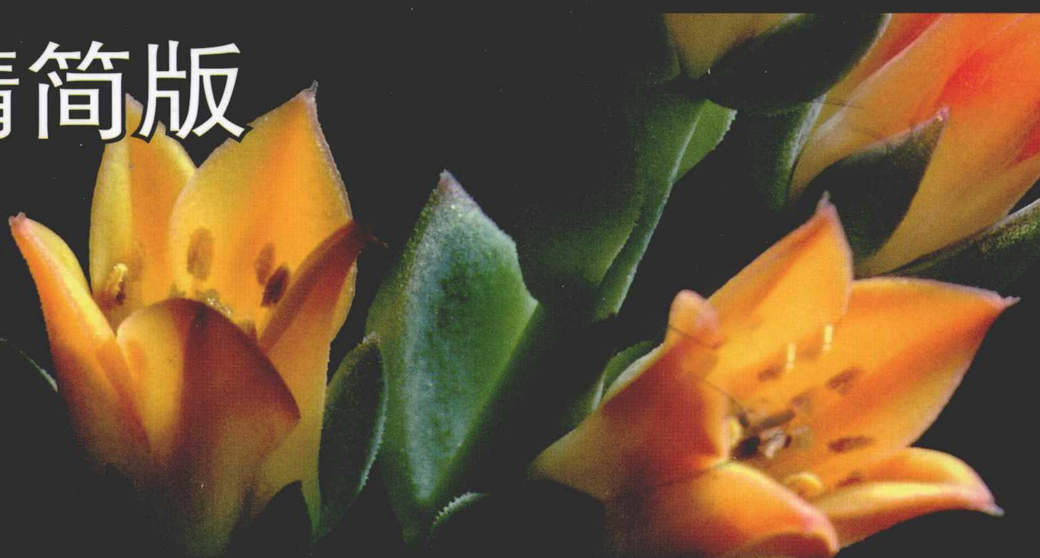
高等工科数学系列课程教材

工科数学分析例题与习题

孙振绮 总主编 ／ 孙振绮 丁效华 主 编

MATHEMATICAL ANALYSIS FOR ENGINEERING EXAMPLES AND EXERCISES

精简版



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高 等 工 科 数 学 系 列 课 程 教 材

工科数学分析例题与习题

(精简版)

总主编　孙振绮

主　编　孙振绮　丁效华

副主编　王雪臣　王黎明　史　磊

机 械 工 业 出 版 社

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《工科数学分析教程》（上、下册）（第2版）的配套习题课教材，内容包括实数、数列的极限、函数的极限与连续性、导数及其应用、多元函数微分学、不定积分、定积分、广义积分、定积分的应用、数项级数、函数项级数、常微分方程、重积分、曲线积分与曲面积分、场论、多元函数的泰勒公式及应用、傅里叶级数.

本书广泛吸取国内外知名大学的教学经验，具有足够数量的例题与练习题，帮助读者对高等数学的基本概念与理论知识深入理解，系统掌握，灵活运用. 所有例题与习题均具有典型性、综合性且有一定难度.

本书既可作为理工科各专业大学本科生的教学参考书或大学生的学习指导书，也可供准备报考工科研究生的人员与工程技术人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

工科数学分析例题与习题：精简版/孙振绮等主编. —2版. —北京：机械工业出版社，2011.9
高等工科数学系列课程教材
ISBN 978-7-111-35545-8

Ⅰ.①工… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①数学分析-高等学校-习题集 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第156882号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫 李 乐
版式设计：张世琴 责任校对：陈秀丽
封面设计：鞠 杨 责任印制：杨 曦
北京京丰印刷厂印刷
2011年9月第1版·第1次印刷
169mm×239mm·27.75印张·540千字
标准书号：ISBN 978-7-111-35545-8
定价：45.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务 网络服务
社服务中心：(010)88361066 门户网：http://www.cmpbook.com
销售一部：(010)68326294
销售二部：(010)88379649 教材网：http://www.cmpedu.com
读者购书热线：(010)88379203

前　言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《工科数学分析教程》(上、下册)(第2版)的配套习题课教材.

编者依据国内高等数学教学大纲的较高要求，坚持培养高素质、创新型人才的目标，吸收国内、外知名大学的先进教学经验来编写这本书.

