

学术理论研究著作集萃·理工学科

计算机辅助几何设计中 Jacobi基与螺线段之研究

蔡华辉 著

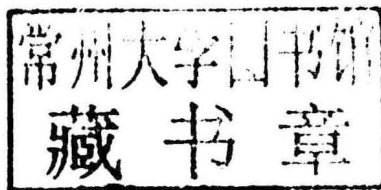


天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

学术理论研究著作集萃·理工学科

计算机辅助几何设计中 Jacobi 基与螺线段之研究

蔡华辉 著



 天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是讲述计算机辅助几何设计中有关 Jacobi 基与曲率单调螺线段的理论和应用的一部专著,是作者在博士论文及其后续科研工作基础上撰写而成的. 本书讲述了单变量和三角域上 Jacobi-Bernstein 基转换矩阵及其在降阶逼近等优化问题中的应用以及 C-Bézier 螺线段的构造及其在道路线型中的作用,还有一般螺线段的逼近技术.

本书可供应用数学、计算机辅助设计及计算机图形学等专业的科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

计算机辅助几何设计中 Jacobi 基与螺线段之研究/蔡华辉著. —天津:天津大学出版社,2011. 1

学术理论研究著作集萃. 理工学科

ISBN 978-7-5618-3838-9

I. ①计… II. ①蔡… III. ①计算机辅助设计—几何造型—研究 IV. ①TP391.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 012938 号

出版发行 天津大学出版社

出版人 杨欢

地址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)

电话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742

网址 www.tjup.com

印刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司

经销 全国各地新华书店

开本 185mm × 260mm

印张 7

字数 180 千

版次 2011 年 1 月第 1 版

印次 2011 年 1 月第 1 次

印数 1—1 000

定价 25.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

前 言

计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design,简称 CAGD)是涉及数学及计算机科学的一门边缘学科,主要研究在计算机图像系统的环境下对曲面信息的表示、逼近、分析和综合.研究内容包括曲线曲面的计算机表示、插值、拟合、逼近、拼接、离散、转换、求交、求导、求积、变形等内容.本书并不是 CAGD 的教科书,只是对 CAGD 中两个重要的内容——Jacobi-Bernstein 基转换和曲率单调螺线段进行专题研究.

本书是作者在浙江大学数学系计算机辅助设计与图形学科研组(CAGD&CG Group)师从王国瑾教授攻读博士学位期间及毕业后在景德镇陶瓷学院信息工程学院工作期间的科研成果总结.本书共分 6 章:第 1 章简述了 CAGD 的历史和在本书中要用到的数学工具;第 2、3 章论述了单变量和三角域上 Jacobi-Bernstein 基转换理论及应用;第 4、5 章论述了利用 C-Bézier 曲线如何构造单调曲线的方法及其在道路轨道线型设计中的作用;第 6 章论述了一般螺线段适合 CAGD 系统的逼近方法.

本书在写作和出版过程中得到了国家自然科学基金“几何设计与计算最优化研究”(60673031),“计算机辅助设计中的几何逼近新技术研究”(6087311),“计算机辅助设计与图形学中的全新几何变换”(61070065),江西省教育厅青年科学基金“外形设计中的几何逼近新方法研究”(GJJ11200)以及景德镇陶瓷学院博士研究生科研启动经费的资助,同时在本书的写作过程中也得到了院系领导及家人多方面的帮助,在此表示感谢.

蔡华辉

2010. 10

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 计算机辅助几何设计简介	(1)
1.2 Bézier 曲线曲面	(8)
1.3 CAGD 中的 Jacobi 多项式	(18)
1.4 曲率和螺线段	(19)
第 2 章 单变量 Jacobi-Bernstein 基转换理论	(21)
2.1 前言	(21)
2.2 Jacobi 多项式与 Bernstein 多项式转换公式	(22)
2.3 加权 L_2 范数下 Bézier 曲线的最佳降阶逼近	(27)
2.4 单调多项式求逆的约束 Jacobi 逼近方法	(36)
第 3 章 三角域上双变量 Jacobi-Bernstein 基转换	(43)
3.1 前言	(43)
3.2 三角域 Jacobi-Bernstein 基的转换	(44)
3.3 加权 L_2 范数下三角域 Bézier 曲面的降阶逼近	(51)
第 4 章 三次 C-Bézier 螺线	(56)
4.1 前言	(56)
4.2 三次 C-Bézier 螺线及其曲率	(58)
4.3 三次 C-Bézier 螺线在道路设计中的应用	(62)
第 5 章 两圆间一条 C-Bézier 曲线过渡	(74)
5.1 前言	(74)
5.2 两圆弧间 C-Bézier 拼接曲线的构造	(76)
5.3 应用及结论	(84)
第 6 章 螺线段逼近	(86)
6.1 前言	(86)
6.2 螺线的多项式逼近	(87)
6.3 螺线的 C-Bézier 逼近	(92)
6.4 应用及结论	(94)
参考文献	(97)

