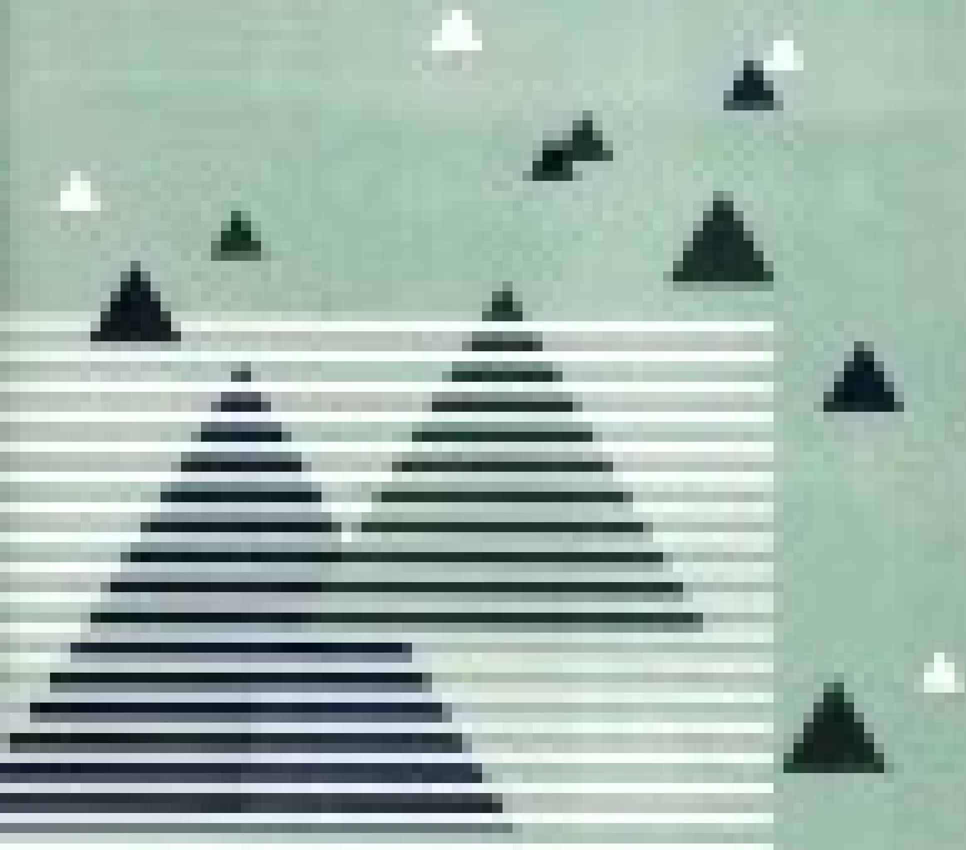
稳定性理论

黄 琳

北京大学出版社

稳定性理论



稳定性理论

黄 琳

北京大学出版社

内 容 简 介

本书是作者根据他多年来，在北京大学为研究生讲授稳定性理论课程的基础上编写而成。全书共分六章，即：Ляпунов稳定性理论基础，常系数线性系统，变系数线性系统，Ляпунов稳定性的进一步研究，控制系统的稳定性和比较原理与大系统。本书的内容不囿于一般稳定性理论课的教材，它总结了近代稳定性理论发展的一些重要方面，利于引导读者迅速地进入稳定性理论研究的前沿。全书结构严谨，概念清楚，内容丰富，叙述简洁，配有适当的例题。

本书可作为力学、应用数学、控制与系统科学，以及与之相关的工程与应用专业的研究生和高年级大学生选修课教材，也可供从事有关专业教学和科研工作的教师与研究人员参考。

书　　名：稳定性理论
著作责任者：黄琳
责 任 编 辑：邱淑清
标 准 书 号：ISBN 7-301-01704-9/O·0271
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者：北京大学印刷厂
印　刷　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850毫米×1168毫米　32开本　11印张　277千字
1992年7月第1版　2001年3月第二次印刷
定　　价：15.50元

