贺晓军　李波　曾秋玲

高中数学

一题多解

高二分册

兰州大学出版社

高中数学一题多解

（高二分册）

贺晓军　李波　曾秋玲

兰 州 大 学 出 版 社

高中数学一题多解

（高二分册）

贺晓军　李波　曾秋玲

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路 308 号　电话:8617156　邮编:730000

兰州大学出版社激光照排中心排版

甘肃省委印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32　印张:7.625

1998 年 10 月第 1 版　1998 年 10 月第 1 次印刷

字数:185 千字　印数:1—10000 册

ISBN7－311-01422-0/G・553　定价:10.00 元

前　言

美国著名的数学教育家G·波利亚认为:"问题解决"是数学的核心。中学生们在获得知识的同时,更需要获得分析问题和解决问题的综合能力。

要解决问题就需要发现矛盾和差异,从差异中找到解决问题的思考路线及其关键所在。这也是科学研究思想方法的起步。

中学生朋友们在演算数学习题时,往往只注意到:这道题怎么解?而忽视了对思路的归纳总结和多角度的观察,本书的编著者试图以"一题多解"的方式为读者提供"多视角"的思考方法。对于每一道例题都提供了多种"思路"而不仅仅是"解法",在每道例题及章节后面又提供了一些针对性极强的练习和习题。旨在通过"一题多解"的方式帮助读者开拓视野,启迪思维,并提供对这一能力的训练和培养,以期提高思维的深度和广度。本书的编著者均为重点中学数学高级教师,并多年担任数学奥林匹克教练工作,在中学数学教学工作中积累了丰富的实践经验。书中的每一种思路不仅仅针对例题,而是蕴含了某种数学方法与数学思想。

本书的编排是按现行中学数学教材的顺序进行

的，且每一章节例题的选择也是由易及难、由浅入深的，而其讲练结合的形式为读者在阅读理解的同时又增加了动手练习的机会，这不仅适用于广大中学生，同时也可以成为中学数学教师备课的参考书。

掌握解决问题的方法是数学思维的核心。因而“一题多解”的重要性并不在于其直接的“套用”，而是其数学思维训练的价值和潜在的对发展智力的影响。“一题多解”无形中密切了各数学分支之间的联系，加深了学生对重要的数学方法的再认识，既使他们丰富了解题经验又以题带面地复习了章节知识；并且在寻找最简捷、合理的解题方法，提高思维的灵活性和发展性乃至鉴别错解、激发学习兴趣等各个方面都富有积极的作用。其中一些宝贵的解题经验和精辟见解也具有推广和使用价值。

希望本书能成为中学师生的好朋友。不妥之处，敬请批评指正。

目　录

第一部分　代数

第二部分　平面解析几何

第一部分　代　数

第一章　不等式

知识要点

不等式的性质；不等式的解法；不等式的证明；含有绝对值的不等式.

例题示范

例 1　已知 $a>0$ 且 $a\neq 1, 0<x<1$，比较 $|\log_a(1-x)|\,|\log_a(1+x)|$ 的大小。

思路 1：应用比较法，分 $a>1, 0<a<1$ 两种情况脱去绝对值符号，然后进行比较。

解法1：(1) 当 $a>1$ 时，

$$\begin{aligned}&|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|\\&=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)\\&=-\log_a(1-x^2)\end{aligned}$$

$\because a>1, 0<1-x^2<1, \therefore \log_a(1-x^2)<0.$

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$

(2) 当 $0<a<1$ 时，

$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$= \log_a(1-x) + \log_a(1+x)$

$= \log_a(1-x^2)$

$\because 0 < a < 1, 0 < 1-x^2 < 1, \therefore \log_a(1-x^2) > 0$

$\therefore |\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|$

综合(1)、(2) 得

$|\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|$.

思路 2:应用比值法,两式相比,换底后可消去参数 a.

解法 2:

$$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|} = \left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right| = |\log_{(1+x)}(1-x)|$$

$\because 1+x > 1, 0 < 1-x < 1, \therefore \log_{(1+x)}(1-x) < 0$.

$$\begin{aligned}\therefore |\log_{(1+x)}(1-x)| &= -\log_{(1+x)}(1-x) \\ &= \log_{(1+x)}\frac{1}{1-x} \\ &= \log_{(1+x)}\frac{1+x}{1-x^2} \\ &= 1 - \log_{(1+x)}(1-x^2).\end{aligned}$$

$\because 1+x > 1, 0 < 1-x^2 < 1, \therefore \log_{(1+x)}(1-x^2) < 0$.