第1章 绪 论

1.1 计算机辅助几何设计简介

计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design,简称为CAGD)是涉及数学及计算机科学的一门新兴的交叉学科,主要研究在计算机图像系统的环境下对曲线曲面的表示和逼近.它是随着航空、汽车、轮船、机械设计和制造等现代工业以及计算机技术的迅猛发展而迅速发展起来的,是密切联系生产实践且随着生产实践的需要而不断完善发展的新兴学科,是当代高技术学科之一.其应用范围除了飞机、船舶、汽车这三大制造业外,还涉及工程器件模具设计、生物工程、医疗诊断、航天材料、电子工程、机器人、服装鞋帽模型设计等多个技术领域.随着计算机图形学的发展,它还广泛应用于计算机视觉、地形地貌、军事作战模拟、动画制作、多媒体技术等领域.

1974年,Barnhill和Risenfeld在美国犹他大学主持召开了一个对本学科的形成具有深远意义的国际会议,并且CAGD这一术语由他们在会议上首次提出,随之出版了与之同名的会议论文集,被视为CAGD发展史上的奠基性事件.1979年,由Faux和Prutt编写的本领域的第一本教科书“Computational Geometry for Design and Manufacture”正式出版.1984年,本领域的专业性学术杂志“Computer Aided Geometric Design”由Barnhill和Boehm正式创立,它与另一专业性国际杂志“Computer-Aided Design”共同推动CAGD学科的发展,这也标志着CAGD作为一门独立的学科正式成立.

1.1.1 CAGD的发展简史

CAGD起源于船舶、飞机的外形放样工艺.根据史料记载,早在古罗马时代,造船工匠们就已开始利用木质样板来记录船体的外形.据记载,当时船体的肋材,即沿着龙骨延伸出的木板,就是使用模板来制造的.模板里保存的船体的基本几何信息可以反复使用,不必每次重新构建.这些技术从13世纪到16世纪就被威尼斯人熟练掌握并进一步完善,肋材的形状由切向连续的圆弧段确定,就是当

今的非均匀有理 B 样条(Non-Uniform Rational B-spline Surface, 简称 NURBS), 沿着龙骨调节肋材就可以得到船壳, 它是现在张量积曲面的早期表现图, 如图 1.1 所示. 而经典的“样条”(spline)一词, 最早出现在 1752 年, 指的是用于绘制光滑曲线的木条. 直到现在, CAGD 各种技术在造船业上仍然得到广泛应用. 航空业是 CAGD 的另一个关键起源. 1944 年, Liming 撰写了一本名为“Practical Analytical Geometry with Application to Aircraft”的书, 书中首次将经典制图方法与计算技术结合起来. 他将经典的草图制作改变成数值算法, 这便是 CAGD 中利用控制网格来控制曲线曲面形状这一思想的雏形. Liming 的工作成果被美国飞机制造公司广泛地采用, 在 20 世纪 50 年代产生了重大的影响. 图 1.2 给出了一个 Liming 构造的飞机座舱的草图.