前　　言

稳定性理论是研究动态系统中的过程(包括平衡位置)相对干扰是否具有自我保持能力的理论.古代中国晋书中“行人安稳,布帆无恙”的说法就是当时人们对自我保持能力或稳定的一种具体的直觉的说法.在西方“Stable”一词源出于拉丁文“Stabilis”也只表示一种坚持的意思[1].这些千年以前的名词与说法反映了人类对“稳定性”这一科学概念最初的理解.由这种理解开始到真正形成稳定性理论其间经历了近一千五百年,其决定性因素来自两个方面,工业革命后技术科学进步的需要和人类在十九世纪对自然科学首先是数学和力学方面的贡献.

为了理解现今稳定性理论所形成的框架,分析与回顾一下近百年来稳定性理论的发展及其背景是有意义的.

在稳定性理论发展进程中最伟大的事件乃是俄国数学力学家A. M. Ляпунов在1892年完成的博士论文“运动稳定性的一般问题”[5],他将由Peano,Bendixson和Darboux等人建立的微分方程解对初值和参数的连续依赖性这一概念[10],由自变量(时间)在有限区间上变化拓宽到无穷区间之上,科学地给出了系统中运动是稳定和渐近稳定的概念;他从类似系统总能量的物理观念得到启示,提出了后来被人们称为Ляпунов函数的概念,将一般n阶微分方程组中扰动解渐近性质的讨论归结为讨论一个标量函数(Ляпунов函数)及其对系统的全导数的一些特性的研究,成功地避开了讨论n阶微分方程组的解的困难,从而建立了稳定性理论研究的框架.Ляпунов这一工作影响的巨大,在当时实际上是无法作出估价的,近一百年的历史已经表明,由他创立的这一理论与方法,已经渗透到应用数学、力学、控制与系统理论的众多领域,取得

了巨大的发展，形成了从理论到应用的丰富的体系. 遗憾的是 Ляпунов 本人没有预见到这一点，而在 1918 年因夫人罹肺病故去后而自杀弃世.

Ляпунов 对稳定性理论所作奠基性工作的出现在当时有其深刻的背景，以 Poincaré 为代表的对天体运动是否稳定的研究，Maxwell 在 1868 年完成了关于离心调速系统的稳定性分析[9]，在 Cauchy 完成了分析基础的工作(ϵ-δ 语言)以后，Peano 等人给出了微分方程解对初值与参数的连续依赖性的结果[10]，以这些工作为代表的十九世纪在数学与力学上的成果推动了 Ляпунов 理论的产生.

常系数线性系统模式是系统模式中最简单的一种. Routh 与 Hurwitz 在大致与 Ляпунов 的同时，利用常系数线性系统零解稳定性可以通过系统的特征多项式来进行判定，给出了一组由多项式系数组成的不等式作为稳定性的判据[9]. 后来 Гантмахер 等人引入了正多项式对作为工具讨论稳定多项式[11]，这些结果在近年来关于系数空间和参数空间中稳定性区域的讨论上有重要的作用. 由于常系数线性系统结构简单，运用线性代数的工具就可以基本上弄清楚其中的问题. 考虑到系统中存在的控制，运用控制来实现系统的稳定——镇定就成为稳定性理论的一项新的内容[12,13].

变参数线性系统稳定性的研究至今仍然是一个带挑战性的课题. 由于这类系统的线性结构，在一般性层次上讨论其稳定性与镇定已取得了相当好的成果[14]. 在变系数线性系统中周期系数线性系统是一种在理论上最接近于常系数线性系统模式的，对于这类系统的讨论有助于了解系统中存在周期振动时的稳定性[4,5].

对于一般非线性系统的稳定性的讨论，由于数学上处理非线性问题的困难，至今依然进展不多. 但对于渐近稳定的反问题、渐近稳定与不稳定情形下 Ляпунов 结果的扩充，以及藉助于第一积分讨论系统特别是力学系统等诸方面都得到了一些有价值的结论[1].

