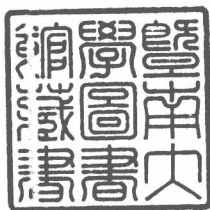


98-60-7414

MOTC-IOT-97-H2DA002

臺灣東岸港口共振現象改善方案 研究(4/4)

著 者：徐進華



交通部運輸研究所

中華民國 98 年 5 月

國家圖書館出版品預行編目資料

臺灣東岸港口共振現象改善方案研究.(4/4) /

徐進華著.-- 初版. -- 臺北市：交通部運輸研究所，民 98.05

面；公分

參考書面：面

ISBN 978-986-01-8688-8(平裝)

1. 港埠管理 2. 波動 3. 數值分析 4. 台灣

443.2

98009302

臺灣東岸港口共振現象改善方案研究(4/4)

著者：徐進華

出版機關：交通部運輸研究所

地址：10485 臺北市敦化北路 240 號

網址：www.ihmt.gov.tw (中文版>中心出版品)

電話：(04)26587176

出版年月：中華民國 98 年 5 月

印刷者：良機事務機器有限公司

版(刷)次冊數：初版一刷 110 冊

本書同時登載於交通部運輸研究所臺灣技術研究中心網站

定價：100 元

展售處：

交通部運輸研究所運輸資訊組•電話：(02)23496880

國家書店松江門市：10485 臺北市中山區松江路 209 號 F1•電話：(02)25180207

五南文化廣場：40042 臺中市中山路 6 號•電話：(04)22260330

GPN：1009801297

ISBN：978-986-01-8688-8 (平裝)

著作財產權人：中華民國(代表機關：交通部運輸研究所)

本著作保留所有權利，欲利用本著作全部或部份內容者，須徵求交通部運輸研究所書面授權。

交通部運輸研究所自行研究計畫出版品摘要表

出版品名稱：臺灣東岸港口共振現象改善方案研究 (4/4)

國際標準書號（或叢刊號）ISBN 978-986-01-8688-8（平裝）	政府出版品統一編號 1009801297	運輸研究所出版品編號 98-60-7414	計畫編號 97-H2DA002
主辦單位：港灣技術研究中心 主管：邱永芳 計劃主持人：徐進華 聯絡電話：04-26587182 傳真號碼：04-26571329			研究期間 自 97 年 01 月 至 97 年 12 月

關鍵詞：花蓮港、共振現象改善方案、多區域邊界元素法、連續壓縮過程、緣岸波

摘要：

為解決臺灣東岸港口極為嚴重的港池共振問題，並考慮此一共振可能是由緣岸波直接或間接引發，本研究乃發展一種包含多區域邊界元素法及連續壓縮過程的數值方法。此種方法較易處理複雜的幾何，且可使計算領域大小不受電腦記憶體及硬碟容量的限制，故可數值模擬複雜的港形及沿海岸線無限延伸的海底斜坡，後者乃為計算一穩定緣岸波波列之所需。應用目前的電腦程式，我們針對花蓮港目前的港形以及四種新的佈置加以計算，其結果顯示，若僅小幅度改變花蓮港港內佈置，無法有效改善其共振現象，故有必要在港外，沿垂直海岸線方向，築一道防波堤來阻擋緣岸波行進至港的入口附近。此一港外方案仍需經由數值計算來估計其效果，其結果顯示，由於緣岸波的能量較集中在岸邊，故此一防波堤即使長度小於 1 公里，仍可有效改善花蓮港的共振現象。因此本計畫建議，未來先應用一種簡單的測量方法來檢驗花蓮港附近之周期超過 100 秒的長波是否主要為緣岸波，若其結果屬實，則即使此一驗證乃為間接，且非嚴密，但因建一道短的防波堤之成本不高，且可供民眾遊憩，故應可逕行施工，以觀後效。

成果效益：

本計畫所發展的數值模式，可使計算領域大小不受電腦記憶體及硬碟容量的限制，且可採用非結構性的網格以處理複雜的幾何，故可應用於十分廣泛的情況。應用此種數值模式，我們已找出一種可有效降低花蓮港共振現象的方案，因此可望解決花蓮港在颱風來襲時，船隻皆需出港避難的現象，故對臺灣東部的海運及經濟發展有幫助。

後續應用：

花蓮港港務局可根據本計畫的結論與建議，先委託運輸研究所、成功大學或臺灣海洋大學進行現場觀測，若結果如預期，則可再委託一工程顧問公司規劃與設計上述之防波堤，使其能有效改善花蓮港的共振現象，並兼具休閒與觀光的價值。

出版日期	頁數	定價	本出版品取得方式
98 年 5 月	98	100	凡屬機密性出版品均不對外公開。普通性出版品，公營、公益機關團體及學校可函洽本所免費贈閱；私人及私營機關團體可按定價購買。