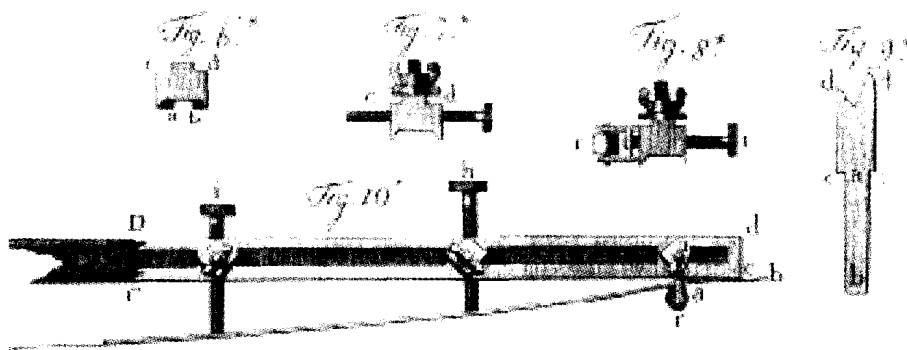


图 1.1 样条

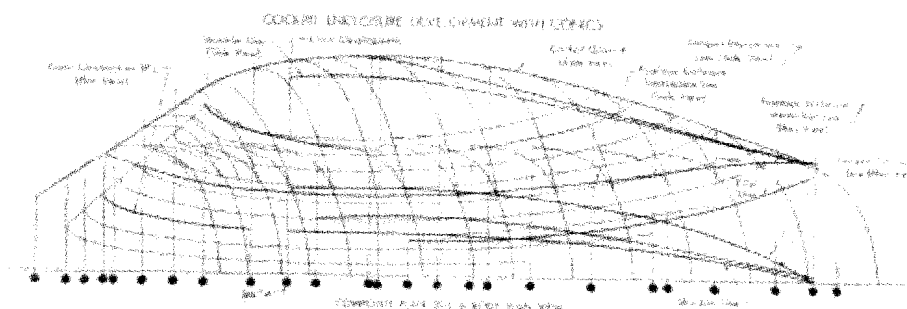


图 1.2 战斗机座舱的二次曲线构造

在先进的计算机问世之前, 船体等设计传统上采用模线样板法来表示和传递自由型曲线曲面的形状. 这种采用模拟量传递信息的设计制造方法所表示与传递的几何形状因人而异, 要求设计与制造人员付出繁重的体力劳动, 设计制造周期长, 制造精度低, 互换协调性差, 不能适应现代工业的发展. 人们一直在寻求用数学方法唯一地定义自由型曲线曲面的形状, 将形状信息从模拟量改变为

数值量. 由此而引发的大量计算工作手工无法完成, 只能由计算机来完成. 随着计算机的出现, 采用数学方法定义自由型曲线曲面才达到实际应用的地步, 这导致了 CAGD 的产生与发展.

20 世纪 50 年代后期, 数控机床开始涌现, 制模和生产更可以由计算机编程进行. 为了充分发挥其作用, 需要把存在的曲面数字化, 即把曲面分成一堆采样点的坐标, 这对 CAGD 的起源有着重要影响. 但真正奠定基础的是 Coons (1912—1979)、Bézier (1910—1999) 等大师在 20 世纪 60 年代的研究工作.

1963 年, 美国波音 (Boeing) 公司的 Ferguson 首次将参数曲线曲面在数学上用参数矢量函数的方式来表示. 他用 $(1, t, t^2, t^3)$ 为基函数, 构筑了由 4 个角点的位置和切矢量定义的 Ferguson 双三次曲面片. 在此之前, 曲线曲面的描述一直是采用显示函数或隐方程形式, Ferguson 采用自由曲线曲面的参数表示方法, 具有可进行人机交互、几何不变性、可处理无穷大斜率、易于坐标变换等优点. 从此曲线曲面的参数化形式逐渐取代了曲线曲面的早期描述形式, 即隐函数形式, 成为数学描述几何形状的标准形式.

1964 年, 美国麻省理工学院 (MIT) 的 Coons 引入超限插值的概念, 发表了一种具有一般性的曲面描述方法, 即 Coons 曲面. 该方法的基本思想是将曲面分片, 然后拼合造型, 每个曲面片由 4 条边界定义, 用其 4 个角点处的位矢、切矢和扭矢等信息来控制, 即只要给定围成封闭曲面的 4 条边界就可以定义曲面片. 1967 年, Coons 进一步推广了他的思想, 利用 Hermite 基来定义插值算子, 得到 Coons 混合曲面. Coons 的方法在曲线曲面造型中具有重要的历史地位, 它在飞机外形设计中也取得了极大的成功. 在 CAD 工程的实践中, 应用最广泛的还是 Coons 双三次混合曲面片. 它与 Ferguson 双三次曲面片的区别, 只在于将角点扭矢由零矢量改为非零矢量. 但 Coons 曲面需要指定角点处的位矢、切矢和扭矢在内的 16 个向量, 存在所需信息过多、曲面片之间难以光滑拼接、角点扭矢与曲面形状无直观联系而导致曲面形状控制不便等缺点, 使计算复杂且构造困难, 因此使用不太方便.

从 1962 年起, 法国雷诺 (Renault) 汽车公司的工程师 Bézier 开始构造以逼近为基础的参数曲线表示方法, 并据此在雷诺汽车公司建立了著名的 UNISURF 自由曲线曲面设计系统. 此方法是用控制多边形定义曲线的方法, 设计员只要移动控制顶点就可修改几何形状. 这种方法不仅直观、形象、简单易用, 而且漂亮地解决了曲线曲面整体形状控制问题. 稍早于 Bézier, 在法国雪铁龙 (Citroën) 汽车公司工作的 de Casteljau 也曾独立地研究发展了同样的方法, 但结果没有公开发表.

随后,Forrest、Gordon 和 Riesenfeld 对 Bézier 方法作了深入研究. Forrest 提出了如今通用的定义,指出它恰好就是 Bernstein 基与控制顶点的线性组合,即

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, 0 \leq t \leq 1,$$

其中 $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, i=0,1,\dots,n$ 为 n 次 Bernstein 基函数,从而使其具

有更加坚实的理论基础. Bézier 曲线曲面具有一系列优越的几何性质,如几何与仿射不变性、凸包性、保凸性、端点插值性等,且具有如 de Casteljau 求值、离散、升阶、包络生成算法等稳定简单的计算方法. Bézier 方法在计算机辅助几何设计学科中占有重要地位,为曲线曲面造型技术的进一步发展奠定了坚实基础,是 CAGD 发展中的重要里程碑. 但是 Bézier 方法仍存在连接问题和局部修改问题.