刺激稳定性理论发展并使之应用广泛的一个重要方面是有关控制系统或回路系统的稳定性.这类问题的特点是研究当回路开环部分具何种特性时用何种反馈可使闭环系统稳定.这方面杰出的工作是由 Nyquist 在本世纪 30 年代作出的[15].而由以 Лурье 为代表的一批苏联人研究的绝对稳定性研究从本世纪 40 年代起持续了二十年[16],而 60 年代后期由罗马尼亚人 Popov 为代表关于超稳定性的工作可以看成是上述工作的发展,而这些稳定性又常常同网络理论中的正实系统有关[17].这一系列工作使回路稳定性理论形成了一个体系,虽然其中还有一些关系至今还远未弄清楚.

由德国数学家 Kamke 在 30 年代初建立的比较原理,原本是讨论微分方程解的特性的.这种藉助于微分不等式讨论问题的方法,在渐近稳定性的分析上具独到之处,它可以由标量形式推广至向量形式,从而将大阶次系统的稳定性问题转化成小阶次特殊系统的问题[18,19].当今大系统的稳定性,虽成果浩瀚,但其主要点也仅在于此.

如果不讨论分布参数系统的稳定性与稳定性的数值方法,则现代稳定性理论的主要内容也就是上述的六个方面,这也正是作者在本书中奉献给读者特别是青年读者的内容.

最后,作者愿借此机会对支持我进行这项工作的国家自然科学基金和高等学校博士学科点专项科研基金的资助深表谢意.

本书的部分材料曾在北京大学力学系作为研究生的教材.在历次教学中一般力学教研室的同仁和研究生们均对内容提出过不少有价值的意见.

我十分感谢所有帮助过我的同志,并希望本书的出版将使我无愧于这些支持和帮助.

由于水平所限,挚诚欢迎批评指正.

黄 琳

1989 年 2 月 7 日于北京大学力学系

目　　录

第一章　Ляпунов 稳定性理论基础

本章我们将用已经发展了的内容来叙述 Ляпунов 稳定性的基本理论，无论从概念叙述上、方法处理上均力图用比较新的知识来叙述：它们有稳定性的基本概念，Ляпунов 函数以及采用 Ляпунов 直接方法所得到的稳定、不稳定、吸引、渐近稳定……等的结论，并用适当的例子来阐明在概念之间可能会造成的误解.

§1.1　稳定性的基本概念

首先对本书中常用的符号作一些说明.

英文小写字母用以表示向量，如 $a,b,x,y,\cdots$；英文大写字母用以表示矩阵，如 $A,B,X,Y,\cdots$；对于向量的分量和矩阵的元，用带下标的小写希腊字母表示，希腊字母的选取与所表示向量和矩阵的英文字母相对应，其下标表示它在向量和矩阵中的位置，例如 a 的第 i 个分量表为 α_i，A 的 (i,j) 元表为 α_{ij} 等. 一般小写希腊字母表示标量，如 $\alpha,\beta,\xi,\eta,\cdots$. $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 分别表示实数域与复数域，$\boldsymbol{R}^n$ 与 $\boldsymbol{C}^n$ 分别表示 n 维实与复向量空间，$\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 分别表示 $m\times n$ 的实与复矩阵的全体，t 一般表示时间. $\boldsymbol{R}_+$ 表示正实数的全体.

$\boldsymbol{B}_\rho\subset\boldsymbol{R}^n$ 表示 n 维实空间中中心在原点，半径为 ρ 的闭球，即

$$\boldsymbol{B}_\rho=\{x\,|\,x\in\boldsymbol{R}^n,\ \|x\|\leqslant\rho\}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是向量的 Euclid 范数，即 $x^{\mathrm{T}}x=\|x\|^2$，x^{T} 是 x 的转置.

