走向IMO

# 数学奥林匹克试题集锦

# (2009)


顾问　裘宗沪

2009年IMO中国国家集训队教练组　编



华东师范大学出版社

走向IMO

# 数学奥林匹克试题集锦（2009）

2009年IMO中国国家集训队教练组　编

华东师范大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

走向IMO:数学奥林匹克试题集锦.2009/2009年IMO中国国家集训队教练组编.—上海:华东师范大学出版社,2009

ISBN 978-7-5617-7107-5

Ⅰ.走… Ⅱ.2… Ⅲ.数学课-中学-竞赛题 Ⅳ.G634.505

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第121294号

**走向IMO**

# 数学奥林匹克试题集锦(2009)

编　　者　2009年IMO中国国家集训队教练组
策划编辑　倪　明(数学工作室)
审读编辑　孔令志　徐惟简
装帧设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电话总机　021-62450163转各部门　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　890×1240　32开
插　　页　4
印　　张　5.75
字　　数　134千字
版　　次　2009年8月第一版
印　　次　2009年8月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-7107-5/G・4103
定　　价　18.00元

出 版 人　朱杰人

50th International Mathematical Olympiad

Bremen | Germany | 2009


2009年中国队载誉归来

从左到右依次为：

第1排　郑志伟　黄骄阳　林　博　赵彦霖　韦东奕　郑　凡
第2排　冷岗松　朱华伟　王　杰　熊　斌　付云皓


陶哲轩会见中国队

从左到右依次为：

林　博　赵彦霖　朱华伟　郑　凡　韦东奕　陶哲轩　郑志伟
付云皓　黄骄阳　Chenshuai Sui(向导)　熊　斌　冷岗松

# 前　言

本书以2009年国家集训队的测试题和国家队的训练题为主体，搜集了2008年8月至2009年7月间国内主要的数学竞赛及2009年国际数学奥林匹克试题和解答，并且附上了2009年美国数学奥林匹克、俄罗斯数学奥林匹克和罗马尼亚大师杯数学奥林匹克的试题与解答. 这些试题大多是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，其中的一些解答源自国家集训队和国家队队员，他们的一些巧思妙解为本书增色不少.

在过去的一年中，我国中学生数学竞赛的主要赛事有2008年全国高中数学联赛(由中国数学会普及工作委员会主办)，2009年中国数学奥林匹克(CMO)(由中国数学奥林匹克委员会主办)，以及由中国数学奥林匹克委员会主办的第7届中国女子数学奥林匹克(CGMO)和第8届中国西部数学奥林匹克(WCMO)等.

在2009年国家集训队和国家队集训期间，得到了裘宗沪、王杰、潘承彪等专家们的鼓励、支持和指导. 另外在国家集训队集训期间，我们邀请了美国国家队领队冯祖鸣先生、湖南师范大学张垚教授和上海中学特级教师冯志刚为学生做了专题讲座. 在国家队集训期间，潘承彪教授和姚健钢、叶中豪先生也为学生做了精彩的报告，在此对他们表示衷心的感谢.

本书倾注了许多专家和学者的心血，书中有许多他们的创造

性的工作.本书可供数学爱好者、参加数学竞赛的广大中学生、从事数学竞赛教学的教练员、开设数学选修课的教师参考.

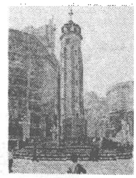
2008 年全国高中数学联赛及加试由吴建平整理,2009 年中国数学奥林匹克由陈永高整理,2008 年第 7 届中国女子数学奥林匹克由李胜宏整理,2008 年第 8 届中国西部数学奥林匹克由刘诗雄整理,2009 国家集训队测试题由朱华伟和冷岗松整理,2009 年中国国家队选拔考试题由余红兵整理,2009 年国际数学奥林匹克(第 50 届 IMO)由朱华伟和付云皓整理.2009 年美国数学奥林匹克由冯志刚提供,2009 年俄罗斯数学奥林匹克由李伟固提供,2009 年罗马尼亚大师杯数学奥林匹克由熊斌提供.

囿于作者的水平,加上编写时间仓促,不足和错误在所难免,请广大读者朋友批评指正,不吝施教.