书中内容在编写上强调了以下几点:

(1) 遵循习题课教学的特点与规律，既要发挥教师的主导作用，又能充分调动学生的学习积极性，重点培养学生独立的学习能力.

(2) 精选例题与习题，帮助学生掌握高等数学基本思想与基本方法.

(3) 突出重点与难点的阐述，使学生深入研究解决应用问题的方法，并能系统掌握，灵活运用.

本书在每一章都简要介绍教学要求、重点与难点，必要的节包含内容提要，典型例题，典型练习题(基本与综合)，必要的章后有综合解法举例与练习题. 绝大部分习题附有答案.

本书适合于非数学类理工科各专业的高等数学习题课教学，全讲需60学时. 带“*”部分仅供参考，可不讲.

本书由孙振绮任总主编，孙振绮、丁效华任主编，王雪臣(第14章)、王黎明(第5、8、15章)、史磊(第3、4章)任副主编，参加编写的教师还有吴开宁(第12、16章)、考永贵(第6、7、9章)、吕敬亮(第13章)，于战华(第10、11章)，李文学(第1、2、3章). 主编与副主编参加了统稿. 王克、金承日、文松龙三位教授分别审阅了本书的各章内容，提出了许多宝贵意见.

由于编者水平有限，缺点、疏漏在所难免，恳请读者批评指正!

编　者

目　　录

第1章　实　　数

教学要求

1. 掌握有理数和无限小数及其相关性质.

2. 理解确界的概念.

*3. 掌握实数的运算法则，了解有理数集的可数性和实数集的不可数性.

4. 掌握一些常用的不等式，如柯西不等式、贝努利不等式等.

教学重点与教学难点

确界概念和确界原理.

1.1　有理数　无限小数

内容提要

1. 定义

定义 1　有理数可以写成$\dfrac{p}{q}$，其中 p 是整数，q 是非零自然数. 特别地，任何整数 p 都是有理数.

定义 2　所有无限不循环小数组成的集合称为无理数集合.

定义 3　有理数集和无理数集的并构成了实数集.

定义 4　常用的数集给出如下记法：

闭区间$[a, b]=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$；开区间$(a, b)=\{x: a<x<b\}$；

半开(或半闭)区间$[a, b)=\{x: a\leqslant x<b\}$，$(a, b]=\{x: a<x\leqslant b\}$；

无限区间$(a, +\infty)=\{x: x>a\}$，$(-\infty, a)=\{x: x<a\}$，

$[a, +\infty)=\{x: x\geqslant a\}$，$(-\infty, a]=\{x: x\leqslant a\}$，

$(-\infty, +\infty)=\{x: x\in \mathbf{R}\}$.

2. 定理

定理 1　实数的性质：

(1) 四则运算封闭性；

(2) 有序性；

(3) $\forall a, b\in \mathbf{R}$，$b>a>0$，$\exists n\in \mathbf{N}$，使得 $na>b$；

(4) 稠密性，即有理数和无理数的稠密性；

(5) 实数集的几何表示——数轴；

(6) 两实数相等的充要条件，即 $a=b\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$|a-b|<\varepsilon$.

定理 2 如果 α 与 β 是实数，且 $\alpha<\beta$，则存在有理数 γ，使得

$$\alpha<\gamma<\beta.$$

定理 3 如果 $\alpha\in\mathbf{R}$，$\beta\in\mathbf{R}$，且 $\alpha<\beta$，则 $\exists\gamma\in\mathbf{Q}$，$\exists\gamma'\in\mathbf{Q}$，使得

$$\alpha<\gamma<\gamma'<\beta.$$

定理 4 设 $\delta\in\mathbf{R}$，$\delta'\in\mathbf{R}$，且假设存在两个有理数序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，满足：

$$x_n\leqslant\delta\leqslant\delta'\leqslant y_n,$$

$$y_n-x_n\leqslant\frac{1}{10^n},$$

则 $\delta=\delta'$.

1.2 数集的确界

内容提要

1. 定义

定义 1 $\{X\text{ 有上界}\}\Leftrightarrow\{\exists C\in\mathbf{R}:\forall x\in X\to x\leqslant C\}$.