$\boldsymbol{B}_\rho$ 的开核是一开球，表示为 $\dot{\boldsymbol{B}}_\rho$，即

$$\dot{\boldsymbol{B}}_\rho=\{x\,|\,x\in\boldsymbol{R}^n,\ \|x\|<\rho\}$$

一般集合的开核表示与此相仿.

在集合 $\boldsymbol{S}$ 上定义的函数 φ 或函数向量 f，若在 $\boldsymbol{S}$ 上连续，则记

为 $\varphi \in C[\boldsymbol{S}]$或 $f \in C[\boldsymbol{S}]$.

以后用 $\boldsymbol{J}$ 表半无穷区间$[\theta, +\infty)$，其中 $\theta \in \boldsymbol{R}$，有时 $\boldsymbol{J}$ 也可以是$(-\infty, +\infty)$.

设 $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n$ 系一开集. 函数 $f(t,x): \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{R}^n$ 称为对 x 具局部 Lipschitz 条件，系指对任何有界闭集 $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S}$ 有常数 $\kappa(\boldsymbol{M})$，使

$$\begin{aligned} &\| f(t,x_1) - f(t,x_2) \| \\ &\qquad \leqslant \kappa(\boldsymbol{M}) \| x_1 - x_2 \|, \quad \forall\ (t,x_1),(t,x_2) \in \boldsymbol{M} \end{aligned}$$

以下用 $f(t,x) \in L-\mathrm{Li}_x(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S})$表 f 在 $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S}$ 上对 x 具局部 Lipschitz 条件. 若 $\kappa(\boldsymbol{M})$可以选来与 $\boldsymbol{M}$ 无关，则称 $f(t,x)$在 $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S}$ 上对 x 具 Lipschitz 条件，并记为 $f(t,x) \in \mathrm{Li}_x(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S})$.

利用上述记号，则

$$f(t,x) \in C(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S}) \cap L - \mathrm{Li}_x(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S})$$

表示 $f(t,x)$在 $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S}$ 上连续，且对 x 具局部 Lipschitz 条件.

为了今后对定义、定理能有一个不累赘的叙述方式，在本书中将尽量采用符号与式子来代替一些文字叙述. 这种叙述起初可能不太习惯，但用多了自然就会显示出其优点. 以下按数学叙述的惯例，$\forall$ 表“对所有的”或“对任给的”，$\exists$ 表“均存在”或“均可找到”. 对于定义和命题及结论的叙述我们将以一串括号来表示，每个括号中的式子与符号代表一句话，前面的圆括号表条件，最后的方括号表结论. 例如：

实函数 $\varphi(\xi): \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 在 ξ_0 是连续的系指：

$$\begin{aligned} &(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall\ \xi \mid |\xi - \xi_0| \\ &\qquad < \delta)[\,|\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon] \end{aligned}$$

实函数 $f(x): \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ 在开集 $\boldsymbol{M}$ 是连续的系指：

$$\begin{aligned} &(\forall\ \varepsilon > 0)(\forall\ x_0 \in \boldsymbol{M})(\exists\ \delta > 0)(\forall\ x \mid \| x - x_0 \| \\ &\qquad < \delta \text{ 且 } x \in \boldsymbol{M})[\,\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon] \end{aligned}$$

实函数 $f(x): \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ 在开集 $\boldsymbol{M}$ 不连续，系指：

$$\begin{aligned} &(\exists\ \varepsilon > 0)(\exists\ x_0 \in \boldsymbol{M})(\forall\ \delta > 0)(\exists\ x \mid \| x - x_0 \| \\ &\qquad < \delta \text{ 且 } x \in \boldsymbol{M})[\,\| f(x) - f(x_0) \| \geqslant \varepsilon] \end{aligned}$$

类似地还可以有

矩阵 $A\in \boldsymbol{R}^{m\times n}$具有线性无关列，系指：

$$(\forall\ x \in \boldsymbol{R}^n \mid x \neq 0)[Ax \neq 0]$$

$f(x)\in L-\mathrm{Li}_x(\boldsymbol{M})$系指：

$$(\forall\ \text{有界闭集}\ \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{M})(\exists\ \kappa > 0)(\forall\ x_1, x_2 \in \boldsymbol{N})[\| f(x_1) - f(x_2) \| \leqslant \kappa \| x_1 - x_2 \|]$$

今后还会引进一些记号以方便与简化叙述，这在引入时再作说明.