$\therefore |\log_{(1+x)}(1-x)| > 1$

$$\therefore \frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|} > 1$$

$\therefore |\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|$.

思路 3:

$$\because |\log_a(1-x)| = \frac{|\lg(1-x)|}{|\lg a|},$$

$$|\log_a(1+x)| = \frac{|\lg(1+x)|}{|\lg a|}.$$

故只须比较两式右边分子的大小.

解法 3:$\because 0 < x < 1, \therefore 0 < 1-x < 1, 1+x > 1$.

$\therefore \lg(1-x) < 0, \lg(1+x) > 0$.

$\therefore |\lg(1-x)| - |\lg(1+x)|$

$= -\lg(1-x) - \lg(1+x)$

$= -\lg(1-x^2) > 0.$

$\therefore |\lg(1-x)| > |\lg(1+x)|.$

$\therefore |\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|.$

思路 4:应用关系式

$ab \geqslant 0 \Leftrightarrow |a+b| = |a| + |b|.$

解法 4:因为 $0 < x < 1$,所以 $0 < 1 - x^2 < 1 < 1 + x$,$\log_a(1-x^2)$ 与 $\log_a(1+x)$ 异号,故

$\log_a(1-x^2) \cdot [-\log_a(1+x)] > 0.$

$\because ab \geqslant 0 \Leftrightarrow |a+b| = |a| + |b|,$

$$\begin{aligned}\therefore |\log_a(1-x)| &= |\log_a(1-x^2) + [-\log_a(1-x)]| \\ &= |\log_a(1-x^2)| + |\log_a(1+x)| \\ &> |\log_a(1+x)|\end{aligned}$$

点评:解法 1 是基本解法,但因要对参数 a 进行讨论,解法比较繁;解法 2、3、4 均避免了对参数 a 进行讨论,解法比较简明.

例 2　解不等式 $\dfrac{6x^2-17x+12}{2x^2-5x+2} > 0.$

解法 1:原不等式的解集是下面不等式组(Ⅰ)和(Ⅱ)的解集的并集:

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}6x^2-17x+12>0 & ①\\ 2x^2-5x+2>0 & ②\end{cases}$$

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}6x^2-17x+12<0 & ③\\ 2x^2-5x+2<0 & ④\end{cases}$$

解不等式 ①,得解集 $\{x \mid x < 4/3$ 或 $x > 3/2\}$,

解不等式 ②,得解集 $\{x \mid x < 1/2$ 或 $x > 2\}$,

因此,不等式组(Ⅰ)的解集是:$\{x \mid x < 1/2$ 或 $x > 2\}$.

解不等式③，得解集$\{x|4/3 < x < 3/2\}$，

解不等式④，得解集$\{x|1/2 < x < 2\}$，

因此，不等式组（Ⅱ）的解集是：$\{x|4/3 < x < 3/2\}$.

由此可知，原不等式的解集是：

$\{x|x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 2 \cup \{x|4/3 < x < 3/2\}$.

解法 2：原不等式可化为同解不等式：$(2x-3)(3x-4)(x-2)(2x-1) > 0$，

把各因式的根按从小到大的顺序排列在表 1—1 中. 可知，原不等式的解集是：$\{x|x < 1/2$ 或 $4/3 < x < 3/2$ 或 $x > 2\}$.

表 1—1

各因式的值的符号 / 因式	根				
	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	
$2x-1$	−	+	+	+	+
$3x-4$	−	−	+	+	+
$2x-3$	−	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	−	+
上面四个因式的积	+	−	+	−	+

解法 3：原不等式可化为同解不等式：$(2x-3)(3x-4)(2x-1)(x-2) > 0$，

在数轴上标出 3/2、4/3、1/2、2，这样，数轴被分割成五段，依次从右到左地标上正负相间隔的符号，如图 1—1 所示.

从而可知原不等式的解集为：$\{x|x < \frac{1}{2}$ 或 $4/3 < x < 3/2$ 或 $x > 2\}$.

评注：相对说，解法 1 化为同解不等式组，方法显得繁冗，

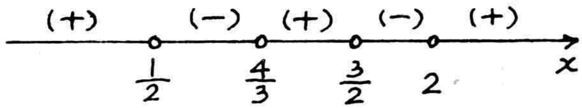

图 1—1

解法 2 需作表格亦颇费事，而解法 3 就显得干脆利落. 实际上，解法 3 与解法 2 同出一源，都是分区域考虑正负情况，但解法 3 更为方便.

解法 3 叫做“标根法”，用标根法解不等式时，若数 0 不是根就不要标出数轴的原点，否则易出错.