**2009 年 IMO 中国国家集训队教练组**

**2009 年 7 月**

# 目　录



# 2008年全国高中数学联赛

受中国数学会委托，2008年全国高中数学联赛由重庆数学会承办．中国数学会普及工作委员会和重庆数学会负责命题工作．竞赛活动于2008年10月12日（星期日）举行．

全国高中数学联赛所涉及的知识范围不超出教育部《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学内容和要求，在方法的要求上有所提高．主要考查学生对基本知识和基本技能的掌握情况，以及综合、灵活运用知识的能力．试卷包括6道选择题、6道填空题和3道解答题．全卷满分150分．

全国高中数学联赛加试与中国数学奥林匹克、国际数学奥林匹克适当接轨，在知识方面有所扩展，适当增加一些教学大纲之外的内容．试卷包括3道解答题，其中一道是平面几何题．全卷满分150分．

试卷复评工作于2008年11月7日至9日在重庆进行，中国数学会普及工作委员会和重庆数学会负责人参加．经过复评确定了“2008年全国高中数学联赛省级赛区一等奖名单”，2008年各赛区获得一等奖的总人数为1 159名．根据教育部目前的规定，这些同学可以被保送进入大学．

2008年全国高中数学联赛的另外一项任务是确定“2009年中国数学奥林匹克（第24届全国中学生数学冬令营）”的营员，共有184名同学获得这一资格．

## 一、选择题(每小题 6 分，共 36 分)

**1** 函数 $f(x)=\dfrac{5-4x+x^2}{2-x}$ 在$(-\infty, 2)$上的最小值是(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

**解** 当 $x<2$ 时，$2-x>0$，因此

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+(4-4x+x^2)}{2-x} \\ &= \frac{1}{2-x}+(2-x) \\ &\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{1}{2-x}\cdot(2-x)} \\ &= 2, \end{aligned}$$

当且仅当 $\dfrac{1}{2-x}=2-x$ 时取得等号. 而此方程有解 $x=1\in(-\infty, 2)$，因此 $f(x)$ 在$(-\infty, 2)$上的最小值为 2. 故选 C.

**2** 设 $A=[-2, 4)$，$B=\{x \mid x^2-ax-4\leqslant 0\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 $a$ 的取值范围为(　　).

(A) $[-1, 2)$　　(B) $[-1, 2]$

(C) $[0, 3]$　　(D) $[0, 3)$

**解** 因为 $x^2-ax-4=0$ 有两个实根

$$x_1=\frac{a}{2}-\sqrt{4+\frac{a^2}{4}},\ x_2=\frac{a}{2}+\sqrt{4+\frac{a^2}{4}},$$

故 $B\subseteq A$ 等价于 $x_1\geqslant -2$ 且 $x_2<4$，即

$$\frac{a}{2}-\sqrt{4+\frac{a^2}{4}}\geqslant -2$$

且

$$\frac{a}{2}+\sqrt{4+\frac{a^2}{4}}<4,$$

解之得 $0\leqslant a<3$. 故选 D.

**3** 甲、乙两人进行乒乓球比赛，约定每局胜者得 1 分，负者得 0 分，比赛进行到有一人比对方多 2 分或打满 6 局时停止. 设甲在每局中获胜的概率为 $\frac{2}{3}$，乙在每局中获胜的概率为 $\frac{1}{3}$，且各局胜负相互独立，则比赛停止时已打局数 $\xi$ 的期望 $E\xi$ 为（　　）.

(A) $\frac{241}{81}$　　(B) $\frac{266}{81}$　　(C) $\frac{274}{81}$　　(D) $\frac{670}{243}$

**解法一**　依题意知，$\xi$ 的所有可能值为 2、4、6. 设每两局比赛为一轮，则该轮结束时比赛停止的概率为

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}.$$

若该轮结束时比赛还将继续，则甲、乙在该轮中必是各得一分，此时，该轮比赛结果对下轮比赛是否停止没有影响. 从而有

$$P(\xi=2)=\frac{5}{9},$$

$$P(\xi=4)=\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{20}{81},$$

$$P(\xi=6)=\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{16}{81},$$

故

$$E\xi=2\times\frac{5}{9}+4\times\frac{20}{81}+6\times\frac{16}{81}=\frac{266}{81}.$$

故选 B.

**解法二** 依题意知，$\xi$ 的所有可能值为 2、4、6. 令 $A_k$ 表示甲在第 $k$ 局比赛中获胜，则 $\overline{A}_k$ 表示乙在第 $k$ 局比赛中获胜. 由独立性与互不相容性得

$$P(\xi=2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2)=\frac{5}{9},$$

$$\begin{aligned}P(\xi=4)&=P(A_1\,\overline{A}_2A_3A_4)+P(A_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\,\overline{A}_4)\\&\quad+P(\overline{A}_1A_2A_3A_4)+P(\overline{A}_1A_2\,\overline{A}_3\,\overline{A}_4)\\&=2\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)\right]\\&=\frac{20}{81},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\xi=6)&=P(A_1\,\overline{A}_2A_3\,\overline{A}_4)+P(A_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3A_4)\\&\quad+P(\overline{A}_1A_2A_3\,\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1A_2\,\overline{A}_3A_4)\\&=4\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\\&=\frac{16}{81},\end{aligned}$$

因此

$$E\xi=2\times\frac{5}{9}+4\times\frac{20}{81}+6\times\frac{16}{81}=\frac{266}{81}.$$

故选 B.