考虑由微分方程组

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = g(t,z) \tag{1.1}$$

描述的动态系统，其中 $z(t)\in \boldsymbol{R}^n$，$g(t,z):\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$. 若又有

$$g(t,z) \in C(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S}) \cap L - \mathrm{Li}_z(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S}) \tag{1.2}$$

则由微分方程理论可知，对于初值问题

$$z(t_0) = z_0, \quad (t_0, z_0) \in \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{S} \tag{1.3}$$

系统(1.1)存在唯一解，记其为 $z(t;t_0,z_0)$，即它是(1.1)的解，且有 $z(t_0;t_0,z_0)=z_0$.

在以后的讨论中，除非特别声明，均认为 $z(t;t_0,z_0)$在整个$[t_0,+\infty)$上定义且有 $z(t;t_0,z_0)\in\boldsymbol{S}$，$\forall\ t\geqslant t_0$.

定义 1.1 系统(1.1)的特解 $\tilde{z}(t)$称为是稳定的，系指：

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\forall\ t_0 \in \boldsymbol{J})(\exists\ \delta > 0)(\forall\ z_0 \mid [z_0 - \tilde{z}(t_0)] \in \dot{\boldsymbol{B}}_\delta)[(z(t;t_0,z_0) - \tilde{z}(t)) \in \dot{\boldsymbol{B}}_\varepsilon] \tag{1.4}$$

若此外还有

$$\lim_{t\to+\infty} \{z(t;t_0,z_0) - \tilde{z}(t)\} = 0 \tag{1.5}$$

则特解 $\tilde{z}(t)$就称为是渐近稳定的. □

系统的特解的稳定性是解在有限时间区间上对初值的连续依赖性在无穷时间区间上的扩展.

研究系统(1.1)中任一解$z(t)$相对特解$\tilde{z}(t)$的扰动$x(t)=z(t)-\tilde{z}(t)$,则 $x(t)$是初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t,\tilde{z}(t)+x) - g(t,\tilde{z}(t)) = f(t,x) \\ x(t_0) = z(t_0) - \tilde{z}(t_0) \end{cases} \tag{1.6}$$

的解.容易验证有

1° $f(t,0)\equiv 0$,即 $x=0$ 是系统 $\dot{x}=f(t,x)$的平衡位置.

2° 系统(1.1)的特解 $\tilde{z}(t)$是稳定或渐近稳定当且仅当系统

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0 \tag{1.7}$$

的零解 $x=0$ 是稳定或渐近稳定.

以后的讨论将集中讨论系统(1.7)的零解 $x=0$ 的稳定性问题.

定义 1.2 系统(1.7)的零解 $x=0$ 是稳定的,系指有

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\forall\ t_0 \in \boldsymbol{J})(\exists\ \delta>0)(\forall\ x_0 \in \dot{\boldsymbol{B}}_\delta)(\forall\ t \geqslant t_0)[x(t;t_0,x_0) \in \dot{\boldsymbol{B}}_\varepsilon] \tag{1.8}$$

相反,若有

$$(\exists\ \varepsilon>0)(\exists\ t_0 \in \boldsymbol{J})(\forall\ \delta>0)(\exists\ x_0 \in \dot{\boldsymbol{B}}_\delta)(\exists\ t_1 \geqslant t_0)[x(t_1;t_0,x_0) \overline{\in} \dot{\boldsymbol{B}}_\varepsilon] \tag{1.9}$$

则称系统(1.7)的零解 $x=0$ 是不稳定的. □

系统(1.7)的零解$x=0$是稳定与不稳定分别由(1.8)与(1.9)来定义,容易看出,这种相反的定义只是在式子中将∃与∀对换,然后结论相反而成,这也是用符号进行阐述的优点.