定义 2 $\{X\text{ 有下界}\}\Leftrightarrow\{\exists C'\in\mathbf{R}:\forall x\in X\to x\geqslant C'\}$.

定义 3 $\{X\text{ 有界}\}\Leftrightarrow\{\exists C'\in\mathbf{R},\ \exists C\in\mathbf{R}:\ \forall x\in X\to C'\leqslant x\leqslant C\}$.

定义 4 对于数集 X，如果满足条件：

(1) $\forall x\in X\to x\leqslant M$;

(2) $\forall M'<M$，$\exists x_{M'}\in X$: $x_{M'}>M$，

则称数 M 是数集 X 的上确界，且记 $M=\sup X$，因此

$$\{M=\sup X\}\Leftrightarrow\{\forall x\in X\to x\leqslant M\}\wedge\{\forall M'<M,\ \exists x_{M'}\in X:\ x_{M'}>M'\}.$$

定义 5 对于数集 X，如果满足条件：

(1) $\forall x\in X\to x\geqslant m$;

(2) $\forall m'>m$，$\exists x_{m'}\in X$: $x_{m'}<m'$，

则称数 m 是数集 X 的下确界，且记 $m=\inf X$，因此

$$\{m=\inf X\}\Leftrightarrow\{\forall x\in X\to x\geqslant m\}\wedge\{\forall m'>m,\ \exists x_{m'}\in X:\ x_{m'}<m'\}.$$

2. 定理

定理 1 如果非空实数集合 X 是有上界的，则必存在上确界 $\sup X$；如果非空实数集合 X 是有下界的，则必存在下确界 $\inf X$.

定理 2 若 X 与 Y 是两个非空实数集合，且对任何 $x\in X$ 与任何 $y\in Y$ 都有

$$x\leqslant y,$$

则存在 $\sup X$ 与 $\inf Y$，且有

$$\{\forall x\in X,\ \forall y\in Y\to x\leqslant\sup X\leqslant\inf Y\leqslant y\}.$$

1.3 实数的运算

内容提要

1. 定义

定义 1 如果对于两个实数 α, β, 存在实数 δ, 使对任何满足条件

$$\gamma \leqslant \alpha \leqslant s,\ \gamma' \leqslant \beta \leqslant s'$$

的有理数 γ, s, γ', s', 都有不等式

$$\gamma + \gamma' \leqslant \delta \leqslant s + s',$$

则称 δ 为实数 α 与 β 的和, 记为 $\alpha + \beta = \delta$.

定义 2 对于任何两个实数 α 与 β, 规定如下乘法法则:

(1) 若 $\alpha = 0$, 则对任何 $\beta \in \mathbf{R}$ 都有 $\alpha\beta = 0$.

(2) 若 $\alpha < 0$, $\beta < 0$, 则 $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$.

(3) 若 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 则 $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$.

(4) 若 $\alpha > 0$, $\beta < 0$ 或 $\alpha < 0$, $\beta > 0$, 则 $\alpha\beta = -|\alpha||\beta|$.

2. 定理

定理 1 对任何实数 α 与 β, 它们的和 δ 存在且唯一.

定理 2 任何两个正实数的乘积都存在且唯一.

定理 3 如果 α, β 是两个实数, 且 $\alpha \neq 0$, 则它们的商 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 存在且唯一.

说明 设 α, $\beta \in \mathbf{R}$, 则方程 $x\alpha = \beta(\alpha \neq 0)$ 有唯一解, 称这个解为 β 与 α 的商, 记作 $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

定理 4 对任何 $m \in \mathbf{N}$ 与任何 $a > 0$, 存在数 a 唯一的 m 次算术根, 记为 $\sqrt[m]{a}$.

说明 称方程 $x^m = a(a > 0)$ 的正实数解为 a 的 m 次算术根.

定理 5 有理数集合 $\mathbf{Q}$ 是可数集合.

说明 任何可数集的无穷子集仍是可数集;有限或可数个可数集的并集仍是可数集.

定理 6 实数集是不可数的.

说明 不是有限集或可数集的集合称为不可数集.