機密等級：

☐ 密 ☐ 機密 ☐ 極機密 ☐ 絕對機密
(解密條件：☐ 年 月 日解密，☐ 公布後解密，☐ 附件抽存後解密，
☐ 工作完成或會議終了時解密，☐ 另行檢討後辦理解密)

☒ 普通

備註：本研究之結論與建議不代表交通部之意見。

**PUBLICATION ABSTRACTS OF RESEARCH PROJECTS
INSTITUTE OF TRANSPORTATION
MINISTRY OF TRANSPORTATION AND COMMUNICATIONS**

TITLE: Methods for the Reduction of Resonance of the Harbors on the Eastern Coast of Taiwan (4/4)			
ISBN(ORISSN) ISBN 978-986-01-8688-8(pbk)	GOVERNMENT PUBLICATIONS NUMBER 1009801297	IOT SERIAL NUMBER 98-60-7414	PROJECT NUMBER 97-H2DA002
DIVISION: HARBOR & MARINE TECHNOLOGY CENTER DIVISION DIRECTOR: Chiu Yung-fang PRINCIPAL INVESTIGATOR: Shyu Jinn-hwa PHONE: 886-4-26587182 FAX: 886-4-26571329			PROJECT PERIOD FROM January 2008 TO December 2008
KEY WORDS: Hawlien Harbor; Methods for reduction of harbor resonance; Multizone boundary element method; Sequential condensation process; Edge waves.			
ABSTRACT: To solve the problem of the severe resonances of the harbors on the eastern coast of Taiwan, which are likely induced by edge waves, a numerical scheme involving the multizone boundary element method and a sequential condensation process is developed, which can make the simulation of complex topographies much easier and allow the computations in a large domain even when the computer memory and hard disks have only a limited capacity. This large domain is necessary when an infinitely long sloping beach for the propagation of a stationary edge wave train is under consideration here. The resulting computer program is applied to simulate the current topography as well as four revised ones of Hawlien Harbor, indicating that the resonances of Hawlien Harbor cannot be reduced effectively by a slight change of its inside topography. Therefore an alternative to build a pier to shelter the harbor from the edge waves has subsequently been simulated and the results indicate that even when the length of the pier is less than one kilometer, this pier can lead to a significant reduction in harbor resonance. Consequently, to make this plan practical, a simple method has also been suggested to provide a field evidence that the resonances of Hawlien Harbor are indeed induced mainly by edge waves. This evidence, even if it can be obtained, is still indirect and far from being rigorous, but since this pier can be built at a low cost and also for pleasure, it is worthwhile to materialize this plan on this evidence and then observe its effects.			
BENEFIT: This study has developed a numerical scheme, which is applicable even when the domain is necessarily large and the capacity of the computer memory and hard disks is limited. This scheme also has the advantage of requiring no structured grids. By using this scheme, an effective strategy to reduce the resonances of Hawlien Harbor has been found, which can benefit the sea transport and the economy in the eastern part of Taiwan.			
APPLICATION: Following the conclusions and suggestions of this report, the Hawlien Harbor Bureau can financially support the Institute of Transportation, the Cheng Kung University or the Taiwan Ocean University to conduct the field measurements suggested above. If the results are as expected, an engineering consultants company can subsequently be chosen to design the above-mentioned pier for reduction of harbor resonance and for pleasure too.			
DATE OF PUBLICATION May 2009	NUMBER OF PAGES 98	PRICE 100	CLASSIFICATION ☐ RESTRICTED ☐ CONFIDENTIAL ☐ SECRET ☐ TOP SECRET ☒ UNCLASSIFIED
The views expressed in this publication are not necessarily those of the Ministry of Transportation and Communications.			

目 錄

中文摘要表	I
英文摘要表	II
圖目錄	IV
第一章 前言	1
第二章 緣岸波引發港池共振現象之控制方程式	4
第三章 入射之緣岸波	8
第四章 多區域邊界元素法及連續壓縮過程	12
第五章 網格產生的方式	18
第六章 目前的數值解和以往的解之比較	21
第七章 花蓮港共振現象改善方案數值分析	24
7.1 港內方案	25
7.2 港外方案	26
第八章 結論與建議	28
參考文獻	30
附錄一 審查意見回覆	71
附錄二 簡報內容	75