考查由系统(1.1)的特解 $\tilde{z}(t)$的稳定性转化到系统(1.7)的零解的稳定性的过程.如果 $g(t,z)$对 z 是线性的,即 $g(t,z)=A(t)z$,其中 $A(t):\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{R}^{n\times n}$,则易于验证

$$f(t,x) = g(t,\tilde{z}(t)+x) - g(t,\tilde{z}(t)) = A(t)x$$

由此可知

定理 1.1 线性系统

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.10}$$

的零解是稳定或渐近稳定当且仅当其任一特解是稳定或渐近稳

定. $\square$

定理 1.1 所表述的线性系统的这一特性对于非线性系统说来,一般是不存在的.

例 1.1 研究由方程

$$\ddot{\xi}+\omega^2\sin\xi=0$$

描述的单摆运动的稳定性. 引入变量

$$\xi_1=\xi,\quad \xi_2=\dot{\xi}$$

则方程变为

$$\dot{\xi}_1=\xi_2,\quad \dot{\xi}_2=-\omega^2\sin\xi_1$$

如果引入函数

$$V=\omega^2(1-\cos\xi_1)+\frac{1}{2}\xi_2^2$$

则由于系统是能量守恒的,对于初值问题

$$\xi_1(t_0)=\xi_{10},\quad \xi_2(t_0)=\xi_{20}$$

的解 $\xi_1(t)$,$\xi_2(t)$恒有

$$\begin{aligned}&\omega^2[1-\cos\xi_1(t)]+\frac{1}{2}\xi_2^2(t)\\&\quad=\omega^2[1-\cos\xi_{10}]+\frac{1}{2}\xi_{20}^2=\text{const}\end{aligned}\tag{1.11}$$

注意到 $V(\xi_1,\xi_2)=C$ 在 ξ_1-ξ_2 平面上描述的是对应不同 C 值的一族曲线,而在 C 值不大时对应曲线是封闭的. 由于 $V(\xi_1,\xi_2)$是其变量的连续函数且 $V(0,0)=0$,于是可知对应系统的平衡位置 $\xi_1=\xi_2=0$ 是稳定的.

对于(1.11),若取 $\xi_{20}=0$ 所对应的解,则有

$$[\dot{\xi}(t)]^2/2=\omega^2[\cos\xi(t)-\cos\xi_{10}]$$

其中 ξ_{10}是单摆对应该运动的振幅. 不难算出对应的振动周期为

$$T_{\xi_{10}}=\frac{2}{\omega}\int_0^{\xi_{10}}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\cos\xi-\cos\xi_{10}}}$$

易于证明有

$$T_{\xi_{10}} > T_{\xi'_{10}}, \quad 当\ \xi_{10} > \xi'_{10}$$

这表明系统中任一非零特解 $\xi(t)$，在其邻近均存在与其不等周期的振动，这种不等周期性将使系统的任一非零特解均不满足定义 1.1 的要求，从而是不稳定的. □

对于系统(1.7)，以后总设存在 $\rho>0$，使

$$f(t,x) \in C(J \times \dot{B}_\rho) \cap L - \mathrm{Li}_x(J \times \dot{B}_\rho)$$

从而保证在 $(t,x)\in J\times\dot{B}_\rho$ 内系统初值问题解的存在唯一性.

定义 1.3 系统(1.7)的零解 $x=0$ 是一致稳定的，系指

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall\ t_0 \in J)(\forall\ x_0 \in \dot{B}_\delta)(\forall\ t \geqslant t_0)[x(t;t_0,x_0) \in \dot{B}_\varepsilon] \tag{1.12}$$

□

对比(1.8)与(1.12)，可以发现其间区别在于$(\forall\ t_0\in J)$与$(\exists\ \delta>0)$交换了位置，即(1.8)中的 δ 是与 t_0 有关，而(1.12)中的 δ 是与 t_0 无关的.