1.4 常用不等式

内容提要

1. 柯西不等式

设对于 $n\in\mathbf{N}$，$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n\}\subset\mathbf{R}$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

并且等号成立当且仅当满足条件

$$\exists\lambda\in\mathbf{R},\ \exists\mu\in\mathbf{R},\ \forall k\in\{1, 2, \cdots, n\}: \lambda a_k=\mu b_k.$$

2. 贝努利不等式

如果 $x\geqslant -1$，则对任何 $n\geqslant 1$，有

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx.$$

3. 均值不等式

设 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\subset[0, +\infty)$，记

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\ G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

则

$$G_n\leqslant A_n.$$

第2章　数列的极限

教学要求

1. 理解极限的概念，会用定义证明数列的极限，了解收敛数列的有关性质.

2. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系.

3. 掌握极限的四则运算法则.

4. 熟练掌握用重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$求极限的方法.

5. 掌握单调数列的极限.

6. 理解子数列的定义，*掌握区间套的定义，熟练运用区间套定理.

*7. 掌握基本数列的定义，会用收敛数列的柯西准则判别数列的收敛性.

教学重点

数列极限的分析定义，数列极限的性质的证明与运用，数列单调有界定理.

教学难点

数列极限的分析定义，数列极限的性质的分析证明，*柯西准则.

2.1　数列极限的定义

2.1.1　内容提要

1. 定义

定义1　若函数f的定义域为全体正整数集合$\mathbf{N}^+$，则称f: $\mathbf{N}^+\to\mathbf{R}$为数列.

若记$f(n)=x_n$，则数列$f(n)$就可写作：x_1，x_2，…，x_n，…，简记为$\{x_n\}$.

定义2　$\{\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\}\Leftrightarrow\{\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbf{N}:\ \forall n\geqslant N_\varepsilon\to|x_n-a|<\varepsilon\}$.

存在极限的数列称为收敛的数列；否则，即数列的极限不存在，称该数列是发散的.

数列极限的等价定义：

(1) $\forall\varepsilon>0,\ \exists N:\ \forall n\geqslant N\to|x_n-a|\leqslant k\varepsilon\qquad(k>0)$；

(2) $\forall\varepsilon>0,\ \exists N:\ \forall n>N\to|x_n-a|<\varepsilon^2$；

(3) $\forall\varepsilon>0,\ \exists N:\ \forall n>N\to|x_n-a|<\sqrt{\varepsilon}$；

(4) 对$\forall 0<\varepsilon<c$，$\exists N:\ \forall n>N\to|x_n-a|<\varepsilon$；

(5) 对任意正整数 m，$\exists N$：$\forall n>N\to|x_n-a|<\dfrac{1}{m}$.

2. 定理

定理 1 若数列有极限，则极限唯一.

定理 2 改变或去掉数列的有限项，不影响数列的收敛性和极限.

3. 数列极限的几何意义

当 $n\geqslant N_\varepsilon$ 时，$x_n\in U(a,\ \varepsilon)$，即 x_{N_ε} 项后边的所有项包括 x_{N_ε}，全部进入 $U(a,\ \varepsilon)$. 换句话说，$U(a,\ \varepsilon)$外只有数列$\{x_n\}$的有限项，如图 2.1 所示。

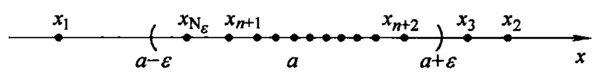


图 2.1

二维下：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对 a 点的任意 ε 邻域 $U(a,\ \varepsilon)$，对应着带形区域 $y=a-\varepsilon$，$y=a+\varepsilon$，可以找到下标为 N_ε 的项，使得 x_{N_ε}项后边的所有项包括 x_{N_ε}，全部进入此带形区域，如图 2.2 所示.