圖 目 錄

圖一、示意圖。細實線表岸邊斜坡與外海等深區之分隔線.....	31
圖二、遠離港口地區之海底地形.....	32
圖三、當海底地形如圖二所示時，緣岸波之離散關係式。虛曲線表cut-off frequency, 虛直線顯示 $\omega = 2\pi/160\text{rad sec}^{-1}$ 之位置.....	33
圖四、由圖三之S點所代表的緣岸波之 profile.....	34
圖五、多區域邊界元素法及連續壓縮過程解說圖.....	35
圖六、示意圖.....	36
圖七、六節點三角形邊界元素.....	37
圖八、海底及自由表面上之網格型態.....	38
圖九、海岸線上及其對面邊界上之網格型態.....	39
圖十、垂直海岸線的邊界上之網格型態.....	40
圖十一、矩形港池之振幅放大率。曲線表Mei(1983) 的解析解, 圓圈表目前 的數值解.....	41
圖十二、圓形港池之底部及自由表面上的真實網格型態.....	42
圖十三、示意圖.....	43
圖十四、圖十三中P點之振幅放大率。曲線表 Lee(1971) 的數值解, 圓圈表 目前的數值解.....	44
圖十五、圓形港內分區狀況.....	45
圖十六、類似於圖十四, 但目前的圓圈表圓形港內分區後所獲得的數值解.....	46
圖十七、Long Beach Harbour 內之第一種分區方式.....	47
圖十八、在圖十七之分區方式下所獲得Long Beach Harbour 內A點之 振幅放大率。曲線表 Lee(1971) 之數值解, 圓圈表目前的數值解.....	48
圖十九、Long Beach Harbour 內之第二種分區方式.....	49
圖二十、在圖十九之分區方式下所獲得Long Beach Harbour 內A點之 振幅放大率。曲線表 Lee(1971) 之數值解, 圓圈表目前的數值解.....	50
圖二十一、花蓮港不分區時, 為適用目前的數值方法而將漁港忽略後之港形.....	51
圖二十二、花蓮港不分區時, 應用目前的數值方法所獲得的解.....	52
圖二十三、花蓮港分為18個分區之狀況.....	53

圖二十四、針對圖二十三之分區狀況，應用目前的數值方法所獲得的解 (三角形符號)。圓圈表圖二十二的結果.....	54
圖二十五、花蓮港分為21個分區之狀況.....	55
圖二十六、針對圖二十五(圓圈)與圖二十三(三角形)之分區狀況，應用 目前的數值方法所獲得的解.....	56
圖二十七、花蓮港內自由表面上的網格.....	57
圖二十八、針對圖二十五之分區狀況，將各分區內之節點數減少所獲得 的解(三角形)。圓圈表節點數未減少時的解.....	59
圖二十九、改變花蓮港入口方向之方案，但其位置與原來者相距不遠.....	60
圖三十、針對圖二十九方案，應用目前的數值方法所獲得A點之振 幅放大率。曲線表由圖二十八之三角形所連成的線.....	61
圖三十一、改變花蓮港入口方向及位置的方案.....	62
圖三十二、與圖三十類似，但改為針對圖三十一之方案.....	63
圖三十三、改變花蓮港港形之方案，但入口寬度不變.....	64
圖三十四、與圖三十類似，但改為針對圖三十三之方案.....	65
圖三十五、改變花蓮港港形及入口寬度的方案.....	66
圖三十六、與圖三十類似，但改為針對圖三十五之方案.....	67
圖三十七、與圖三十類似，但改為針對在港外沿垂直海岸線方向築一 道防波堤之方案.....	68
圖三十八、在圖三十七中，當 $ka = 0.81$ 時，變化港外防波堤之長度 L_x 所獲得的結果。直線代表圖三十七中的曲線在 $ka = 0.81$ 時的結果.....	69
圖三十九、與圖三十八類似，但改為變化港外防波堤之位置 L_y	70

第一章 前言

位在臺灣東岸的花蓮港和蘇澳港，在颱風來襲時，即使其暴風圈離港口尚遠，港內仍經常發生劇烈的長週期振盪。此種振盪可能是由波長較長的湧浪，以一種波群的方式行進到近岸，因海底坡度不連續，在當地引發波長更長且自由行進的亞重力波 (infragravity waves)，然後再由其引發港內海水共振運動所造成。需強調的是，此種自由行進的亞重力波由於波長甚長，故無法在深海由風的應力直接產生。

上述在臺灣東部近岸海底之坡度不連續處所產生的亞重力波，其大多數成份波將在岸邊直接被反射回深海，但因臺灣東部具有一段相當長且直的海岸線，故仍有一些成份波，因滿足緣岸波 (edge waves) 之離散關係式，而被 trapped 在岸邊，形成沿海岸線行進之緣岸波。這些緣岸波在由南向北行進的過程中，由於不斷有新的能量加入，因此當行進到花蓮港附近時，其能量可增為相當大，故花蓮港和蘇澳港之強烈長週期振盪，可能主要由此種緣岸波直接或間接引發。

