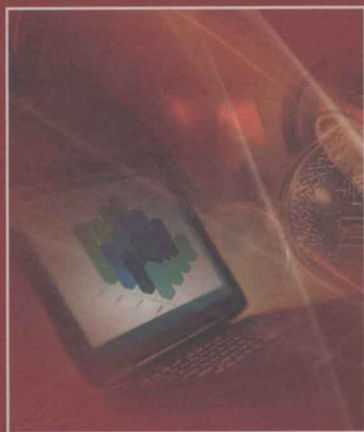


壽險數理要義

Life Insurance Primary Mathematics

精算師入門基石

Edition 4版 鄭榮治 編著 Ted R.Z. Chung



所謂「精算師」通常是指具備精算師組織或機構認定為正式會員資格者。隨著台灣保險事業國際交流的蓬勃，台灣精算學術業務已相當地國際

化。「人壽保險數理」被公認是精算師具備的主軸知識，舉凡國內外精算師資格考試皆將其列為必考之重點科目，可說是「精算師入門基石」。

本書《壽險數理要義：精算師入門基石》所用符號公式，已是國際上學術界及實業界成熟的共同語言。更值得一提的是，本書內容是根據作者於精算工作及授課當中與學生共同探討的講義整理而成；至於非理工科系背景、或是對數學較無自信的讀者們，更可從本書的詮釋過程中，發掘本身頗具潛力的精算細胞！



華泰文化

HWA TAI PUBLISHING
since 1974

<http://www.hwatai.com.tw>
華泰文化事業股份有限公司
台北市 106 大安區辛亥路 3 段 5 號
Tel:(02)2377-3877 Fax:(02)2377-4393
E-mail:business@hwatai.com.tw

ISBN 957-609-647-2



9 789576 096471

壽險數理要義

Life Insurance Primary Mathematics

精算師入門基石

Edition 4版 鄭榮治 編著 Ted R.Z. Chung

視野無界・心智無限
Open your eyes Stretch your mind



華泰文化
HWA TAI PUBLISHING
since 1974

壽險數理要義： 精算師入門基石

作者：鄭榮治

發行人：吳昭慧

責任編輯：葉姿音

發行所：華泰文化事業股份有限公司

地址：台北市辛亥路三段5號

電話：(02)2377-3877

傳真：(02)2377-4393

網址：www.hwatai.com.tw

E-Mail：business@hwatai.com.tw

登記證：行政院新聞局局版北市業字第282號

出版：西元2006年6月 四版

ISBN：957-609-647-2

基本定價：壹拾貳元肆角伍分

國家圖書館出版品預行編目資料

壽險數理要義=Life insurance mathematics primary

鄭榮治作.-- 四版.-- 臺北市：華泰，2006〔民95〕

面：公分

參考書目：面

ISBN 957-609-647-2（平裝）

1.人壽保險

563.721

95006642

著作權所有 翻印必究

（本書若有缺頁、破損或裝訂錯誤，請寄回本公司更換。）



前言

什麼樣的人適合從事精算事業或成為**精算師**？

本書並不是針對這個問題，唯希望對**精算師**這個領域可藉由閱讀本書獲得一定的認識。「人壽保險數理」被公認是精算師具備的主軸知識，舉凡國內外精算師資格考試皆將其列為必考之重點科目（請參見本書附錄 X），可說是「精算師入門基石」。

本書根據作者在精算工作及授課當中與學生共同探討的講義整理而成。字裡行間，欣見多處教學相長的成果，對本書提供了很大貢獻。尤其對於數學功力自認不太高的非理工科系同學，很可能從本書的詮釋過程，檢測出本身有頗多的精算細胞，更是令人振奮。

隨著台灣保險事業國際交流的蓬勃，台灣精算學術業務已相當國際化，本書所用符號公式已是國際上學術界及實業界成熟的共同語言。

雖歷久彌新，僅將早年作者受其啟蒙極大的兩本大作呈現如下。本書系承襲其基本精華部分，特為有心入精算師拱門之一般國人所編著之「要義」。初學者可將這本「要義」作為踏板，然後進入下面兩本大作等之精算學術殿堂。

