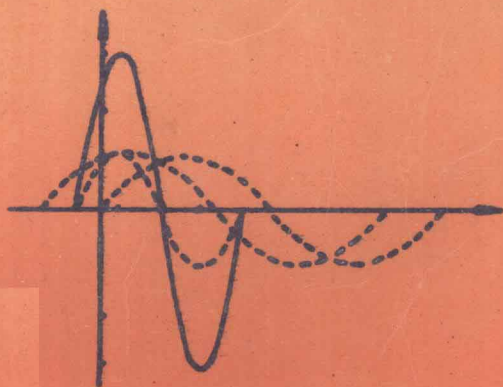


名师谈数学 高考知识点

江兆林 安瑞卿 主编



南海出版公司

名师谈数学高考知识点

主 编 江兆林 安瑞卿
副主编 邱树林 王汉岭 肖秉林
王 林 黄伟明 齐登勤

南海出版公司

1995·海口

琼新登字 01 号

名师谈数学高考知识点

江兆林 安瑞卿 主编

总 经 理 霍宝珍

责任编辑 原式溶

封面设计 刘金廷

南海出版公司出版发行

新华书店经销

山东文苑印务公司印刷

850×1168毫米 32开 12.5印张 470千字

1995年11月第1版 1995年11月第1次印刷

印数:1~12000

ISBN 7-80570-947-5/G · 354

定价:11.80元



江兆林,男,1963年12月出生.1986年7月于曲阜师范大学数学系本科毕业,1993年7月获基础数学硕士学位,现临沂师专数学系数学分析教研室主任、讲师.先后在《数学的实践与认识》,《高校应用数学学报》,《曲阜师范大学学报》(自然科学版),《高等知识工程论丛》等发表学术论文13篇,在《中等数学》,湖北《中学数学》,苏州《中学数学》,《中学数学杂志》等7家杂志发表数学教育论文10篇,出版专著《循环矩阵》,主编高校教材《高等数学》(上、下册),《高等数学习题课讲义》(上、下册),《数学分析》(上、下册),《数学分析习题课讲义》(上、下册),《概率统计学习指导》.主编数学教育类书《初等数学教与学》,《平面几何新方法》,《几何学新方法》,《代数学新方法》,《初等数学学习新路》(上、下册),独自编著《中国中学数学教材研究文集》(上、下册).共获教材一、二、三等奖14项,论文一、二、三等奖15项.95年获山东省青年科技奖.



安瑞卿,男,1967年10月出生于山东省平邑县,1989年7月毕业于枣庄师范专科学校数学系,后又在山东教育学院函授毕业,同年分配到枣庄市第七中学任教,1990年春,在市区、教委组织的督导检查中被作为全区的典型总结表扬并报区宣传部,1992年调入山亭区新建的重点中学——山亭区新城中学任教,1994年调入枣庄市第十八中学任教,1995被枣庄市第一所私立完中聘用,教学之余,致力于数学解题方法的研究和数学教育理论研究,迄今已发表论文近20篇,主编了《初中数学学习新路》,作为副主编编写了《名师谈数学教与学》(高中卷、初中卷)两部著作,参加编写《中国中学数学教材研究文集》、《代数学新方法》,被中国数学奥林匹克委员会授予中国数学奥林匹克二级教练员,被《中学数学杂志》、《初中数学》、《少年之友报》聘为特约通讯员。

前 言

多年来,不少学校师生热切盼望有一种对高中数学高考知识点进行系统分析与研究的书籍,为了满足师生们的这种愿望,配合高中数学教与学,广泛交流高考复习信息,帮助高中毕业生和社会青年复习应试,我们特邀请了国内在数学教育研究中享有盛誉,又在实际教学中长期作出突出成绩的126位一线优秀教师撰写了本书.

本书以国家教委考试中心数学科《考试说明》中所强调的“要把重点放在系统地掌握课程内在联系上,掌握分析问题和解决的方法和解决问题的能力上”,“从知识型向能力型转变,从暴露型向潜隐型转变”等新的命题原则,作为编写本书的根本指导思想,对高考数学基本要求掌握和考查的136个知识点,均按:一、考点分析;二、方法导引;三、基本联系;四、应用举例;五、考点研究;六、考点训练.六个层次一一进行了全方位解析.力避“超纲”现象.

我们说本书是目前国内范围最广泛、体系最完整、结构最系统、内容最翔实准确、指导应考最实用的一本高考复习用书,主要是该书作者层次高、范围广.既有数学名家,又有大批数学新秀.本书126位作者中,特级教师3位,高级教师41位,一级教师61位.他们有些是国家级、省级、地级或县级优秀教师;有些是省级、地级或县级拔尖人才;有些是国家级奥林匹克优秀教练员、国家一级或二级教练员;有些是省、地或县级新长征突出手;有些是省、地或县级教学能手;有些是校长、副校长、主任或副主任;有些是省、地或县十佳青年教师.

需要特别说明的是:全国优秀教师,曾发表160余篇论文的曾思江先生;市级优秀专家,特、高级教师,曾发表100多篇论文的叶家振先生;中国当代教育名人、高级讲师,曾发表100多篇论文的祝正平先生;多次被全国数学竞赛组委会聘请为特邀命题员、市青年专业技术拔尖人才,曾发表100多篇论文的马茂年先生等许多知名专家在百忙中为本书撰稿.在此,表示衷心的感谢!

透过本书可以窥见我国高考研究的现状和发展方向,欣赏到我国高考研究中的新课题、新成果、新思想、新方法.因此,本书师生均可使用,特别是对高一学生,可一册在手,使用三年,对高二、高三学生也是最好的高考应试复习用书.