有關緣岸波在臺灣東岸存在的現場證據，由於需使用一大規模的儀器陣列來觀測，目前尚無法獲得，但國外確有現場證據顯示，在某些近岸海域內所發生的亞重力波主要為緣岸波 (Huntley, Guza & Thornton 1981)。另一方面，由短波群引發緣岸波的理論可參考 Schäffer (1994)，其結果顯示，當地形變化僅為一維 (僅沿垂直海岸線方向有變化)，故海岸線為無限延伸時，若不考慮摩擦效應，緣岸波的振幅將為無窮大。因此，當臺灣東部具有一段相當長且直 (即使並非完美) 的海岸線時，緣岸波的能量確可能相當大 (特別是在颱風來襲時)。

若花蓮港和蘇澳港的長週期振盪主要是由緣岸波直接或間接引發，為降低此種振盪，我們可採用兩種方法：第一種方法是改變港的形狀，使港內的振幅放大率降低，但若港外入射波的振幅已經相當大，則即使振幅放大率稍微降低，其效果亦有限，況且若港的形狀需大幅改變方能達到此目的，則可能因成本與利益比太高而無法實現，故此時需採用下面一種方法。

第二種方法是考慮緣岸波的能量較集中在岸邊，故我們或可在臺灣東岸，沿垂直海岸線方向，築一道防波堤來阻擋緣岸波北上。此防波堤可能不需很長即可阻擋大部份緣岸波的能量，因此較易實施，但我們仍需用實驗或數值計算的方法來決定此一防波堤的長度。由於緣岸波不易在實驗室內單獨產生，故目前我們僅能用數值方法來估計此一防波堤所需的長度，但因緣岸波僅能在一岸邊斜坡上存在，故在數值計算中，港外水深需為非等深，且因目前所考慮的緣岸波乃為一行進 (非駐波) 且穩定的波列，故在數值計算中須假設此一岸邊斜坡乃沿著海岸線無限延伸，因此目前我們無法應用以往將全部海域或一有限範圍以外的海域視為等深的數值方法。

由於目前的計算須考慮波浪受地形影響發生繞射與散射現象，故我們在計算時須事先將一封閉領域之所有邊界上的邊界條件加以設定。這些邊界條件有些（如岸壁上之 no-flux condition）可輕易決定，有些（如外部邊界上的條件）則無法事先獲得。為解決此問題，且當遠方海域無法被視為等水深時，我們必須選擇一個很大的領域（其半徑至少為波長的三倍以上），然後將原來適用於無窮遠的條件應用在此一領域之外部邊界上，做為其邊界條件的近似。另一方面，在數值計算中，為獲得準確的解，節點與節點間的距離又必須遠小於波長，因此上述兩種需求將使數值模式中所產生的矩陣之階數極大，因而無法將其全部元素一次存放於電腦記憶體內。為解決此問題，以往是將它們先存放在電腦硬碟中，然後再分批傳送至記憶體內進行運算。

上述作法特別適合有限差分法 (finite difference method)，因為由此種方法所產生的矩陣為 tridiagonal，故其每一列元素中僅有三個元素不等於零，需存放於硬碟中，因此可節省大量硬碟容量，使計算領域的大小亦不受硬碟容量的限制，但差分法一般皆使用結構性的網格 (structured grids)，故不易處理複雜的地形，因此目前我們並未採用此種將一個矩陣之所有非零的元素分批傳送至記憶體的方法，而改為將全部領域分割為許多分區，再經由考慮分區與分區之交界面上的連續條件來連結各分區內之聯立方程式，而為了避免連結後又形成一個大的聯立方程式，一種連續壓縮的過程將被使用，使所有新舊矩陣的階數皆維持很小，因此每一個矩陣之全部元素皆可一次存放於電腦記憶體內。更有甚者，由於此時所有矩陣元素的總數目僅和分區數目（亦即領域面積）之一次方成正比（而以往的方法，若矩陣不為 tridiagonal，則和領域面積之二次方成正比），故可節省大量硬碟容量，因此目前所採用的分區方法，即使未使用有限差分法來將偏微分方程轉換為聯立代數式，亦可使領域大小不受電腦硬碟容量的限制。

目前我們所採用的將偏微分方程轉換為聯立代數式的方法乃為邊界元素法 (boundary element method)，此一方法可很自然地描述分區與分區交界面上的邊界條件，故有利於將各個分區加以連結，而且此種方法可採用非結構性網格，因此較易處理複雜的幾何。