例 3　解不等式：$\sqrt{2x-1} > x-2$.

思路 1：根据无理式的定义域及算术根的非负性，运用不等式的性质，化无理不等式为有理不等式组来求解.

解法 1：原不等式等价于下列不等式组：

$$\begin{cases} x-2<0 \\ 2x-1 \geqslant 0 \end{cases} \text{①}\ \text{或} \begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ 2x-1>(x-2)^2 \end{cases} \text{②}$$

解 ① 得 $1/2 \leqslant x < 2$，解 ② 得 $2 \leqslant x < 5$.

故原不等式的解集为：$\{x \mid 1/2 \leqslant x < 5\}$.

评注：一般地，

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

思路 2：求原不等式的否定不等式(我们称 $f(x) \geqslant 0$ 与 $f(x) < 0$ 互为否定不等式) 在无理式定义域内的补集.

解法 2：先解不等式 $\sqrt{2x-1} \leqslant x-2$.

此不等式等价于下列不等式组：

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ 2x-1 \geqslant 0 \\ 2x-1 \leqslant (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 5,$$

又$\sqrt{2x-1}$的定义域为$[1/2, +\infty)$.

故原不等式的解集为$\{x \mid 1/2 \leqslant x < 5\}$.

思路 3:通过换元,把原不等式化为形如$\sqrt{f(x)} < A$ ($A > 0$为常数)的不等式求解.

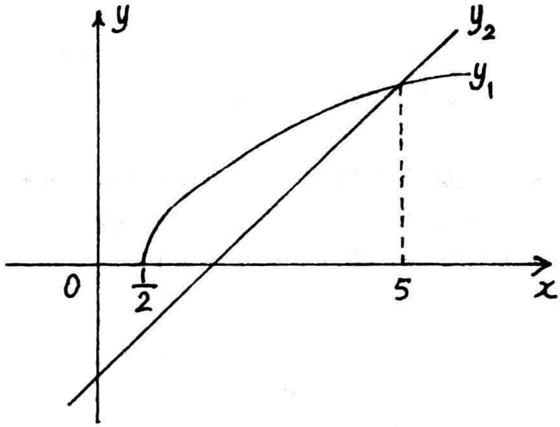

图 1—2

解法 3:令$t = \sqrt{2x-1}$,则$x = \frac{1}{2}(t^2+1)$,代入原不等式,得 $t^2 - 2t - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 3$

又$t \geqslant 0$,故$0 \leqslant t < 3$,即$\sqrt{2x-1} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant x < 5$.

故原不等式的解集为$\{x \mid 1/2 \leqslant x < 5\}$.

思路 4:数形结合,用图象法求解.

解法 4:令$y_1 = \sqrt{2x-1}$,$y_2 = x-2$

在同一坐标系中作出 y_1、y_2 的图象，解方程 $\sqrt{2x-1}=x-2$，得两曲线交点的横坐标 $x=5$，从图1—2可知，当 $1/2\leqslant x<5$ 时，抛物线弧在直线上方，所以 $y_1>y_2$，即 $\sqrt{2x-1}>x-2$.

故原不等式的解集是 $\{x\,|\,1/2\leqslant x<5\}$.

例 4　求证：$ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

证法 1：当 $ac+bd\leqslant 0$ 时，不等式显然成立.

当 $ac+bd>0$ 时，

$$ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$$
$$\Leftarrow(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$\Leftarrow 2abcd\leqslant a^2d^2+b^2c^2$$
$$\Leftarrow(ad-bc)^2\geqslant 0$$

最后的不等式显然成立，故原不等式成立.

证法 2：设 $\sqrt{a^2+b^2}=m$，$\sqrt{c^2+d^2}=n$.

令 $a=m\cos\alpha$；则 $b=m\sin\alpha$；

令 $c=n\cos\beta$，则 $d=n\sin\beta$.

此时，

$$\begin{aligned}ac+bd&=mn(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=mn\cos(\alpha-\beta)\\&\leqslant mn=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}.\end{aligned}$$

故原不等式成立.