1946 年,美国数学家 Schoenberg 首次提出了样条函数的思想,用分段函数来拟合给定的一组数据点,函数段间保持高阶连续;1947 年,他提出了 B 样条的一般理论,但是其论文在 1967 年才发表,他的杰出工作为现代样条函数的理论与方法奠定了基础. 1974 年, Gordon 和 Risenfeld 在研究 Bézier 的基础上,用 B 样条基替换 Bernstein 基,构筑了 B 样条曲线曲面. 它除保持原 Bézier 曲线曲面所具有的优点外,还具有对曲线局部修改、与特征多边形更逼近、多项式阶次较低等优点,又能轻而易举地在参数连续性基础上解决曲线连接问题,从而使自由型曲线曲面形状的描述问题得到较好解决. B 样条曲线包含了 Bézier 曲线这种特殊情况,并且很快成为了几乎所有 CAD 系统的一项核心技术. 在 B 样条技术的发展中, de Boor 和 Cox 分别给出了关于 B 样条计算的标志算法, Boehm 和 Cohen 等人给出了 B 样条曲线的节点插入算法, Prautzsch 等人发展了 B 样条曲线的升阶技术.

虽然 B 样条曲线曲面较成功地解决了自由曲线曲面形状的描述问题. 然而,在进行外形设计中,常常会遇到需要对圆锥曲线或初等解析曲面进行表示的情形. 多项式形式的曲线曲面在表示与设计一般自由曲线曲面形状时取得了良好的效果,但是面对圆锥曲线或初等解析曲面时却遇到了麻烦. 比如圆锥曲线除抛物线外都不能由多项式曲线精确表示,这就使得曲线曲面不能有一个统一的数学表示,违背了产品几何定义唯一性的基本原则. 因而,有理形式的参数曲线曲面获得了人们的关注. 1975 年,美国 Syracuse 大学的 Versprille 在他的博士论文中首次将 B 样条推广到有理形式. 其后, Piegl 和 Tiller 将有理 B 样条发展为 NURBS,并为了将 NURBS 推向实用作了大量研究. NURBS 曲线既有 B 样条曲线

形状局部可调及连续阶数可调的优点,又兼有可精确表示二次曲线的特征,从而能用统一的数学形式表示规则曲线曲面和自由曲线曲面,终于使非均匀有理 B 样条(NURBS)方法成为现代曲线曲面造型中最为广泛流行的技术. 鉴于 NURBS 的强大功能,1991 年国际标准化组织(International Standardization Organization, 简称 ISO)颁发了关于工业产品数据交换的 STEP(Standard for The Exchange of Product model data)国际标准,把 NURBS 作为定义工业产品几何形状的唯一数学方法. 在 1991 年,NURBS 成为规定独立于设备的交互图形编程的 PHIGS(Programmer's Hierarchical Interactive Graphics System)国际标准. 从而使 NURBS 方法成为曲线曲面理论发展中最重要基础.

但是,NURBS 曲线仍然不能表示常用的超越曲线,如摆线、螺旋线、悬链线等;而且它们的有理表示形式使 k 次曲线求导后产生 $2k$ 次有理曲线,反复求导易产生高次曲线,增加了处理难度和数值不稳定性. 近年来,为了克服 NURBS 方法的一些缺陷,许多学者提出了曲线曲面的其他表现方法. 在有理曲线的工程应用中,一类新颖的 Ball 曲线及其衍生出来的曲线尤其引人注目. 1974 年,英国数学家 Ball 首创一种有理三次参数曲线,并以此作为 Warton 前英国航空公司的 CON-SURF 机身曲面造型系统的数据基础;随后,Said 和王国瑾分别推广了 Ball 曲线;胡事民等把以上两种广义 Ball 曲线冠以“Said-Ball”和“Wang-Ball”的称呼,并把它们与 Bézier 曲线在递归求值、包络性质、升降阶算法等方面作了系统的对比研究. Basky 提出了 Beta 样条曲线;Loe 将普通 B 样条曲线和它的控制多边形按混合因子 α 进行混合,构造了 α -B 样条曲线,之后 Tai 等人对这类曲线作了进一步的研究;Costantini 取每段曲线的次数作为形状参数,通过调节各段曲线的次数,来调整曲线的形状;Pottmann 首次把代数多项式和三角函数混合起来构造了一种样条函数,称为螺线样条,可以精确地表示直线、圆、螺旋线,而且其参数为弧长参数;同时,张济文也独立地在空间 $\Gamma_3 = \text{span}\{1, t, \sin t, \cos t\}$ 上构造了 3 次 C-Bézier 与 C-B 样条曲线,虽然这与 Pottmann 提出的螺旋样条在本质上是一致的,但他不仅给出了 C-B 样条基函数的显式表示,同时还给出了 C-B 样条曲线和 C-Bézier 曲线的互化公式,使 C-B 样条曲线作为 3 次均匀 B 样条曲线的一个推广,另一方面, C-B 样条曲线还可以精确表示椭圆、圆弧,使得其可能成为 CAD/CAM 系统中几何造型的一个重要工具;后来,汪国昭等根据三角函数或指数函数对积分与微分运算均封闭的特点,用积分和递推的定义给出了两种混合形式的 C-Bézier 与 C-B 样条基函数,其拥有 Bézier 与 B 样条的大多数性质,如连续性、归一性、变差缩减性、凸包性、细分性等,还能精确表示圆、椭圆等非多项式曲线,

把 3 次 C-Bézier 与 C-B 样条曲线推广到高次代数三角和代数双曲空间.