上述邊界元素法，包括分區的方法，在 Kane(1994) 中有詳盡的介紹，故目前僅在第四章中略加說明，而將其重點放在解說如何進行連續壓縮的過程，但在說明這些數值方法以前，我們先在第二章介紹目前所欲求解的控制方程式，包括其邊界條件。由於這些邊界條件有些和入射的緣岸波有關，故在第三章我們將針對目前所考慮的地形，導出入射的緣岸波之波形與離散關係式，這些公式即被用來設計目前的電腦程式，而程式中所採用的網格產生方式則介紹於第五章。應用目前的電腦程式，我們先在第六章針對一些規則形狀的港池以及美國加州之 Long Beach Harbour 加以計算，並將其結果和

Mei(1983) 的解析解以及 Lee(1971) 的數值解比較。此一比較將顯示, 即使港的形狀不規則, 應用目前的電腦程式仍可獲得相當準確的數值解, 故在第七章第一節我們乃應用它, 針對花蓮港目前的港形以及四種修改後的港形進行數值計算, 其結果顯示, 這些方案或不足以明顯降低花蓮港的共振現象, 或需大幅改變花蓮港的形狀方可達到其目的, 因此接下來在第七章第二節我們改為考慮在港外沿垂直海岸線方向築一道防波堤的方案, 而經由數值模擬顯示, 此一方案確可有效降低花蓮港 (甚至蘇澳港) 的共振, 但此一方案是否可行, 仍需視花蓮港和蘇澳港的共振是否主要由緣岸波直接或間接引發而定, 故在第八章中我們除了總結以上的討論外, 亦建議一種簡單的測量方法來現場驗證此一重要現象, 並說明此種測量方法的限制與意義。

第二章 緣岸波引發港池共振現象之控制方程式

當入射波之波長與水深相比甚長時，我們可求解三維的 Laplace equation 或二維之長波方程式，兩者可獲得相近的結果。但因目前我們將採用第四章所介紹的多區域邊界元素法及連續壓縮過程，而二維的長波方程式不具有邊界元素法所需之 fundamental solutions (其定義如第四章所述)，因此目前我們直接求解三維的 Laplace equation

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.1)$$

其中 $\phi(x, y, z, t)$ 表流勢函數。

為簡化問題，我們採用線性波近似，故在自由表面上的運動及動力邊界條件分別為

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta = 0 \quad (z = 0), \quad (2.2)$$

其中 ζ 表水面位移， g 表重力加速度， $z = 0$ 則表平均水面的位置。由於線性波的假設，我們亦僅需考慮單一頻率的波做為入射波，且因我們目前僅求解穩定狀態下的港內外振盪，故在每一點上的 ϕ 和 ζ 隨時間的變化皆可表為 $e^{-i\omega t}$ ，其中 ω 即為入射波的頻率。因此 (2.2) 中的兩式可合併為

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi \quad (z = 0). \quad (2.3)$$

上式中僅包含 ϕ ，而未包含 ζ ，故可直接被用來求 (2.1) 式的唯一解。另外，在任何剛性邊界上，包括在海堤面及海床上，其邊界條件即為 no-flux condition

$$\partial \phi / \partial n = 0, \quad (2.4)$$

其中 n 表垂直邊界方向的座標。

上述的邊界條件已足夠應用在港內所有邊界上，但在港外，特別是在其外部邊界 (outer boundary) 上，其邊界條件仍有待決定。為達到此目的，我們將港外的 ϕ 表為

$$\phi = \phi_i + \phi_d, \quad (2.5)$$

其中 ϕ_i 表行進在一簡單地形上的緣岸波，亦即為入射波 (其原因將在下一段文字中說明)， ϕ_d 則代表因港的存在，以及因實際地形與上述簡單地形不同，所產生的擾動。由於 ϕ_i 滿足 Laplace equation (2.1)，故 ϕ_d 亦同樣滿足此一線性且為 homogeneous 的方程式。同理，由 (2.3) 式， ϕ_d 亦滿足以下的自由表面之邊界條件

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi_d \quad (z = 0). \quad (2.6)$$

由於離港口甚遠地區之實際地形，對港內及離港很近區域內的解，除了在決定入射波的特性與大小外，影響很小，故我們可以假設在離港口很遠的地區，其海岸線如圖一所示，乃為一條直線，其海底地形則為一簡單之一維地形。在此種情況下，由遠方入射的緣岸波 ϕ_i 之空間分佈可應用解析的方法或半解析半數值的方法事先獲得。目前我們所考慮的一維地形如圖二所示，而其 ϕ_i 的分佈則將在下一章導出。此一分佈因滿足在岸壁及海底上 $\partial\phi_i/\partial n = 0$ 之邊界條件，故在此一遠離港口的區域，由 (2.4) 和 (2.5), ϕ_d 在岸壁及海底亦滿足