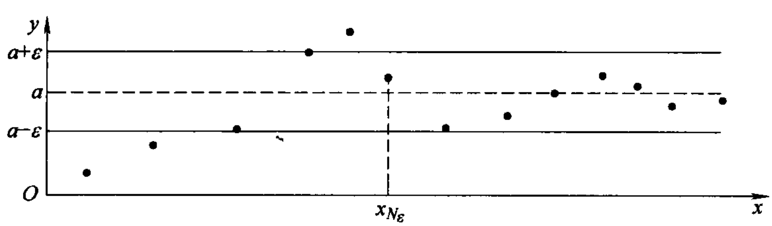


图 2.2

4. 数列$\{x_n\}$发散，即任意实数 a 都不是数列$\{x_n\}$的极限：

$$\{\lim_{n\to\infty}x_n\neq a\}\Leftrightarrow\{\ \exists\varepsilon>0:\ \forall k\in\mathbf{N},\ \exists n\geqslant k\to|x_n-a|\geqslant\varepsilon\}.$$

2.1.2 典型例题

例 2.1 设 $x_n=\dfrac{n}{n+1}(n=1,\ 2,\ \cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

分析 要证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，即证

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbf{N}:\forall n\geqslant N_\varepsilon\to|x_n-1|<\varepsilon$$

而要使

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

成立，只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$，又 n 是自然数，取 $N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$，同时限定 $\varepsilon<1$.

证 对于任意取定 ε：$1>\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$，$\forall n>\frac{1}{\varepsilon}-1=N(\varepsilon)$，有

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

例 2.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{2n-1}{n}=\ln 2$.

证 要使

$$\left|\ln\frac{2n-1}{n}-\ln 2\right|=\left|\ln\frac{2n-1}{2n}\right|=\ln\frac{2n}{2n-1}<\varepsilon,$$

即
$$\frac{2n}{2n-1}<e^\varepsilon,$$

解得
$$n>\frac{1}{2(e^\varepsilon-1)}+\frac{1}{2},$$

故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{2(e^\varepsilon-1)}+\frac{1}{2}\right]$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\ln\frac{2n-1}{n}-\ln 2\right|<\varepsilon.$$

例 2.3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+3^n}{5^n}=0$.

证 要使 $\left|\frac{(-3)^n+3^n}{5^n}\right|\leqslant 2\frac{3^n}{5^n}<\varepsilon$，解得 $n>\log_{\frac{3}{5}}\frac{\varepsilon}{2}$，

故对 $\forall\varepsilon:0<\varepsilon<1$，$\exists N=\left[\log_{\frac{3}{5}}\frac{\varepsilon}{2}\right]$，使得当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{(-3)^n+3^n}{5^n}\right|<\varepsilon$.

例 2.4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$.

证 当 $n\geqslant 3$ 时，

$$2^n=(1+1)^n=1+n\cdot 1+\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots+1>\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.$$

注意到对任何正整数 k，$n>2k$ 时有 $n-k>\frac{n}{2}$，就有

$$0<\frac{n^2}{2^n}<\frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)}=\frac{6n}{(n-1)(n-2)}<\frac{6n\cdot 4}{n^2}=\frac{24}{n}\ (n>4).$$

于是，对 $\forall \varepsilon>0$，取 $N=\max\left[4,\left[\frac{24}{\varepsilon}\right]\right\}$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n^2}{2^n}-0\right|<\varepsilon$.

2.1.3 典型练习题

典型练习题1

试用定义证明下述结论：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}=1$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 3n}{2n}=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}=0$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{5^n-1}=1$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2})=0$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{2n}=\ln\frac{1}{2}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，$|q|<1$.

典型练习题2

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，作数列 $\{z_n\}$：$x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

2. 验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\neq 0$.

3. 证明 $\{n^2\}$ 与 $\{(-1)^n\}$ 都是发散数列.

2.2 收敛数列的性质

2.2.1 内容提要

1. 定义

定义 对于数列 $\{x_n\}$，如果 $\exists C_1$：$\forall n\in\mathbf{N}\to x_n\geqslant C_1$，则称这个数列是有下界的；如果 $\exists C_2$：$\forall n\in\mathbf{N}\to x_n\leqslant C_2$，则称数列 $\{x_n\}$ 是有上界的；如果 $\exists C_1$ 与 C_2：$\forall n\in\mathbf{N}\to C_1\leqslant x_n\leqslant C_2$ 或 $\exists C>0$：$\forall n\in\mathbf{N}\to|x_n|\leqslant C$，则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

2. 定理

(1) 有界性：若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$ 有界，即存在 $M>0$，对 $\forall n$，都有 $|a_n|\leqslant M$.

注意 数列有界是数列收敛的必要条件，非充分条件. 如数列 $\{(-1)^n\}$ 有界，但不收敛.