为了处理图形工业对任意拓扑结构的光滑曲面造型的需求,且随着 20 世纪 90 年代计算机硬件水平的提高,以网格细分(subdivision)为特征的离散造型技术得到了高速发展. 细分曲面是一个网格序列的极限,网格序列则是通过采用一组规则(一般是加权平均)在给定初始网格中插入新顶点并不断重复此过程而获得. 这种方法克服了参数曲面处理任意拓扑网格存在的困难. 因为在不规则拓扑处只须采用特殊的细分规则就可以了,不存在拼接的问题. 20 世纪 70 年代中期, Chaikin 把离散细分的概念引入到计算机图形. 其后,为了将 B 样条曲面推广到任意拓扑网格上, Catmull 和 Clark 提出了 Catmull-Clark 细分模式, Doo 和 Sabin 提出 Doo-Sabin 细分模式,标志着细分方法正式成为曲面建模的手段,从此,细分曲面造型得到了广泛深入的研究. 这种直接从离散到离散的造型方法与传统的曲线曲面连续模型不同,它一般没有显式表示,仅仅给出一个算法来描述造型过程,用加密的离散点列或点阵来直接表达曲线曲面的信息. 现在,细分曲面在生动逼真的特征动画和雕塑曲面的设计加工中得到了高度的运用. 在这一方法中,较著名的技术除了 Catmull-Clark 方法和 Doo-Sabin 方法外, Loop 细分、Butterfly 细分、 $\sqrt{3}$ 细分、非流形上的细分都是常用的方法. 许多商业图形动画软件,如 Alias Waveront 公司的 Maya, Pixar 公司的 Renderman, Nichiman 公司的 Mirai 以及 Micropace 公司的 Lightwave 3D 等都将细分曲面作为一种重要的曲面表示方法. 总的来说,细分方法存在以下几方面优点:①能够处理任意拓扑的控制网格;②在进行局部特征调控的同时能够保证曲面整体的光滑性;③该方法是联系连续模型和离散表示的桥梁;④算法实现简单等. 随着激光测距扫描等三维数据采集技术以及硬件设备的快速发展,随着图形工业界对任意拓扑结构的光滑曲面造型的热切需求,网格细分离散造型与传统的连续造型相比,前者大有后来居上之势.

为了所得曲面自然光顺,且确定一张曲面只需少量的参数. 许多学者研究了基于物理模型的造型方法. 基于物理模型的曲面造型方法是把曲面看作由一系列关于弹性固体变形的物理定律的方程所控制的曲面,这些物理定律可能用积分形式表示,这时曲面的平衡状态表示了某种潜在能量的最小,这种方法也称为基于能量的方法;这些物理定律也可能用微分形式表示,这时曲线形状看成是某类偏微分方程(Partial Differential Equation, 简称 PDE)的解,这种方法也称为基于偏微分方程的方法. 基于能量的方法是加拿大学者 Terzopoulos 等在 1987 年首次将其应用到计算机图形学领域,用来模拟圆球压在弹性立方体上引起的变形、

旗帜在风中飘摆以及地毯飘落等动态过程,取得了非常好的效果.在基于物理的方法中,使用更加广泛的是基于PDE的造型技术.PDE方法是由英国Leeds大学的Bloor等人于20世纪80年代末引入CAGD领域的.经过二十年的发展,PDE的方法在过渡曲面、自由曲面的造型中发挥了巨大作用,PDE方法也应用于功能曲面设计中,如船体、飞机、螺旋桨叶片等外形造型中.在国内,朱心雄成功地将PDE复杂曲面造型应用于各个领域,徐国良等研究了几何偏微分方程的数值解法在 N 边域曲面造型中的应用.总之,由于PDE方法构筑处的曲面较传统造型方法有着更良好的光顺性,且构造曲面方法简单,引进的参数少,便于交互使用和形状控制,所以PDE造型方法有着极为广阔的应用前景.

另外,在工程实际应用中还有许多其他的造型方法,例如:小波曲线曲面的造型方法、分形造型技术、基于测地线的造型方法、T样条方法等.随着应用领域的扩大和对造型质量要求的提高,人们还在不断地发展新的造型方法.