不难证明有

定理 1.2 系统若是定常的，即

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) \equiv 0 \tag{1.13}$$

则零解的稳定与一致稳定等价. □

为了建立零解渐近稳定的一组概念，引入

定义 1.4 系统(1.7)的零解 $x=0$ 是吸引的，系指

$$(\forall\ t_0\in J)(\exists\ \eta > 0)(\forall\ \varepsilon > 0)(\forall\ x_0 \in B_\eta)(\exists\ T \geqslant 0)(\forall\ t \geqslant t_0 + T)[x(t;t_0,x_0) \in B_\varepsilon] \tag{1.14}$$

是同等吸引的，系指

$$(\forall\ t_0\in J)(\exists\ \eta > 0)(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ T \geqslant 0)(\forall\ x_0 \in B_\eta)(\forall\ t \geqslant t_0 + T)[x(t;t_0,x_0) \in B_\varepsilon] \tag{1.15}$$

是一致吸引的，系指

$$(\exists\ \eta> 0)(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ T \geqslant 0)(\forall\ t_0 \in J)(\forall\ x_0 \in B_\eta)(\forall\ t \geqslant t_0 + T)[x(t;t_0,x_0) \in B_\varepsilon] \tag{1.16}$$

□

一般将上述定义中的 $\boldsymbol{B}_\eta$ 称为是 $x=0$ 的吸引区而将 T 称为吸引时间或衰减时间. 当系统的零解是吸引的时,其真正的吸引区是十分复杂的. 定义 1.4 中的 $\boldsymbol{B}_\eta$ 只是真正吸引区的子集且是一个充分性的吸引区,通常也称其为吸引区. 零解是同等吸引的,表明吸引区与衰减时间均可能与初始时间 t_0 有关. 零解是一致吸引的,则存在与 t_0 无关的吸引区且衰减时间可只由 η 与 ε 确定.

例 1.2 研究二阶系统[20]

$$\begin{cases}\dot{\xi}=\varphi_1(\xi,\eta)=\dfrac{\xi^2(\eta-\xi)+\eta^5}{(\xi^2+\eta^2)[1+(\xi^2+\eta^2)^2]}\\ \dot{\eta}=\varphi_2(\xi,\eta)=\dfrac{\eta^2(\eta-2\xi)}{(\xi^2+\eta^2)[1+(\xi^2+\eta^2)^2]}\end{cases}$$

这是由 P. Э. Виноград 给出以表明零解是吸引的但不稳定的反例.

易于证明 $\xi=\eta=0$ 是该系统唯一的平衡点.

由于

$$\varphi_1(-\xi,-\eta)=-\varphi_1(\xi,\eta),\quad \varphi_2(-\xi,-\eta)=-\varphi_2(\xi,\eta)$$

则系统的积分曲线及流向刚好关于原点对称,因而整个讨论仅需在上半平面进行.

引入极坐标 $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $u=\mathrm{tg}\varphi=\eta/\xi$,则有

$$\dot{\rho}=\frac{\rho}{(1+\rho^4)(1+u^2)^2}[u^4-2u^3+u-1+u^3\rho^3\sin^2\varphi]$$

在采用比较复杂的相平面进行分区分析以后,可以证明积分曲线的渐近性质,它们最终将进入图 1.1 中带阴影的区域 S 中,而 $\rho(t)$ 的渐近特性可由

$$\rho(t)=o(\mathrm{e}^{-t/15}),\quad \lim_{t\to\infty}\rho(t)=0$$

刻画,从而零解是吸引的.

为了证明原点不稳定,研究三角形区域 OPQ,其边界为

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{27}},\quad \eta=3\xi,\quad \xi=0$$

交点 Q 的坐标为 $(1/3\sqrt{27},1/\sqrt{27})$. 于是可以有下述流向特点: