经济管理学科数学配套丛书

线性代数
典型题精解与习题详解

（第2版）

郭风军　主编

- 内容提要
- 典型例题的解题方法及技巧
- 历年考研真题解析
- 习题详解

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

经济管理学科数学配套丛书

线性代数

典型题精解与习题详解

（第 2 版）

郭风军　主编

王秋梅　尹逊武　张立震　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是高等学校经济类、管理类各专业学生学习线性代数的辅导教材．内容包括：矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型、线性空间与线性变换．

本书总结归纳了各种题型，针对各种题型相应地给出了具体的解题思路和分析方法，对读者提高解题能力有很好的帮助. 本书所选用的大部分例题都有一定的代表性，其中一部分是近年研究生入学考试试题.

本书是高等学校经济类、管理类各专业学生学习期间和报考研究生前的必备读物，是颇具特点的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数典型题精解与习题详解/郭风军主编. —2 版.
—天津：天津大学出版社，2011. 8
(经济管理学科数学配套丛书)
ISBN 978 - 7 - 5618 - 4064 - 1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-题解
Ⅳ. ①O151. 2 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 155210 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
电　　话 发行部：022－27403647　邮购部：022－27402742
网　　址 www. tjup. com
印　　刷 河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 10. 5
字　　数 268 千
版　　次 2009 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 2 版
印　　次 2011 年 8 月第 1 次
印　　数 1—4000
定　　价 19. 00 元

第2版前言

本书是在2009年天津大学出版社出版的《线性代数典型题精解与习题详解》的基础上修订而成的．本书可以帮助经济类和管理类在校学生和自学者学好“线性代数”，也可以给他们备考研究生提供一份复习资料，同时也对从事“线性代数”教学的教师有一定的参考价值．

本书仍沿用第1版的结构，每章分为以下四部分．

一、内容提要

给出每一章的主要知识结构脉络．

二、典型例题的解题方法及技巧

总结归纳了各章节的各种题型，并以实例的形式给出了各类问题解题的技巧和方法．这部分内容对提高学生解题能力具有很好的帮助．

三、历年考研真题解析

本书对考研真题按照考查的知识点放在相应章节，这样有助于学生掌握每年考研知识点分布在各章中的比重，也有助于学生对知识点的理解和掌握．本书在第2版中增加了2010年、2011年的考研真题，而且都给出了具体的解题过程，供考研学生复习使用．

四、习题详解

这部分内容是针对高等教育出版社出版的《线性代数》（第3版）（卢刚主编）做了相应的调整，对课后习题逐节给出解答，以供初学者和自学者使用．

书中不足之处恳请读者批评指正．

编者

2011年7月

前　言

线性代数是当代大学生必修的一门公共基础课，它是进一步学好其他后续课程的基础，也是经济类硕士研究生入学考试必考的一门数学课程，对培养大学生逻辑思维能力、抽象思维能力、分析解决问题的能力和综合运用能力都有重要的作用.

卢刚主编的《线性代数》(第3版)是目前我国经济类专业使用量较大的一本大学数学教材，该教材习题量大且具有一定的难度，考虑到经管类的学生和自学者学习线性代数的困难，为了帮助该类的学生和自学者学好这门课程，给他们提供一份好的考研复习资料，我们编写了与《线性代数》(卢刚主编)配套的教学辅导书.在教材的编写过程中，从选材、理论推导、文字叙述等方面尽量适应经管类学生的特点，通过对各种典型题型的分析，介绍各种解题思路、方法和运算技巧，帮助读者把线性代数中的概念予以融会贯通，并力图拓宽解题思路，提高分析解决问题的能力，以便更好地掌握解题技巧.

本书的每一章基本包括以下内容.

一、内容提要

系统、概要地归纳了每一章的概念、定理、公式等相关的主要知识点.

二、典型例题的解题方法及技巧

总结归纳了各章节的各种题型，并以实例的形式给出了各类问题解题的技巧、方法，书中还针对各种题型，相应地给出了具体的解题思路和分析方法，同时还介绍了许多新的更简捷的解题方法.这些内容对提高解题能力都有很好的帮助.对于同一种题型，我们选择了比较典型的能反映教学要求的例题进行解析，并详细地给出了解题过程.此外，本书还积极地探索一个题目的多种解法，可以使读者对各个相关概念的相互关系有更深刻的理解，通过各种解法的比较，掌握用最简捷的方法去解决问题，对开拓读者的解题思路有很重要的作用.本书所选用的大部分例题都有一定的难度，一部分是近年硕士研究生入学考试试题，一部分是与各个题型相适合且具有代表性的典型例题.