总之,随着计算机图形显示对于真实性、实时性和交互性要求的日益增强,随着图形工业和制造工业迈向一体化、集成化和网络化步伐的日益加快,随着激光测距扫描等三维数据采样技术和硬件设备的日益完善,计算机辅助几何设计在近几年来得到了迅猛的发展.这主要表现在研究领域的急剧扩展,表示方法的不断涌现和研究工具、研究方法的开拓创新.从研究领域来看,计算机辅助几何设计技术已从传统的研究曲面表示、曲面求交和曲面拼接,扩充到曲面变形、曲面重建、曲面简化、曲面转换和曲面位差;从表示方法来看,以网格细分为特征的离散造型与传统的连续造型相比,大有后来居上之势;从研究工具、研究方法来看,它几乎涉及数学的各个重要分支,如微分几何、代数几何、函数逼近论、拓扑学、抽象代数、矩阵论、微分方程、最优化、数值分析等数学分支,此外还与计算机辅助设计/加工(CAD/CAM)、数据结构、数控(NC)、程序设计、计算机动画等有了紧密联系.

1.1.2 几何设计的研究课题

计算机辅助技术与计算机图形学是现代信息科学的一个重要研究领域.计算机辅助技术的一个重要内容是计算机辅助几何设计.而计算机辅助几何设计的课题主要包括对曲线曲面的几何表示、几何造型、几何计算、几何逼近、几何处理.这些课题与数学的严谨性和先进性以及产品外形设计的功能、效果、效率紧密相关.

计算机辅助几何设计是几何学与计算机的完美结合,是研究三维几何信息

在计算机内的表示和造型,是随着造船、航空、汽车等现代工业发展与计算机的出现而产生与发展起来的一门新兴交叉学科.几何表示与几何造型是几何设计的理论支柱;几何计算、几何逼近与几何变换又是几何设计的核心技术.如图 1.3 所示.

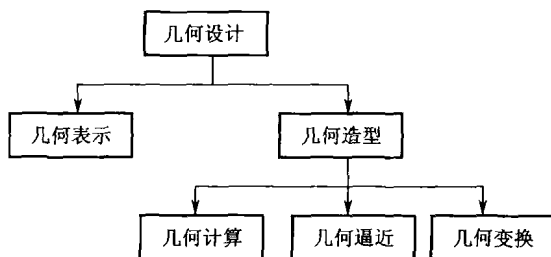


图 1.3 几何设计研究课题及关系

几何表示的核心问题是曲线曲面的计算机表示,即要找到既适合计算机处理且有效地满足形状表示与几何设计要求,又便于形状信息传递和产品数据交换的形状描述的数学方法.从表现形式来看,有传统的连续表示与以网格细分为特征的离散表示.

几何造型是以几何表示为基础,对计算机中曲线曲面的形状进行交互式的显示与控制.它是几何设计内在的理论基础和关键技术.几何造型将计算机对海量数据的存储及处理和挖掘能力与人的综合分析及创造性思维能力结合起来,在加速产品开发、缩短设计制造周期、降低成本、提高质量、增强企业市场创新能力与竞争能力发挥着重要作用.它是体现一个国家现代化、信息化程度的一个重要指标.

所谓几何计算,系指对曲线曲面的几何特征量化、几何关系判断、几何形式转化与数字几何处理;所谓几何逼近,系指对曲线曲面的近似几何表示与区域几何表示;这两者在数学上的严谨性和先进性与几何设计编码的功能及效率休戚相关.

1.2 Bézier 曲线曲面

Bézier 曲线与曲面是 CAGD 中最基本的造型工具之一.它在 CAGD 学科中占有重要地位,它把曲线曲面的设计思想向前推进了一大步,为参数曲线曲面造型的进一步发展奠定了坚实的基础. Bézier 方法将数学中几何直观和函数逼近论紧密联系在一起,使得工程师在计算机上设计曲线曲面就如同使用作图工具一样得

心应手.

1.2.1 Bézier 曲线

Bézier 曲线系由法国工程师 Bézier(1910—1999)于1962年提出,并据此在雷诺(Renault)汽车公司建立了著名的 UNISURF 自由曲线曲面设计系统,将其用于汽车车身的设计与制造过程. Bézier 曲线曲面由控制顶点的位置唯一决定,从而把对曲线曲面的构造与形状修改转化为对控制顶点的修改,操作直观简洁,可控性良好. 设计人员只要移动控制顶点就可方便地修改曲线的形状,且形状的改动也在预料之中. 这种设计方法,彻底改变了汽车制造业的面貌. 而稍早于 Bézier,在法国雪铁龙(Citroën)汽车公司工作的 de Casteljau 也曾独立地研究发展了同样的方法,但其结果从未公开发表. 当年 Bézier 提出的曲线表达式为

$$P(t) = \sum_{j=0}^n A_j^n(t) a_j, 0 \leq t \leq 1,$$

其中

$$A_0^n(t) = 1, A_j^n(t) = \frac{(-t)^j}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} \left[\frac{(1-t)^{n-1} - 1}{t} \right], j=1, 2, \dots, n.$$

这一定义十分奇特,几何意义不明显,令人难以接受. 直到1972年,Forrest 揭示了 Bézier 方法与 Bernstein 多项式之间的联系,指出 Bézier 曲线恰好就是 Bernstein 基与控制顶点的线性组合,这也就是我们习惯的定义.