(2) 保序性：设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 若 $a>b$，则 $\exists N$：$\forall n>N\to a_n>b_n$.

推论 1 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 若$\exists N$，$\forall n>N$时，有$a_n<b_n$，则$a\leqslant b$.（注意"="；并注意$b_n\equiv b$和$b=0$的情况.）

推论 2 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$（或$a<0$），则对$\forall 0<r<a$（或$a<r<0$），$\exists N$：$\forall n>N\to a_n>r$（或$a_n<r$）.

推论 3 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0$，则对$\forall 0<r<|a|$，$\exists N$：$\forall n>N\to|a_n|>r$.

（3）两边夹准则（迫敛性）：若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足条件：

1）对所有$n\geqslant N_0$：$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$；

2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

则数列$\{y_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$；

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$.

2.2.2 典型例题

例 2.5 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\qquad(a>1)$.

证法 1 令$\sqrt[n]{a}-1=\alpha_n$，有$\alpha_n>0$，利用贝努利（Bernoulli）不等式，有

$$a=(1+\alpha_n)^n\geqslant1+n\alpha_n=1+n(a^{\frac{1}{n}}-1)$$

即$0<a^{\frac{1}{n}}-1\leqslant\dfrac{a-1}{n}<\dfrac{a}{n}$，由两边夹准则知结论真.

证法 2 利用均值不等式，有

$0<\sqrt[n]{a}-1=\sqrt[n]{a\times\underbrace{1\times\cdots\times1}_{n-1个}}-1\leqslant\dfrac{a+n-1}{n}-1=\dfrac{a-1}{n}<\dfrac{a}{n}$，由两边夹准则知结论真.

例 2.6 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})$.

解 因为

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\quad+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}},$$

当$n>2$时，

$$\begin{aligned}2&=(2^{\frac{1}{2^n}})^{2^n}=[1+(2^{\frac{1}{2^n}}-1)]^{2^n}\\&>[1+(2^{\frac{1}{2^n}}-1)]^n=1+n(2^{\frac{1}{2^n}}-1)+\cdots+(2^{\frac{1}{2^n}}-1)^n>n(2^{\frac{1}{2^n}}-1),\end{aligned}$$

即$0<2^{\frac{1}{2^n}}-1<\dfrac{2}{n}$，

所以当$n\to\infty$时，$2^{\frac{1}{2^n}}\to1$，且所求极限等于2.

例 2.7 求数列$\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$的极限.

解 首先，我们有

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

取 $x_n=0$，$y_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，$z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，则有

$$x_n<y_n<z_n,$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}z_n=0.$$

利用极限的迫敛性，得到

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$$

例 2.8 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

证 首先用数学归纳法证明 $n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n$.

①当 $n=1$ 时不等式成立. ②设对于 n 不等式成立，则对于 $n+1$ 有

$$(n+1)!=n!(n+1)>\left(\frac{n}{3}\right)^n(n+1)=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$$

上式中最后面的不等式成立，是由于

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

从而对任意的 $\varepsilon>0$ 与对一切的 $n>\dfrac{3}{\varepsilon}$，有不等式

$$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}}=\frac{3}{n}<\varepsilon$$

成立，这就证明了极限存在且等于零.

例 2.9 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，并举例说明：如果数列 $\{|u_n|\}$ 有极限，但数列 $\{u_n\}$ 未必有极限.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，由极限的定义可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，总有 $|u_n-a|<\varepsilon$，而 $||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon$，于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，总有 $||u_n|-|a||<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

例如，如果数列 $u_n=(-1)^n$，虽有 $|u_n|=|(-1)^n|=1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

例 2.10 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证 因已知 $\{x_n\}$ 有界，故 $\exists M>0$，使得对一切 $n\in\mathbf{N}$，总有 $|x_n|\leqslant M$.

$\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，则 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，总有

$$|y_n-0|=|y_n|<\frac{\varepsilon}{M},$$

从而有

$$|x_ny_n-0|=|x_ny_n|=|x_n||y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

2.2.3 典型练习题

典型练习题 1

1. 设 $a_n\geqslant0(n=1,2,\cdots)$，证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{3}-1)\sin(2n^2+1)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{3n^2+i}}$.

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

典型练习题 2

1. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=\max\{2,3\}$.