$$\partial\phi_d/\partial n = 0 \quad (2.7)$$

此一邊界條件。

然而，在港口附近，若實際海岸線或防波堤凸出於外海，則由它們所造成的波浪場變化，將直接影響港內的振盪，故為了計算後者，這些離港口不遠的地形變化有時須加以考慮。為達到此目的，在這些向外海凸出的岸壁或防波堤堤面上，由 (2.4) 和 (2.5), ϕ_d 須滿足

$$\partial\phi_d/\partial n = -\partial\phi_i/\partial n \quad (2.8)$$

此一邊界條件，而非 (2.7)。上式中的 ϕ_i 乃為已知，故上式確為 ϕ_d 之一實際可用的邊界條件。

另外，在港口附近也可能存在一些內凹的海灣，這些海灣也可能直接影響港內的振盪，因此須加以考慮。在這些海灣內，我們必須如同在港內一樣，求解原來的流勢函數 ϕ ，而非 ϕ_d ，而在此種海灣的入口處以及港的入口處，亦即在圖一的 $\overline{AB}$ 界面上，可令港（或灣）內的 ϕ 和港（或灣）外的 ϕ_d 滿足以下的連續條件

$$\phi|_{x=0^-} = \phi_i|_{x=0^+} + \phi_d|_{x=0^+}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}|_{x=0^-} = \frac{\partial\phi_i}{\partial n}|_{x=0^+} + \frac{\partial\phi_d}{\partial n}|_{x=0^+}. \quad (2.10)$$

由於 $(\partial\phi_i/\partial n)|_{x=0^+} = 0$ ，故 (2.10) 式可化減為

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}|_{x=0^-} = \frac{\partial\phi_d}{\partial n}|_{x=0^+}. \quad (2.11)$$

以上的公式已提供所有位在內部邊界 (interior boundaries) 上的邊界條件，接下來我們將考慮 ϕ_d 在無窮遠處的條件，這些條件在實際數值計算時，將被應用在一個大領域之外部邊界 (outer boundaries) 上做為其近似的邊界條件。

為明確討論計，我們令入射的緣岸波在圖一中朝正 y 軸方向行進。由於在離海岸線一段距離以外之水深已變為等深，故在離港口無窮遠處，除了在岸邊斜坡上及其附近， ϕ_d 應僅含屬於 leaky modes 的波，且這些 leakage 應僅發生在離港口不遠的岸邊斜坡上（因在離港口較遠的岸邊斜坡上應僅存屬於 trapped modes 的緣岸波）。因此，在無窮遠，但非在岸邊斜坡上， ϕ_d 可滿足 Sommerfeld radiation condition

$$(k_l r)^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - i k_l \right) \phi_d \rightarrow 0 \quad \text{when} \quad k_l r \rightarrow \infty, \quad (2.12)$$

其中 (r, θ) 表圖一中的極座標， k_l 表在此一等深海域內 leaky modes 之 wave-number。應用上式，我們在實際計算時，即可在一個大領域之外部邊界上（但非在岸邊斜坡上），將其邊界條件定為

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} \approx \frac{\partial \phi_d}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \approx i k_l \phi_d \frac{\partial r}{\partial n}. \quad (2.13)$$

另一方面，在離港口無窮遠的岸邊斜坡上，應僅存屬於 trapped modes 的緣岸波，且它們的振幅已不再改變。因此，當 $y \rightarrow \infty$ ，在此斜坡上的 ϕ_d 可表為

$$\phi_d = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^m a_j \psi_j(x, z) e^{i k_{yj} y}, \quad (2.14)$$

其中 k_{yj} 代表 mode 為 j 之緣岸波在 y 方向上的 wave-number， a_j 表此一 mode 之緣岸波的振幅（乃為複數）， $\psi_j(x, z)$ 則代表此緣岸波之流勢函數在 x -和 z -方向上的分佈。當頻率 ω 以及圖二所示的一維地形給定後，上式中的 k_{yj} ， $\psi_j(x, z)$ 以及在此一地形上所有可能存在的緣岸波之 modes 的數目 m （乃為有限），皆可應用解析的方法事先決定。應用其結果，且在外部邊界上屬於斜坡的位置選擇 m 個點，我們即可建立一組包含 m 個方程式的聯立方程式，此組聯立方程式若使用矩陣的符號可表為

$$\{\phi_d\} = [C] \{a\}, \quad (2.15)$$

其中 column vector $\{\phi_d\}$ 之各個分量（或元素）乃表 ϕ_d 在此 m 個點上的值， $\{a\}$ 的分量則為 (2.14) 中的 $a_1, a_2, \dots, a_m$ ，而 square matrix $[C]$ 中的元素則可經由將此 m 個點的座標 (x, y, z) 代入 $\psi_j(x, z) e^{i k_{yj} y}$ ， $(j = 1, 2, \dots, m)$ 而事先決定。