定义 1.1 给定空间 $n+1$ 个点向量 $\{P_i\}_{i=0}^n$, 则与其相应的曲线

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, 0 \leq t \leq 1 \quad (1.1)$$

称为 n 次 Bézier 曲线, $P_0 P_1 \cdots P_n$ 称为曲线(1.1)的控制多边形或 B 网,记为 Γ_n, P_i ($i=0, 1, \dots, n$) 称为控制顶点, $B_i^n(t)$ 是 n 次 Bernstein 基函数,且

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i! (n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}, i=0, 1, \dots, n.$$

利用 Bernstein 基的非负性和权性

$$B_i^n(t) \geq 0, \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1,$$

可得 Bézier 曲线具有以下一些基本几何性质.

性质 1.1 (端点性质) 曲线 $P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, 0 \leq t \leq 1$ 在两端点与控制多边形端点重合,端边相切. 即

$$P(0) = P_0, P(1) = P_n;$$

$$P'(0) = n(P_1 - P_0), P'(1) = n(P_n - P_{n-1}).$$

又由于 Bézier 曲线 $n+1$ 个控制顶点 $\{P_i\}_{i=0}^n$ 无重点, 其 k 阶导矢曲线是以 $\{(n!/(n-k)!) \Delta^k P_i\}_{i=0}^{n-k}$ 为控制顶点的 $n-k$ 次 Bézier 曲线, 即

$$\frac{d^k}{dt^k} P(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} B_i^{n-k}(t) \Delta^k P_i, k=0, 1, \dots, n.$$

因此, 两端点处的 k 阶导矢只与前、后 $k+1$ 个控制顶点有关, 即

$$P^{(k)}(0) = (n!/(n-k)!) \Delta^k P_0, P^{(k)}(1) = (n!/(n-k)!) \Delta^k P_{n-k}, k=0, 1, \dots, n.$$

其中 Δ 是向前差分算子, $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$.

性质 1.2 (几何不变性和仿射不变性) 曲线仅依赖于控制顶点, 而与坐标系的位置和方向无关, 即 Bézier 曲线的形状经过坐标系平移和旋转后不变; 同时, 对控制多边形进行缩放或剪切等仿射变换后所对应的新 Bézier 曲线就是相同仿射变换后的 Bézier 曲线.

性质 1.3 关于参数 t 与 $(1-t)$ 具有对称性. 以 $P_n P_{n-1} \cdots P_0$ 为控制多边形的 Bézier 曲线就是以 $P_0 P_1 \cdots P_n$ 为控制多边形的 Bézier 曲线, 只不过定向相反, 即令 $u = 1-t$ 可得

$$P(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) P_{n-i} = \sum_{i=0}^n B_{n-i}^n(t) P_{n-i} = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) P_j = P(t).$$

性质 1.4 (凸包性) 曲线位于控制顶点 $P_0, P_1, \dots, P_n$ 的凸包内, 即位于包含这 $n+1$ 个点的最小凸集内.

性质 1.5 (变差缩减性) 平面 Bézier 曲线与此平面内任一直线的交点个数不多于其相应的控制多边形与该直线的交点个数.

此性质反映了 Bézier 曲线比其控制多边形的波动要小, 因此, 若以围绕任一直线摆动的次数来刻画光滑性, 则平面 Bézier 曲线的光滑性不低于其控制多边形的光滑性.

性质 1.6 (升阶公式) n 次 Bézier 曲线可形式上看作 $n+1$ 次 Bézier 曲线, 即

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i = \sum_{i=0}^{n+1} B_i^{n+1}(t) \hat{P}_i,$$

其中

$$\hat{P}_i = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i + \frac{i}{n+1} P_{i-1}, P_{-1} = P_{n+1} = 0.$$

换言之,利用升阶算子 $A = A_{n+1}$ 可把曲线升阶到 $n+1$ 次,其控制顶点可表示为

$$A_{n+1}(P_0, P_1, \dots, P_n)^T = (\hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_{n+1})^T,$$

其中

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n+1} & \frac{n-1}{n+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n+2) \times (n+1)}.$$

升阶公式的几何意义可解释为对于控制多边形 Γ_n 的割角,即用升阶算子 A 作用一次得到割角多边形 $A\Gamma_n$,它产生了对原曲线更紧的界定和逼近;多了一个控制顶点,也增加了调整曲线形状的柔韧性,这是其两个优点,见图 1.4. 且当升阶不断进行时,Bézier 网被密化,最后当 $k \rightarrow \infty$ 时它的升阶序列 $A^0\Gamma_n, A^1\Gamma_n, \dots, A^k\Gamma_n$ 收敛到原始控制多边形 Γ_n 所定义的 Bézier 曲线. 升阶增加了控制顶点数,不仅增加了对曲线进行形状调控的灵活性,还在构造曲面方面有着重要的应用. 例如,对于一些由曲线生成曲面的算法,要求那些曲线必须是同次的,应用升阶的方法可以把低于最高次数的曲线提升到最高次数,使所得曲线具有相同的次数.