1. 《保險數學》守田常直 昭和 38 年

2. *LIFE CONTINGENCIES* by C. Wallace Jordan, 1967

所謂**精算師**通常是指具備精算師組織或機構認定為正式會員資格者。得力於有關單位及同仁長久的耕耘，設於台北已有 28 年歷史的華人第一個精算學會，已得到國際精算學界的認同，此學會在 1989 年 11 月於台北福華飯店主辦第 5 屆東亞精算會議 The 5th East- Asian

Actuarial Conference (5th EAAC)，共有 100 多位國際知名精算師參加研討，又在 1995 年 9 月於比利時首都布魯塞爾與其它先進地區精算學會或精算師協會共同成為 International Forum of Actuarial Associations (簡稱 IFAA)「國際精算學會論壇」的創始正式會員。(請見本書附錄 A、M、R 和 N)

IFAA 或 IAA 之宗旨在於促進精算學術國際交流，資格互認以致於達成大一同的理想(請見本書附錄)。在其推進過程當中，有賴大家當仁不讓，尤其年輕朋友們作夥伴共同投入參與，積極扮演在國際論壇上之角色地位。

在此付梓成書之際，謹誌以上數點為序，希望各位賢達先進不吝指正本書疏誤之處，並望互相勉勵投入精算學術或事業，求其更加茁壯發展。

鄭榮治

謹識



目 錄

第 1 章	利息與確定年金概論	1
1.1	利息的概念	2
1.2	確定年金基本概念	9
1.3	攤銷表與償債基金	15
▶▶▶	應用習題	21
第 2 章	生命表概論	23
2.1	生死機率	24
2.2	生命表	31
▶▶▶	應用習題	34
第 3 章	生存年金的計算	35
3.1	換算基數	36
3.2	生存保險金	38
3.3	生存年金現值基本型	39
3.4	生存年金終值及其他基本型示例	48
3.5	每年分數次支付之生存年金示例	54

3.6	變額生存年金	57
3.7	利率與生存率變動對生存年金的影響	68
▶▶▶	應用習題	70
第 4 章	人壽保險金的計算	71
4.1	保險金於死亡年底給付	72
4.2	保險金於死亡即刻給付	84
4.3	保險金於死亡年底給付與即刻給付之關係	90
4.4	非平準型死亡保險	93
4.5	保險與年金的關係	103
4.6	基本型生存年金與死亡保險之躉繳保費基數符號比較表	106
▶▶▶	應用習題	108
第 5 章	人壽保險費的計算	109
5.1	人壽保險費率結構	110
5.2	基本型壽險之純保險費	111
5.3	總保險費	130
▶▶▶	應用習題	134
第 6 章	壽險責任準備金	135
6.1	責任準備金的意義	136
6.2	責任準備金計算方式	138
6.3	非基本型壽險示例	147

6.4 壽險保單價值	155
▶▶▶ 應用習題	159
 第 7 章 修正制壽險責任準備金	 161
7.1 修正制的概念	162
7.2 修正制責任準備金之計算	165
7.3 各種修正制基本方法	166
7.4 各地標準保單修正制介紹	178
7.5 相關法令之演進	188
▶▶▶ 應用習題	200
 附 錄	 201
附錄 1 補充資料	203
附錄 H 精算師——最佳職業	203
附錄 X 精算考試簡介	204
附錄 A IFAA 創立大會	206
附錄 M IFAA 創始會員	208
附錄 R IFAA & EAAC 章程	215
附錄 N 新 IAA (國際精算師協會) 之成立	219
附錄 V 非平準型壽險責任準備金修正方式	221
附錄 S 精算符號索引	228
附錄 2 精算用表	230
附表一 複利終值及現值表	230
附表二 複利年金表	254
附表三 台灣地區國民生命表	286