上式中的 $\{\phi_d\}$ 和 $\{a\}$ 皆未知，但由 (2.14)，

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial y} = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^m i a_j k_{yj} \psi_j(x, z) e^{i k_{yj} y},$$

故應用相同的方法，我們亦可獲得

$$\left\{ \frac{\partial \phi_d}{\partial y} \right\} = [D] \{a\}, \quad (2.16)$$

其中 $[D]$ 是將上述 m 個點的座標代入 $ik_{yj}\psi_j(x, z)e^{ik_{yj}y}$, ($j = 1, 2, \dots, m$) 而事先決定。因此，儘管 $\{a\}$ 未知，應用(2.15) 和 (2.16) 我們仍可獲得一個 $\{\phi_d\}$ 和 $\{\partial \phi_d / \partial y\}$ 間的關係式

$$\left\{ \frac{\partial \phi_d}{\partial y} \right\} = [D][C]^{-1} \{\phi_d\}. \quad (2.17)$$

此一關係式可做為在岸邊斜坡上之外部邊界上的邊界條件。

需強調的是，在 (2.14) 中，某一個緣岸波分量將和入射波之 mode 相同，故可能代表入射波部份能量繞射進港內，使入射波通過港口後減少的部份，但由於此一振幅為負的分量之 phase 仍行進在正 y 方向，因此在 (2.14) 中所有 k_{yj} 前的符號皆為正。

另一方面，當 $y \rightarrow -\infty$ 時，在岸邊斜坡上，所有 ϕ_d 的分量皆行進在負 y 方向，故 (2.14) 此時必須改寫為

$$\phi_d = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^m b_j \psi_j(x, z) e^{-ik_{yj}y}. \quad (2.18)$$

應用上式及相同的方法，我們可同樣獲得適用在一個大領域之位於岸邊斜坡上的外部邊界（其 y 座標為負）之邊界條件，其形式和 (2.17) 者相同。此一形式的邊界條件可適用在一般的情況，但在目前我們所考慮的如圖二所示的地形，(2.17) 可進一步簡化，其詳細情形及原因將在下一章說明。

第三章 入射之緣岸波

在本章中我們將考慮一個如圖二所示，在岸邊具有一垂直岸壁，而與其相接之海底平面斜坡，在向外延伸一段距離後，改爲一向外海無限延伸之水平海底地形。此一水平海底的假設除爲邊界條件 (2.13) 之所需外，亦可確保水深與波長比在各處皆很小，故使淺水近似得以適用於每一點，因此目前我們可針對此一維地形，求解二維的長波方程式，以獲得緣岸波的解。這些解可做爲入射的緣岸波以及 (2.14) 和 (2.18) 內所含的緣岸波之近似解，而這些近似解的誤差將隨水深與波長的比值減小而趨近於零。

線性的長波方程式可表爲

$$\nabla_h \cdot (gh \nabla_h \zeta) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

其中 $\nabla_h \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 表水平方向的梯度， h 表水深。當上式中的未知函數 ζ 解出後，由 (2.2) 之第二式可知 $\phi(x, y, 0, t) = -ig\zeta(x, y, t)/\omega$ ，且因在淺水近似中 ϕ 在垂直方向上的變化可以忽略，故

$$\phi(x, y, z, t) \approx -\frac{ig}{\omega} \zeta(x, y, t) \quad (z \leq 0). \quad (3.2)$$

因此可將其代入第二章內的方程式。

由於在本章中我們僅考慮沿海岸線行進的緣岸波，故解的形式可表爲

$$\zeta = \eta(x) \exp[i(k_y y - \omega t)]. \quad (3.3)$$

代入 (3.1) 後產生

$$\frac{d}{dx} \left(gh \frac{d\eta}{dx} \right) + (\omega^2 - ghk_y^2) \eta = 0. \quad (3.4)$$

接下來我們針對圖二中的 I 區和 II 區分別求上式的解，然後在 $x = x_1$ 處將此兩個解加以連接，以決定其未定的係數。

首先在 I 區中，由於海底斜坡之斜率 h_x 爲定值，故在圖二所選擇的座標系統（與圖一者略爲不同）中，水深分佈可表爲

$$h = h_x x. \quad (3.5)$$

將 (3.5) 代入 (3.4) 並展開，可得適用於 I 區之方程式

$$x \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{d\eta}{dx} + \left(\frac{\omega^2}{gh_x} - k_y^2 x \right) \eta = 0. \quad (3.6)$$

爲求解上式，我們進行以下的變數轉換：

$$\xi \equiv 2k_y x, \quad \eta = \exp(-\xi/2) f(\xi). \quad (3.7)$$

代入後可得

$$\xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} + (1 - \xi) \frac{df}{d\xi} - a_I f = 0, \quad (3.8)$$

其中

$$a_I = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{gk_y h_x} - 1 \right). \quad (3.9)$$

上式乃爲 confluent hypergeometric equations 之一種，又稱爲 Kummer's equation (參看 Abramowitz & Stegun 1972)，故其通解可表爲

$$f = AM(a_I, 1, \xi) + BU(a_I, 1, \xi), \quad (3.10)$$

其中 M 和 U 乃爲 Kummer functions.