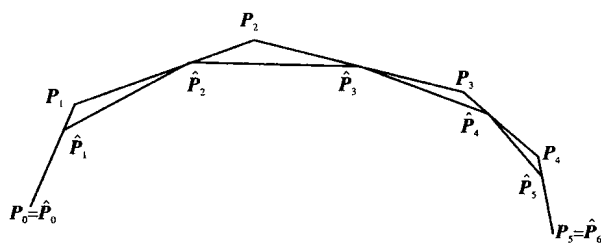


图 1.4 Bézier 曲线的升阶

性质 1.7 (de Casteljau 算法, 即递推求值算法) Bézier 曲线上任一点 t 的值的递推计算公式为

$$\begin{cases} P_i^r(t) = (1-t)P_{i-1}^{r-1}(t) + tP_i^{r-1}(t), r=1, 2, \dots, n; i=r, r+1, \dots, n, \\ P_i^0(t) \equiv P_i^0 = P_i, i=0, 1, \dots, n, \end{cases}$$

(1.2)

则 $P_n^n(t)$ 就是欲求的 $P(t)$, 且直线 $P_{n-1}^{n-1}(t)P_n^{n-1}(t)$ 是曲线在点 $P_n^n(t)$ 处的切线.

当年, Bézier 在给出 Bézier 曲线的同时, 也提出求曲线上一点之值及其切线的递归算法, 其几何意义是递归割角, 也就是著名的作图定理, 因而也可用它作为 Bézier 曲线的几何定义. 但事实上, 早于 Bézier, 1959 年前后, 法国雪铁龙汽车公司的 de Casteljau 已经发现了这种曲线的表示法和算法, 因此人们常称这种递归求值法为 de Casteljau 算法, 如图 1.5 和图 1.6. 此算法稳定可靠, 直观简洁, 是计算 Bézier 曲线的标准算法.

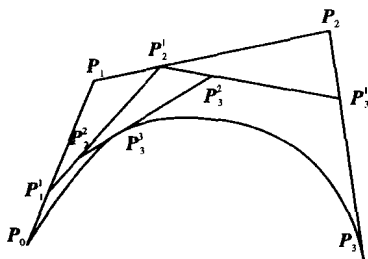


图 1.5 Bézier 曲线作图法

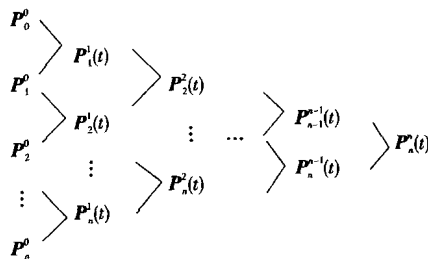


图 1.6 割角算法的顶点示意

性质 1.8 (离散公式) 任一 Bézier 曲线 $P(t)$ ($a \leq t \leq b$) 在其定义区间内任一点 c 处可被离散 (Subdivision, 也称为分割或子分) 为两条同次 Bézier 子曲线, 即对 $c \in (a, b)$, 且

$$\lambda = (c - a) / (b - a) \in [0, 1],$$

只要按照割角算法式 (1.2) 算得 $P_i^r(c)$, $r = 0, 1, \dots, n; i = r, r + 1, \dots, n$, 就有

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n \left(\frac{t-a}{b-a} \right) P_i = \begin{cases} \sum_{i=0}^n B_i^n \left(\frac{t-a}{c-a} \right) P_i^r(\lambda), & a \leq t \leq c, \\ \sum_{i=0}^n B_i^n \left(\frac{t-c}{b-c} \right) P_{n-i}^{n-r}(\lambda), & c < t \leq b. \end{cases}$$

对这一离散公式, 实际应用时, 常取 $c = 1/2$, 称之为在中点离散. 这样, 式 (1.2) 中的除以 2 的运算在计算机二进制中可以用右移一位来实现, 运算速度快, 也便于固化. 性质 1.8 的几何意义是递归割角. 若应用此定理 k 次, 则生成 2^k 条子曲线和具有 $2^k n$ 边的多边形. 可以证明, 当此多边形的最大边长趋于零时, 多边形本身一致收敛到原 Bézier 曲线.

利用 Bézier 曲线造型, 只要输入控制顶点就可显示曲线或人机交互修改曲线形状. 特别注意到 i/n 是基函数 $B_i^n(t)$ 的最大值点, 可知改动顶点 P_{i_0} 时, 曲线上点 $P(i_0/n)$ 处变动最大, $0 \leq i_0 \leq n$.