三、历年考研真题解析

本书给出了近年硕士研究生入学考试试题，同时给出了详细的解题过程，并进行了难点释疑，对于与试题相关的知识点以“注”的形式介绍给读者.

四、习题详解

本书给出原教材部分习题的参考解答.

本书由郭风军主编，参加编写的有郭风军、王秋梅、尹逊武、张立震.本书在编写过程中，参考了诸多教材和辅导材料，在此谨向有关作者以及为本书做出贡献的同志们表示衷心的感谢.

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎广大读者批评指正.

编者

2009年5月

目　　录

第 1 章　矩阵 …… 1

§1.1　内容提要 …… 1

§1.2　典型例题的解题方法及技巧 …… 1

§1.3　历年考研真题解析 …… 11

§1.4　习题详解 …… 13

第 2 章　线性方程组 …… 48

§2.1　内容提要 …… 48

§2.2　典型例题的解题方法及技巧 …… 48

§2.3　历年考研真题解析 …… 53

§2.4　习题详解 …… 58

第 3 章　矩阵的特征值和特征向量 …… 90

§3.1　内容提要 …… 90

§3.2　典型例题的解题方法及技巧 …… 90

§3.3　历年考研真题解析 …… 94

§3.4　习题详解 …… 99

第 4 章　二次型 …… 123

§4.1　内容提要 …… 123

§4.2　典型例题的解题方法及技巧 …… 123

§4.3　历年考研真题解析 …… 126

§4.4　习题详解 …… 128

第 5 章　线性空间与线性变换 …… 145

§5.1　内容提要 …… 145

§5.2　典型例题的解题方法及技巧 …… 145

§5.3　习题详解 …… 149

第1章 矩　　阵

§1.1 内容提要

- 矩阵
  - 特殊方阵
    - 对角矩阵
    - 数量矩阵(单位矩阵)
    - 上三角矩阵与下三角矩阵
    - 对称矩阵、反对称矩阵
  - 矩阵的运算
    - 矩阵的加法及矩阵与数的乘法
    - 矩阵与矩阵的乘法
    - 矩阵的转置
  - 方阵的行列式
    - 2 阶行列式,n 阶行列式的定义
    - 行列式的性质及行列式的计算
    - * 拉普拉斯(Laplace)定理
  - 矩阵的分块
    - 矩阵分块的概念
    - 矩阵分块的运算
  - 可逆矩阵
    - 可逆矩阵的概念及矩阵可逆的充要条件
    - 用伴随矩阵法求逆矩阵
    - 可逆矩阵的性质
  - 矩阵的初等变换
    - 矩阵的初等变换与初等矩阵
    - 用初等变换法求逆矩阵
  - 矩阵的秩
    - 矩阵秩的概念
    - 用初等变换求矩阵的秩
  - 矩阵的应用
    - 在图论中的应用
    - 在概率统计中的应用

§1.2 典型例题的解题方法及技巧

1. 与方阵的行列式有关的计算

例 1 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量,且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\beta}_1|=m$, $|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\beta}_2|=n$,则 4 阶行列式 $|2\boldsymbol{\alpha}_1\quad 3\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2|=$________.

分析 此类型题目首先要利用行列式分拆的性质进行分解,将其分解成与已知行列式相关的形式,再进行计算.

解

$$\begin{aligned}|2\boldsymbol{\alpha}_1\quad 3\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2| &= |2\boldsymbol{\alpha}_1\quad 3\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\beta}_1|+|2\boldsymbol{\alpha}_1\quad 3\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad 2\boldsymbol{\beta}_2|\\ &= -6|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\beta}_1|-12|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\beta}_2|\\ &= -6m-12n.\end{aligned}$$

例 2 设 α,β,γ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根，则 3 阶行列式 $\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=$______.

分析 利用根的性质求行列式.

解 因为 α,β,γ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根，所以 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$，故 $x^3+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$，所以 x^2 的系数为 0，即 $\alpha+\beta+\gamma=0$. 因此

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma\\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \beta\\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \beta & \gamma\\ 0 & \alpha & \beta\\ 0 & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=0.$$

例 3 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-2$，则 $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}|=$______.