**4** 若三个棱长均为整数(单位:cm)的正方体的表面积之和为564 $cm^2$,则这三个正方体的体积之和为(　　).

(A) 764 $cm^3$ 或 586 $cm^3$　　(B) 764 $cm^3$

(C) 586 $cm^3$ 或 564 $cm^3$　　(D) 586 $cm^3$

**解**　设这三个正方体的棱长分别为 $a$、$b$、$c$,则有

$$6(a^2+b^2+c^2)=564,$$

即

$$a^2+b^2+c^2=94.$$

不妨设

$$1\leqslant a\leqslant b\leqslant c<10,$$

从而

$$3c^2\geqslant a^2+b^2+c^2=94,$$

即

$$c^2>31.$$

故 $6\leqslant c<10$,$c$ 只能取 9、8、7、6.

若 $c=9$,则

$$a^2+b^2=94-9^2=13,$$

易知 $a=2$, $b=3$,得一组解$(a, b, c)=(2, 3, 9)$.

若 $c=8$,则

$$a^2+b^2=94-64=30,\ b\leqslant 5.$$

但 $2b^2\geqslant 30$,即 $b\geqslant 4$,从而 $b=4$ 或 5. 若 $b=5$,则 $a^2=5$ 无解;若 $b=4$,则 $a^2=14$ 无解. 因此 $c=8$ 时无解.

若 $c=7$,则

$$a^2+b^2=94-49=45,$$

有唯一解 $a=3$，$b=6$.

若 $c=6$，则

$$a^2+b^2=94-36=58,$$

此时 $2b^2\geqslant 58$，即 $b^2\geqslant 29$. 故 $b\geqslant 6$，但 $b\leqslant c=6$，所以 $b=6$，此时 $a^2=58-36=22$ 无解.

综上，共有两组解 $(a, b, c)=(2, 3, 9)$ 或 $(a, b, c)=(3, 6, 7)$，体积为

$$V_1=2^3+3^3+9^3=764(\text{cm}^3)$$

或

$$V_2=3^3+6^3+7^3=586(\text{cm}^3).$$

故选 A.

**5** 方程组 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ xyz+z=0,\\ xy+yz+xz+y=0\end{cases}$ 的有理数解 $(x, y, z)$ 的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

**解**　若 $z=0$，则

$$\begin{cases}x+y=0,\\ xy+y=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x=-1,\\ y=1.\end{cases}$$

若 $z\neq 0$,则由 $xyz+z=0$ 得

$$xy=-1. \quad ①$$

由 $x+y+z=0$ 得

$$z=-x-y. \quad ②$$

将②式代入 $xy+yz+xz+y=0$ 得

$$x^2+y^2+xy-y=0. \quad ③$$

由①式得 $x=-\frac{1}{y}$,代入③式化简得

$$(y-1)(y^3-y-1)=0.$$

易知 $y^3-y-1=0$ 无有理数根,故 $y=1$,由 ① 式得 $x=-1$,由 ② 式得 $z=0$,与 $z\neq 0$ 矛盾,故该方程组共有两组有理数解

$$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\\ z=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-1,\\ y=1,\\ z=0.\end{cases}$$

故选 B.

**6** 设$\triangle ABC$的内角 $A$、$B$、$C$ 所对的边 $a$、$b$、$c$ 成等比数列,则 $\dfrac{\sin A\cot C+\cos A}{\sin B\cot C+\cos B}$ 的取值范围是(　　).

(A) $(0,+\infty)$　　(B) $\left(0,\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

(C) $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$

**解**　设 $a$、$b$、$c$ 的公比为 $q$,则 $b=aq$, $c=aq^2$,而

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin A\cot C+\cos A}{\sin B\cot C+\cos B} &= \frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin B\cos C+\cos B\sin C} \\
&= \frac{\sin(A+C)}{\sin(B+C)} \\
&= \frac{\sin(\pi-B)}{\sin(\pi-A)} \\
&= \frac{\sin B}{\sin A} \\
&= \frac{b}{a} \\
&= q.
\end{aligned}
$$

因此，只需求 $q$ 的取值范围. 因为 $a$、$b$、$c$ 成等比数列，最大边只能是 $a$ 或 $c$，因此 $a$、$b$、$c$ 要构成三角形的三边，必须且只需 $a+b>c$ 且 $b+c>a$. 即有不等式组

$$
\begin{cases}
a+aq>aq^2, \\
aq+aq^2>a,
\end{cases}
$$

即

$$
\begin{cases}
q^2-q-1<0, \\
q^2+q-1>0.
\end{cases}
$$

解得

$$
\begin{cases}
\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, \\
q>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ 或 } q<-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.
\end{cases}
$$

从而