另一方面，在 II 區中，由於水深 $h = \text{const} = h_1$ ，故 (3.4) 式可化簡爲

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{gh_1} - k_y^2 \right) \eta = 0$$

或改寫爲

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} - \lambda k_y^2 \eta = 0,$$

其中

$$\lambda \equiv 1 - \frac{\omega^2}{gh_1 k_y^2}. \quad (3.11)$$

上式之通解爲

$$\eta = C \exp \left(-\lambda^{\frac{1}{2}} k_y x \right) + D \exp \left(\lambda^{\frac{1}{2}} k_y x \right)$$

或應用 (3.7) 之第一式將獨立變數改爲 ξ ：

$$\eta = C \exp \left(-\lambda^{\frac{1}{2}} \xi / 2 \right) + D \exp \left(\lambda^{\frac{1}{2}} \xi / 2 \right). \quad (3.12)$$

若 $\lambda < 0$ ，由 (3.12) 及 (3.3) 所代表的解乃爲兩行進波，且它們的相位速度爲 $(gh_1)^{1/2}$ 。由於此兩個行進波的振幅在各點皆相同，故它們並非是能量限制在岸邊附近的緣岸波，

表緣岸波僅能發生在 $\lambda > 0$ 的情況，因此由 (3.11) 可知，若緣岸波要存在，其頻率最大僅能為 $\omega^2 = gh_1 k_y^2$ 。此一頻率代表一種 cut-off frequency。

當 $\lambda > 0$ 時，在 (3.12) 中的最後一項將向外海方向指數成長，故與實際狀況不合，因此可確定 $D = 0$ ，故在II區內的解為

$$\eta_{II} = C \exp\left(-\lambda^{\frac{1}{2}}\xi/2\right), \quad (3.13)$$

而在I區內，由(3.7) 及 (3.10)，其解為

$$\eta_I = A \exp(-\xi/2)M(a_I, 1, \xi) + B \exp(-\xi/2)U(a_I, 1, \xi). \quad (3.14)$$

在 (3.13) 和 (3.14) 中共有 A, B, C 三個未定的係數以及一個未定的參數 a_I ，而 a_I 一旦確定，則可經由 (3.9) 決定緣岸波的離散關係式，故為確定 a_I 以及決定 A, B, C 三個係數中的兩個與第三個之間的關係式，我們需考慮在垂直岸壁上 $\partial\phi/\partial x = 0$ 故而 $d\eta/dx = 0$ (參看 (3.2) 和 (3.3)) 之邊界條件，並考慮 matching conditions:

$$\eta_I = \eta_{II}, \quad (d\eta/dx)_I = (d\eta/dx)_{II} \quad (x = x_1).$$

由這三個條件，我們可獲得三個以 A, B, C 為未知數的線性聯立方程式，且此一聯立方程式乃為 homogeneous。故為獲得此一聯立方程式之不為零的解，此聯立方程式之係數矩陣的行列式必須等於零，而由這項限制，我們亦可決定 a_I ，因而決定在目前的地形下緣岸波之離散關係式，其結果如圖三所示。

值得注意的是，當海底僅有一向外海無限延伸之平面斜坡 (表圖二中的II區不存在)，且岸邊無直立壁時，由 Eckart (1951) 的理論， a_I 必須為一負整數或零，故由 (3.9) 式可決定緣岸波的離散關係式

$$\frac{\omega^2 h_0}{gh_x^2} = (2n + 1) \frac{k_y h_0}{h_x}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

上式中為方便與圖三之結果比較，我們將等號兩邊同時乘以 h_0 ，因此若將上式繪於圖三，將產生無窮多條直線，且每一條直線皆通過原點。然而目前由於垂直岸壁的存在，這些直線已變為彎曲，且如今因有II區的存在，使較大的頻率被 cut off，故使緣岸波之 modes 數目亦變為有限，因此 (2.14) 和 (2.18) 中的 m 確為一有限的整數。

為方便計，目前我們令 h_0 為 15 m, h_1 為 115 m，岸邊斜坡之斜率為 0.05，而入射波的周期則固定為 160 秒 (對實際不同周期的入射波所引發的港內振盪，我們可以改變港