解 $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}|=|(-2)\boldsymbol{A}|=(-2)^n|\boldsymbol{A}|=(-2)^{n+1}$.

例 4 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

解 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}|=1$，$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2$，故 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$.

例 5 $\boldsymbol{A}$ 为奇数阶反对称方阵，则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 为奇数阶反对称方阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，且 $|\boldsymbol{A}|^{\mathrm{T}}=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$，又 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$，所以 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$，而 n 为奇数，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$.

2. 与伴随矩阵和逆矩阵有关的计算

例 6 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，证明：

(1)若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$；(2)$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$；(3)$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$；

(4)$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$；(5)$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$；(6)$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

证明 (1)(反证法)假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq0$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，即 $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\boldsymbol{E}$，所以

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^*(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$，与 $|\boldsymbol{A}^*|\neq0$ 矛盾，故当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，有 $|\boldsymbol{A}^*|=0$.

(2)因为 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，所以 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$，若 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$；

若 $|\boldsymbol{A}|=0$，由(1)知，$|\boldsymbol{A}^*|=0$，故有 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(3)由 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，得 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

(4)由(3)得，$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$，又因为 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$，所以 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

(5)由(3)得，$(\boldsymbol{A}^*)^*=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^*=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}|(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则亦可证之.

(6)$(\boldsymbol{AB})^*=|\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1}=|\boldsymbol{AB}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

注意：①有关 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的结论大多都是在公式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 的基础上推导的.
②本书用“$\boldsymbol{0}$”表示相应阶数的零矩阵，或相应维数的零向量，后面还会有类似的情形，不再说明.

例 7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|(\boldsymbol{A}^*)^*|=$______.

解 由 $|\boldsymbol{A}|=10\neq0$ 知，$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$，得

$$|(\boldsymbol{A}^*)^*|=||\boldsymbol{A}|^{3-2}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^3|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^4=10^4.$$

例 8 设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=-\frac{1}{2}$，则 $|(3A)^{-1}-2A^*|=$________.

解 $|(3A)^{-1}-2A^*|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2|A|A^{-1}\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}+A^{-1}\right|=\left|\frac{4}{3}A^{-1}\right|$

$$=\left(\frac{4}{3}\right)^3|A^{-1}|=-\frac{128}{27}.$$

例 9 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{bmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$________.

解 $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{A}{|A|}=\frac{1}{18}A.$

3. 与可逆的充要条件有关的证明

例 10 若 $AA^T=E$，且 $|A|\neq 1$，证明 $A+E$ 不可逆.

分析 利用 A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$.

证明 $|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A||E+A^T|=|A||E^T+A^T|$

$=|A||(E+A)^T|=|A||E+A|.$

因为 $|A|\neq 1$，所以 $|A+E|=0$，所以 $A+E$ 不可逆.

4. 关于抽象矩阵求逆矩阵的计算或证明(利用可逆的定义)

例 11 已知 $A^2-A+3E=0$，证明 A，$2A-E$ 可逆，并求 A，$2A-E$ 的逆矩阵.

分析 可利用可逆矩阵的定义对抽象矩阵求逆，即只要满足形式 $AB=BA=E$，则 $A^{-1}=B$.

证明 因为 $A(A-E)=(A-E)A=A^2-A=-3E$，所以 $A\left(\frac{A-E}{-3}\right)=E$，故 A 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{A-E}{-3};$$

因为 $(2A-E)\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}E\right)=\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}E\right)(2A-E)=A^2-A+\frac{1}{4}E=-3E+\frac{1}{4}E$

$$=-\frac{11}{4}E,$$

所以 $(2A-E)\left(\frac{2A-E}{-11}\right)=E$，故 $2A-E$ 可逆，且 $(2A-E)^{-1}=\frac{2A-E}{-11}$.

例 12 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若 $a_0\neq 0$，且 $f(A)=0$，证明 A 可逆，并求 A^{-1}.

证明 因为 $f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m=0$，所以 $A(a_1E+\cdots+a_mA^{m-1})=-a_0E$. 又因为 $a_0\neq 0$，故 $A^{-1}=-\frac{1}{a_0}(a_1E+\cdots+a_mA^{m-1})$.