附表四	台灣壽險業第三回經驗生命表與基數表	298
附表五	台灣壽險業第四回經驗生命表與基數表	322
附表六	檢選與終極表	337
附錄 3	習題解答	338
附錄 4	重要參考書目	347

1

利息與 確定年金概論

● 本 · 章 · 綱 · 要 ●

1.1 利息的概念

1.2 確定年金基本概念

1.3 攤銷表與償債基金

▶▶▶ 應用習題

1.1 利息的概念

1.1.1 累積函數 (Accumulating Function) $a(t)$

1. 本金 1 元，經 t 時間後所累積的金額以 $a(t)$ 表示。

$a(0)=1$ ， $a(t)$ 通常為遞增函數。

2. 本金 k 元，經 t 時間後累積金額或稱本利和，可表示為

$$A(t) = k \times a(t)$$

3. 本金於 $t=n-1$ 至 $t=n$ 所生利息 $I_n = A(n) - A(n-1)$ 。

範例 1

甲向乙借 20,000 元，並且約定每元每年利息為 0.065 元，且利上加利計算，10 年後還乙本金及利息，試問甲所償還之本利和以及甲應該付的利息為何？

依題意 $a(t) = a(10) = (1 + 0.065)(1 + 0.065) \cdots (1 + 0.065) = (1 + 0.065)^{10}$

則本利和

$$= A(10) = 20,000 \times (1 + 0.065)^{10} = 37,542.749$$

$$\text{利息} = A(10) - A(0) = 37,542.749 - 20,000 = 17,542.749$$

1.1.2 實利率 (Effective Rate of Interest) i

經過一單位時間（每年、每季、每月等，通常為每年）所生利息與期初本金之比率 i 稱為利息後付實利率。

$$\begin{aligned}
 i_n(\text{投資後第 } n \text{ 年間的實利率}) &= \frac{\text{第 } n \text{ 年內所生利息}}{\text{期初本金}} \\
 &= \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}
 \end{aligned}$$

1.1.3 單利 (Simple Interest) 與複利 (Compound Interest)

1. 定義

(1) 單利：本金 1 元，累積函數符合 $a(t) = 1 + it$ 之計息方式。

i 為單利率， i 和 t 所採時間單位一致。

(2) 複利：本金 1 元，累積函數符合 $a(t) = (1+i)^t$ 之計息方式。

i 為複利率， i 和 t 所採時間單位一致。

2. $t=1$ ：單利法本利和 = 複利法本利和

$t > 1$ ：複利法本利和 > 單利法本利和

$0 < t < 1$ ：單利法本利和 > 複利法本利和

3. 複利是利息自動累加入本金一起投資的計息方式，單利則不是。長期投資與財務分析多用複利法。本書以下所論述者，皆採複利法。複利法或複利數學為管理數學重要之一環。

1.1.4 現值 (Present Value)

1. 在實利率 i 之下，使單位時間末的本利和達到 1 之期初本金

$v = \frac{1}{1+i}$ ，稱之為現值率或折現因子。

2. t 年後本利和累積值為 1 之期初本金或現值為 $a^{-1}(t)$ ； $a^{-1}(t)$ 稱為現值函數 (discount function)。

$$\text{單利 } a^{-1}(t) = \frac{1}{1+it}$$

$$\text{複利 } a^{-1}(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = v^t$$

範例 2

甲向乙借錢，並且約定 15 年後還乙 300,000 元，若假設固定利率 $i = 4\%$ ，試問甲到底向乙借了多少錢？

 $300,000 \times v^{15} = 300,000 \times (1 + 0.04)^{-15} = 166,579.35$ （查附錄 2）

3. 累積（accumulating）和折現（discounting）是互為逆向之過程。
4. 管理數學或複利數學在財務分析、長期投資與人壽保險費率計算常應用折現原理依預定利率計算。

