上定百位。其一萬尺爲初商積。以初商本位計之。則一萬尺爲初商積之單位。止與一自乘之數相合。卽定初商爲一。書於方積一萬尺之上。而以一自乘之一。書於初商積之下。相減無餘。爰以方積第二位積四千九百尺續書於下。爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則九百尺爲次商積之單位。而四千九百尺爲四十九。而初商之一卽爲一十。故以初商之一作一十倍之得二十爲廉法。以除四十九。足二倍。卽定次商爲二。書於方積九百尺之上。而以次商二爲隅法。與廉法二十相加。共得二十二爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商二乘之。得四十四。與次商廉隅共積相減。餘五百尺。復以方邊末位積二十八尺續書於下。共五百二十八尺。爲三商廉隅之共積。以三商本位計之。則積與邊皆仍爲本位。乃以初商次商之一百二十俱倍之。得二百四十爲廉法。以除五百二十八。足二倍。卽定三商爲二。書於方積八尺之上。而以三商二爲隅法。與廉法二百四十相加。共得二百四十二爲廉隅共法。書於餘積之左。以三商二乘之。得四百八十四。與三商廉隅共積相減。餘四十四尺。不盡。是開得一百二十二尺爲方。而每一邊之數。仍餘四十四尺。不

盡也。如欲以餘數再開，則得方邊之寸數，乃增書兩空於總積之後，復續書兩空於四十四尺之後，為幾十幾寸之位。是則四十四尺作四千四百寸，為四商廉隅之共積。爰以初商次商三商之一百二十二尺作一千二百二十寸，倍之得二千四百四十寸，為廉法。以除四千四百寸，足一倍，即定四商為一寸，書於餘積空寸之上。而以四商一為隅法，與廉法二千四百四十寸相加，共得二千四百四十一寸，為廉隅共法。書於餘積之左，以四商一寸乘之，仍得二千四百四十一寸，與餘積相減，餘一千九百五十九寸，不盡。如再以餘數開之，則得方邊之分數，乃又續書兩空於後，增空十空寸之後，復續書兩空於五十九寸之後，為幾十幾分之位。是則一千九百五十九寸作一十九萬五千九百分，為五商廉隅之共積。爰以初商次商三商四商之一百二十二尺一寸作一萬二千二百一十分，倍之得二萬四千四百二十分，為廉法。以除一十九萬五千九百分，足八倍，即定五商為八分，書於餘積空分之上。而以五商八為隅法，與廉法二萬四千四百二十分相加，共得二萬四千四百二十八分，為廉隅共法。書於餘積之左，以五商八分乘

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 \text{一} & \text{二} & \text{二} & \text{一} & \text{八} & & \\
 \text{一} & \text{四} & \text{九} & \text{二} & \text{八} & \text{〇} & \text{〇} & \text{〇} & \text{〇} & \text{〇}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 \text{二二} \mid \text{〇四九} \\
 \text{二四二} \mid \text{〇五二八} \\
 \text{二四四一} \mid \text{〇四四〇〇} \\
 \text{二四四二八} \mid \text{一九五九〇〇}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 \text{四四} \\
 \text{四八四} \\
 \text{二四四一} \\
 \text{一九五九}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 \text{一} & \text{二} & \text{二} & \text{一} & \text{八} & & \\
 \text{一} & \text{四} & \text{九} & \text{二} & \text{八} & \text{〇} & \text{〇} & \text{〇} & \text{〇} & \text{〇}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 \text{二二} \mid \text{〇四九} \\
 \text{二四二} \mid \text{〇五二八} \\
 \text{二四四一} \mid \text{〇四四〇〇} \\
 \text{二四四二八} \mid \text{一九五九〇〇}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 \text{四四} \\
 \text{四八四} \\
 \text{二四四一} \\
 \text{一九五九}
 \end{array}
 \end{array}$$

之得。一十九萬五千四百二十四分。與餘積相減。仍餘四百七十六分。不盡。是開得一百二十二尺一寸八分。爲方面每一邊之數也。此法原積本非自乘所得之數。雖遞析之終不能盡。凡開方遇此類者。皆依此例推之。

設如有一方臺上面共鋪方輒四千零九十六塊。問每一邊得輒幾何。法列方輒四千零九十六塊爲方積。於六塊上定單位。空百塊上定十位。其四千塊爲初商積。以初商本位計之。則空百塊爲初商積之單位。而四千塊爲四十。與六自乘之數相準。卽定初商爲六。書於方積百塊之上。而以六自乘之三十六。書於初商積之下。相減餘四百塊。爰以餘積九十六塊續書於下。共四百九十六塊。爲次商廉隅之共積。而以初商六作六十倍之得一百二十爲廉法。以除四百九十六。足四倍。卽定次商爲四。書於方積六塊之上。而以次商四爲隅法。與廉法一百二十相加。共得一百二十四爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商四乘之。得四百九十六。與餘積相減恰盡。是開得六十四塊。爲方臺上面每一邊之輒數也。

$$\begin{array}{r}
 \text{四} \text{) } 6 \\
 \text{六} \text{) } 96 \\
 \hline
 436 \\
 \text{四} \text{) } 96 \\
 \hline
 124 \text{) } 496 \\
 \hline
 124 \text{) } 496 \\
 \hline
 000
 \end{array}$$

設如有三百六十一人。用船分載。其每船所載人數與共船數相等。問共船幾何。法列三百六十一人爲方積。於一人上定單位。三百人上定十位。其三百人爲初商積。以初商本位計之。則三百爲初商積之單位。止與一自乘之數相準。卽定初商爲一。書於方積三百之上。而以一自乘之一。書於初商積之下。相減餘二百。爰以餘積六十一續書於下。共二百六十一。爲次商廉隅之共積。而以初