例 13 设矩阵 A、B 和 $A+B$ 都可逆，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，并求其逆矩阵.

解 设 $(A^{-1}+B^{-1})X=E$，两边同时左乘 A，则 $A(A^{-1}+B^{-1})X=A$. 所以 $(E+AB^{-1})X=A$，即 $(B+A)B^{-1}X=A$.

因为 B 和 $A+B$ 都可逆，所以 $X=B(B+A)^{-1}A$. 故 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，且

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(B+A)^{-1}A.$$

注意：若两边同时左乘 B，则可以得到 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(B+A)^{-1}B$.

5. 与可逆矩阵有关的计算(先化简后运算)

例 14 已知 $P=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}AP=\Lambda$，$\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求 A^{100}.

分析 对于一般矩阵求高次幂,通常采取归纳法,但本题通过观察不难发现矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有特殊表达式,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$,故可将 $\boldsymbol{A}$ 的高次幂运算转移给对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,而对角矩阵的高次幂等于对角线上各元素的高次幂.

解 因为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$,故

$$\boldsymbol{A}^{100}=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})\cdots(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})=\boldsymbol{P\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\cdots\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{P\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}^{100}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{100}&0&0\\0&2^{100}&0\\0&0&2^{100}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&2^{100}&\\&&2^{100}\end{bmatrix}.$$

例 15 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$,求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解 因为$|\boldsymbol{A}|\neq0$,所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$存在.等式两边同时右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,则原式变形为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$,即$(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}$,而$|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|\neq0$,所以 $\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}$. 故

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}.$$

又因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$,所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{bmatrix}$,因此

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{10}{3}&0&0\\0&\frac{9}{4}&0\\0&0&\frac{8}{7}\end{bmatrix}.$$

6. 与分块矩阵有关的计算

例 16 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&2&1\end{bmatrix}$,求$|\boldsymbol{A}^6|$,$\boldsymbol{A}^2$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$,故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$,则

$$|\boldsymbol{A}^6|=|\boldsymbol{A}|^6=(|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|)^6=(-9)^6=3^{12},$$

$$A^2=\begin{bmatrix}A_1^2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4&0&0\\4&5&0&0\\0&0&9&0\\0&0&8&1\end{bmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&0\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\\ 0&0&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&-\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}.$$

7. 高阶方阵行列式的计算或证明(方法总结)

1)定义法　直接利用行列式的定义计算或证明,此法适用于行列式中有较多的零元素的情形及与代数余子式有关的计算.

例 17　设 4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\0&1&1&7\\10&5&2&3\end{vmatrix}$,求:(1)$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}$;(2)第 4 行各元素代数余子式的和;(3)第 4 行各元素余子式之和.

分析　利用已有的行列式构造出另一个行列式.

解　(1)由行列式定义知,将 $D_4=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\0&1&1&7\\10&5&2&3\end{vmatrix}$的第 3 行元素替换成 1,2,3,4,即得

$$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\1&2&3&4\\10&5&2&3\end{vmatrix}=-145.$$

(2)同(1),将 $D_4=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\0&1&1&7\\10&5&2&3\end{vmatrix}$的第 4 行元素替换成 1,1,1,1,即得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\0&1&1&7\\1&1&1&1\end{vmatrix}=-36.$$

$$(3)M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\0&1&1&7\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=18.$$

例 18 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$，其余未写出的元素均为 0，且 $n>1$.

解 按第 1 列展开，得

$$D_n=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & a_n \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b_n\begin{vmatrix} b_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & & & \\ & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & b_{n-2} & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n.$$

注意：形如 $\begin{vmatrix} \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ \cdot & & & \ddots \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} \ddots & & & \cdot \\ \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} & & \iddots & \iddots \\ & \iddots & \iddots & \\ \iddots & \iddots & & \\ \iddots & & & \cdot \end{vmatrix}$，

$\begin{vmatrix} \cdot & & & \iddots \\ & & \iddots & \iddots \\ & \iddots & \iddots & \\ \iddots & \iddots & & \end{vmatrix}$ 的所谓两线行列式，可直接按单个元素所在的行或列展开降阶，再利用三角形或次三角形行列式的结果直接计算.

2)化三角形法　利用行列式的性质，把原行列式化为上(下)三角形，使其形变但其值不变，于是原行列式等于此上(下)三角形行列式的主对角线元素之积.

例 19 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}(n>1)$.

解 分两种情形.

(1)$a_i\neq 0,i=2,3,\cdots,n$，将 D_n 的第 i 列的 $-\dfrac{c_i}{a_i}$ 倍全部加到 D_n 的第 1 列上，$i=2,3,\cdots,n$，使 D_n 中第 1 列除第 1 个元素外全部为零，即得上三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{b_ic_i}{a_i} & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}=\prod_{j=2}^{n}a_j\cdot\Big(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\Big).$$

(2)$a_i(i=2,3,\cdots,n)$ 中某些为零，不妨令 $a_n=0$，则将 D_n 依它的第 n 列展开，于是 $D_n=(-1)^{n+1}b_n\Delta_{n-1}$，容易算出 $\Delta_{n-1}=(-1)^na_2\cdots a_{n-1}c_n$，因此 $D_n=-a_2\cdots a_{n-1}b_nc_n$，对于其

他 $a_i=0(i\neq 1)$ 的情形类似可求得.

注意:形如 $\begin{vmatrix} * & * & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & * \\ & \iddots & \vdots \\ \iddots & & \vdots \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & * \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \vdots & & \iddots \\ \vdots & \iddots & \\ * & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ 的爪(箭)形行列式,可直接利用行列式性质将其化为上(下)三角形来计算.

例 20 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}(n>1)$.

解 把 D_n 的第 1 行各元素均乘以 -1,分别加到 $2,\cdots,n$ 行对应元素上,得到

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x-a_1 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

对此行列式各列分别提取公因子 $a_1-x,a_2-x,\cdots,a_n-x$,于是得

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{每列都加到第 1 列}}\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x}+\sum_{j=2}^{n}\frac{x}{a_j-x} & \frac{x}{a_2-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\left(\frac{a_1}{a_1-x}+\sum_{j=2}^{n}\frac{x}{a_j-x}\right).$$

注意:本例的 D_n 在化为三角形过程中得到式($*$)形式后,完全可用例 19 中 D_n 的结果计算,因此例 19 的 D_n 是具有普遍意义的,它必能化为上(下)三角形,不仅如此,形如

$$\begin{vmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} * & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \ddots \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & * \\ & & \iddots & \iddots \\ & \iddots & \iddots & \\ \iddots & \iddots & & \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} & & \iddots & \iddots \\ & \iddots & \iddots & \\ \iddots & \iddots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & * \end{vmatrix}$$

的(往往称为三线行列式)也必能化为上(下)三角形.

3)递推法 依据已给行列式 D_n 的特点,用行列式性质或依行(列)展开定理,建立同类型的 n 阶行列式与 $n-1$ 阶(或更低阶)行列式之间的递推关系式.根据递推关系式,求出 D_n 的一般表达式.

例 21 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

解 将 D_n 按第 1 行展开得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}, \tag{1}$$

把式(1)可以改写为 $D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})$.

对 D_{n-1} 按第 1 行展开,同样可得 $D_{n-1}-aD_{n-2}=b(D_{n-2}-aD_{n-3})$,

把此式代入前式得,$D_n-aD_{n-1}=b^2(D_{n-2}-aD_{n-3})$,

如此下去得,$D_n-aD_{n-1}=b^{n-2}(D_2-aD_1)$.

因为 $D_1=a+b, D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=a^2+ab+b^2$,

故得

$$D_n-aD_{n-1}=b^n. \tag{2}$$

同理对式(1)可以改写为 $D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})$,仿照上述推导可得

$$D_n-bD_{n-1}=a^n. \tag{3}$$

当 $a\neq b$ 时,由(2),(3)两式可得 $D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

当 $a=b$ 时,有递推关系式

$$D_n=aD_{n-1}+a^n, D_{n-1}=aD_{n-2}+a^{n-1}, \cdots, D_2=aD_1+a^2, D_1=a+a=2a,$$

即得 $\quad D_n=a^{n-1}D_1+(n-1)a^n=(n+1)a^n$.

4)降阶法　行列式计算的思想方法核心是降阶,通常采用依行(列)展开定理、拉普拉斯定理、分块行列式的降阶定理等进行计算.

5)升阶法　把 n 阶行列式适当地添加 m 行 m 列($m\geqslant 1$),使得到的 $n+m$ 阶行列式与原行列式值相等,而且这升阶后的行列式易于计算,进而求出原 n 阶行列式,此法也称加边法.