证法 3：$a=b=0$ 时，原不等式显然成立.

a、b 不全为零时，构造二次函数：

$$\begin{aligned}f(x)&=(a^2+b^2)x^2-2(ac+bd)x+(c^2+d^2)\\&=(ax-c)^2+(bx-d)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

又因为 $a^2+b^2>0$，所以

$$\triangle=4(ac+bd)^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)\leqslant 0$$

即　$ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

证法 4：如图 1—3，设直线 l 的方程为 $ax+by=0$，点 A 的坐标为 (c,d)，点 A 到直线 l 的距离为 $|AB|$，显然 $|AB|\leqslant|AO|$，即

$$\frac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{c^2+d^2}$$

所以 $|ac+bd|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

又 $ac+bd\leqslant|ac+bd|$

所以 $ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

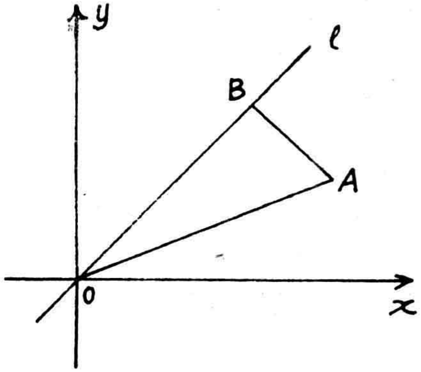

图 1—3

证法 5：假设 $ac+bd>\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$， 则有 $(ac+bd)^2>(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

即 $(ad-bc)^2<0$，矛盾！

故原不等式成立.

评注：

1. 以上五种常见证法中的证法 4 实际上给出了原不等式的几何意义，使数、形达到统一，证明过程干净利落.

2. 原不等式实际上是柯西不等式在 $n=2$ 时的情形，柯西不等式的一般形式为：

设 a_i、$b_i \in R$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，等号当且仅当 $a_i = kb_i$(k 为常数，$i=1,2,\cdots,n$) 时成立。

要证明柯西不等式，可仿照证法 3 构造二次函数来证，这一点留给读者自己完成.

例 5　设 a、b、c 为正数，证明：

$$abc \geqslant (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \qquad ①$$

分析：从 a、b、c 为正数，自然联想到利用重要不等式；再从 ① 式观察到左边为正，而右边是 a、b、c 中任两数之和与另一数差的积，自然发问：右边是否恒为正值？如果为正，就可考虑用比较法、重要不等式法、代换法等直接用纯代数方法证明. 又由于条件结构简单，还可进行逆向思维，采用分析综合法证明；再深挖 ① 式的结构特征进行多向思索、广泛的横向联想，这时我们会发现，可将正数 a、b、c 转化为三角形的三边，故可构造三角形模型利用三角的性质证明.

这些只是我们在审题过程中，深挖隐含条件所获得的多向解题的初步设想，所以还有待于我们进一步实施.

思路 1：对 ① 式分析可知左、右两边都是积的形式，若联想到运用均值不等式，就需要将一边变形为积的和或和的积的形式，才能构造成均值不等的模型. 由 ① 式中不等式的方向，将左边通过恒等变形，先化为和的形式后再化为积.

另外，由于 a、b、c 均为正数，所以 $a+b-c$、$a+c-b$、$b+c-a$ 最多一个为零或负数，而这时原不等式显然成立，故下面各种证法中 $a+b-c$、$a+c-b$、$b+c-a$ 均为正.

证法 1：

$$\because a = \frac{(a+b-c)+(c+a-b)}{2}$$

$$b = \frac{(b + c - a) + (a + b - c)}{2}$$

$$c = \frac{(a + c - b) + (b + c - a)}{2}$$

$$\therefore abc = \frac{(a + b - c) + (c + a - b)}{2} \cdot$$

$$\frac{(b + c - a) + (a + b - c)}{2} \cdot \frac{(a + c - b) + (b + c - a)}{2}$$

$$\geqslant \sqrt{(a + b - c)(c + a - b)} \cdot \sqrt{(b + c - a)(a + b - c)} \cdot$$

$$\sqrt{(b + c - a)(a + b - c)}$$

$$= (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c).$$

评注 1:此法虽简捷、明了,但思维的转化过程需要解题者具有敏捷深刻的分析能力.

思路 2:观察①式右边比左边复杂,依证恒等式或不等式的经验,往往是将繁杂的一边进行化简或变形使之简单,如若展开右边,尝试失败,再认真观察右边每个因式具有差的特点,是否能转化为平方差公式,但又是奇数个因式,只需平方就可解决.

证法 2:

$$\because [(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)]^2$$

$$= [(a+b-c)(a-b+c)] \cdot [(b+c-a)(b-c+a)] \cdot [(c + a - b)(c - a + b)]$$

$$= [a^2 - (b - c)^2][b^2 - (c - a)^2][c^2 - (a - b)^2]$$

$$\leqslant (abc)^2$$

而 $abc > 0, (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) > 0$,

$$\therefore abc \geqslant (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c).$$

评注 2:有一定的解题经验,这种解法顺理成章.但在挖出隐含条件后,要构成几个转换条件,则必须具备较强的联想能力.