1.1.5 實貼現率（Effective Rate of Discount） d

1. 一單位時間內，貼現息對期末金額之比率稱為實貼現率 d 。
2. 何謂貼現（discount）？

借款一筆，至到期日償還本金及利息，此為通常借貸之情形，但放款人亦有先自放款額中扣下利息，而將其餘額付與借款人者，此種先扣利息稱之為貼現。預扣的利息通常稱貼現息（amount of discount）或貼現（discount）。

範例 3

甲向銀行借 10,000 元，借期 1 年，銀行先收 600 元貼現息，即甲淨收額 9,400 元，1 年後甲還銀行 10,000 元。

$$\text{貼現率} = \frac{10000 - 9400}{10000} = 6\%$$

1.1.6 實利率與實貼現率之關係

對於利率 i 和貼現率 d 而言，給相同之期初值，經過相同時間後，兩者期末終值也相同，我們就說 d 和 i 是等價 (equivalent)。

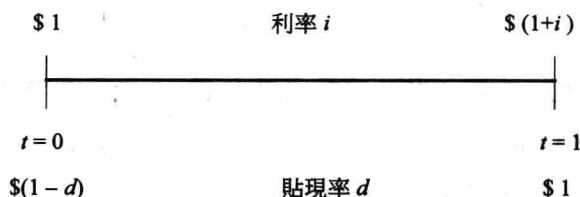


圖 1.1

假設 i 和 d 是等價，則 $1+i = \frac{1}{1-d}$ 並可得以下四式：

$$d = \frac{i}{1+i} \rightarrow (A)$$

$$i - d = id \rightarrow (B)$$

$$d = iv \rightarrow (C)$$

$$d = 1 - v \rightarrow (D)$$

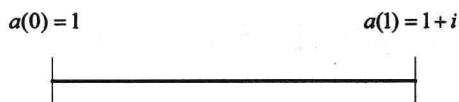
其中 $v = \frac{1}{1+i}$

d = 實貼現率

i = 實利率

(A)、(B)、(C)、(D)四式可從幾個角度解釋

(A)式



■ 1.2

依實貼現率定義： $d = \frac{(1+i)-1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$

(B)式 $(i-d)$ 元，亦可視為源自於所借本金 d 元，一年間之利息 $d \times i$
即 $(i-d) = d \cdot i$

(C)式 借 1 元，利息可選擇立即付或 1 年後付。

先付利息 = 後付利息之現值

$$d = i \cdot v$$

(D)式 1 年後 1 元之現值既是 v ，又是 $1-d$ ，所以

$$v = 1-d$$

1.1.7 虛利率（名義利率）（Nominal Rate of Interest） $i^{(m)}$

1. 年實利率 i 為當年度實際上所獲取之利率，

年虛利率 $i^{(m)}$ 為 1 年內計息 m 次之表訂年利率，

代表一年內分成 m 次複利計息，每一次利率為 $\frac{i^{(m)}}{m}$ 。

範例 4

有一銀行，掛牌長年期之存款業務，名義年利率為 12%，以半年計息一次，試求：

(1) 100 萬元在 5 年後之累積值？

(2) 10 年後為 100 萬元之現值？

解

(1) $100 \times (1 + 0.12/2)^{5 \times 2} = 179.08477$ （萬元）

(2) $100 \times (1 + 0.12/2)^{-10 \times 2} = 31.180473$ （萬元）（查附錄 2）

2. i 和 $i^{(m)}$ 的關係：

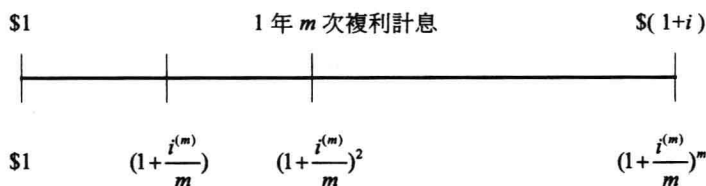


圖 1.3

$$\therefore 1 + i = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m$$