例 22 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$.

解 设 $\overline{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1-a & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_1 & x_2-a & \cdots & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}=D_n$,

把$\overline{D}_n$ 的第 1 列的$-x_i(i=1,2,\cdots,n)$倍分别加到$\overline{D}_n$ 的第$i+1$列，得

$$\overline{D}_n=\begin{vmatrix}1 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n\\ 1 & -a & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & -a & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a\end{vmatrix},$$

利用例 19 得

$$D_n=(-a)^n\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a}\right).$$

6)分解之和法　用行列式性质把 n 阶行列式 D_n 分解成同阶若干个行列式之和的形式.

例 23　若$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=m$，计算$\begin{vmatrix}4a_{11}-a_{12} & 3a_{11} & -a_{13}\\ 4a_{21}-a_{22} & 3a_{21} & -a_{23}\\ 4a_{31}-a_{32} & 3a_{31} & -a_{33}\end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix}4a_{11}-a_{12} & 3a_{11} & -a_{13}\\ 4a_{21}-a_{22} & 3a_{21} & -a_{23}\\ 4a_{31}-a_{32} & 3a_{31} & -a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4a_{11} & 3a_{11} & -a_{13}\\ 4a_{21} & 3a_{21} & -a_{23}\\ 4a_{31} & 3a_{31} & -a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-a_{12} & 3a_{11} & -a_{13}\\ -a_{22} & 3a_{21} & -a_{23}\\ -a_{32} & 3a_{31} & -a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=-12\begin{vmatrix}a_{11} & a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}a_{12} & a_{11} & a_{13}\\ a_{22} & a_{21} & a_{23}\\ a_{32} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=0+(-3)\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-3m.$$

7)分解之积法　用行列式乘法规则，把原行列式分解为两个行列式之积的形式.

例 24　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n\\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n\end{vmatrix}$.

解　D_n 可以分解为两个同阶行列式之积，即

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}=\begin{cases}0, & n>2,\\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2,\\ (a_1+b_1), & n=1.\end{cases}$$

8)归纳法　一般地，当推理关系仅联系相邻两个行列式时，要用第一数学归纳法；当推理关系联系相邻三个行列式时，则采用第二数学归纳法.

例 25 证明 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & x+a_{n-1} \end{vmatrix}=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

证明 对 D_n 的阶数 n 用第一数学归纳法.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_0 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_0$，因此结论成立.

假设对 $n-1$ 阶行列式结论成立. 下面证明 n 阶行列式 D_n 的情形.

把 D_n 按第 1 列展开，得 $D_n=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_0(-1)^{n-1}$，由归纳假设知

$$D_{n-1}=x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0,$$

故 $$D_n=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

例 26 证明 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha.$$

证明 （略，参考习题一中 19*. 题(2)）

9)应用范德蒙德行列式计算或证明某些繁杂行列式的方法.

形如 $V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

的行列式称为范德蒙德行列式，且

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

此法通常是结合前面诸法将行列式变形，化为范德蒙德行列式. 这是技巧较大的综合方法.

例 27 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

解 此行列式 D_n 貌似范德蒙德行列式，只是缺少以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为元素的第 2 行，而又多了以 $x_1^n,x_2^n,\cdots,x_n^n$ 为元素的第 n 行，为了计算 D_n，采用升阶法，将 D_n 变为 $n+1$ 阶范德蒙德行列式，即

$$V_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}.$$

对此有

$$V_{n+1}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\prod_{k=1}^{n}(y-x_k). \tag{1}$$

这时将 V_{n+1} 看作关于 y 的多项式. 把 V_{n+1} 按最后一列展开知，y 的系数为 $(-1)^{2+n+1}D_n$，但由式(1)易知 y 的系数为 $(-1)^{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$，因此

$$D_n=\sum_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

§1.3 历年考研真题解析

1.(2007 年，4 分)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

解 因为 $\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，所以秩$(\boldsymbol{A}^3)=1$.

2.(2008 年，4 分)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$，则(　　).

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

解 因为 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 均可逆. 故应选(C).

3.(2009 年，4 分)设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

分析 由于分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=6\neq 0$，即分块矩阵可逆，可根据公式 $\boldsymbol{C}^*=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1}$ 计算.