编 者

1995年10月

目 录

(作者排名不分先后)

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

1. 集合	邱树林(1)
2. 子集、交集、并集	谭业静(4)
3. 补集	高振山(7)
4. 映射、逆映射	曹敬坤(10)
5. 反函数	孟祥礼(13)
6. 函数的定义域	韩荣春(16)
7. 函数的值域	钟少成(19)
8. 函数的奇偶性	肖秉林(22)
9. 函数的单调性	袁江涛(25)
10. 幂函数	张世敏(28)
11. 指数函数	陈佑庄(31)
12. 对数函数	安瑞卿(34)
13. 换底公式	李盛彦(37)
14. 指数方程	兰永胜(40)
15. 对数方程	孙刚(43)

第二章 三角函数

16. 任意角的表示	蓝木成(46)
17. 象限角和轴线角	沈克荣(49)
18. 弧度制	贺孝忠(51)
19. 任意角的三角函数定义	彭胜涛(54)
20. 同角三角函数间的关系	李艳成(56)
21. 诱导公式	黎友源(59)
22. 求任意角的三角函数值	吴万辉(62)
23. 正弦函数的图象和性质	王森华(65)
24. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	林毓辉(68)
25. 余弦函数的图象和性质	叶定华(72)

26. 正、余切函数的图象和性质	刘作高(75)
------------------------	---------

第三章 两角和与两角差的三角函数

27. 和差公式	鲁世君(78)
28. 倍角公式	舒明庭(81)
29. 半角公式	艾胜美(84)
30. 万能公式	田波(87)
31. 和差化积	李辛甲(90)
32. 积化和差	曾思江(93)

第四章 反三角函数与简单的三角方程

33. 反三角函数的概念	叶青柏(96)
34. 反三角函数的图象和性质	曲卫国(99)
35. 简单的三角方程	刘文联(102)

第五章 不等式

36. 不等式的一般性质	刘健(105)
37. 基本不等式	蓝木成(107)
38. 不等式的证明(比较法)	陈荷桥(110)
39. 不等式的证明(分析法)	窦民(113)
40. 不等式的证明(综合法)	李淮光(115)
41. 不等式的证明(判别式法)	李云海(118)
42. 一元一次不等式	冒红玉(120)
43. 一元二次不等式	张权(122)
44. 简单的高次不等式和分式不等式	肖凤君(125)
45. 简单的无理不等式	中原(128)
46. 简单的指数不等式和对数不等式	李诗智(132)
47. 简单的绝对值不等式	王新平(135)

第六章 数列、极限、数学归纳法

48. 数列通项公式	余让昆(138)
49. 等差数列	缪应志(142)
50. 等比数列	陈荣好(145)
51. 等差中项和等比中项	杨桢固(148)
52. 数列极限的求法	任继先(151)
53. 无穷递缩等比数列	游少华(154)
54. 数学归纳法	邵滨(157)

第七章 复数

55. 虚数单位 i	李继茂(160)
56. 复数的代数形式	陈飞俭(162)
57. 复数的向量形式	郑必建(165)
58. 复数的三角形式	马茂年(168)
59. 复数的辐角及其主值	肖成宽(171)
60. 复数的模	王汉岭(174)
61. 共轭复数	孙志刚(177)
62. 复数的加减运算	陈文远(180)
63. 复数的乘法运算	韩廷蕴(183)
64. 复数的除法运算	胡国平(186)
65. 复数的乘方(棣莫佛定理)及开方	王思勤(188)
66. 简单的复数方程	黄家湘(191)

第八章 排列、组合、二项式定理

67. 加法原理和乘法原理	朱永彦(194)
68. 排列和排列数公式	蒋海瓿(197)
69. 组合和组合数公式	王志进(200)
70. 组合数的两个重要性质公式	孙罗超(202)
71. 二项式定理	王加顺(204)
72. 二项展开式的系数	叶家振(206)

第九章 直线和平面

73. 平面的基本性质	邱法香(209)
74. 三线平行公理(公理 4)	陈韩生(212)
75. 两边分别平行的两个角	(215)
76. 异面直线所成的角	张旭成(217)
77. 异面直线的公垂线及距离	鲁振明(220)
78. 直线和平面平行的判定	陆永辉(222)
79. 直线和平面平行的性质	张福显(225)
80. 直线和平面垂直的判定	冒维玉(228)
81. 直线和平面垂直的性质	常成儒(231)
82. 点到平面的距离	何辛勤(235)
83. 斜线在平面上的射影	滕以田(238)
84. 直线和平面所成的角	黄伟明(240)
85. 三垂线定理及其逆定理	何北琪(243)

86. 两平面平行的判定	尹祥(246)
87. 两平面平行的性质	黄活祥(249)
88. 二面角及平面角	张本尧(252)
89. 两平面垂直的判定	初可吉(255)
90. 两平面垂直的性质	杨雨春(258)
91. 公式 $EF^2 = d^2 + m^2 + n^2 \pm 2mn\cos\theta$	韩新生(262)

第十章 多面体和旋转体

92. 棱柱的性质及表面积	陈能茂(265)
93. 棱锥的性质及表面积	张宗申(268)
94. 棱台的性质及表面积	李恒德(271)
95. 圆柱的性质及表面积	赵国福(274)
96. 圆锥的性质及表面积	陈贵伦(277)
97. 圆台的性质及表面积	倪向东 祝正平(279)
98. 球的性质及表面积	钟杰华(282)
99. 球冠(球带)及其面积	王林(285)
100. 体积公理	郑祖平(287)
101. 柱体的体积	朱宏兵(290)
102. 锥体的体积	马有河(293)
103. 台体的体积	(296)
104. 球(球缺、球台)的体积	杜永(298)

第十一章 直线

105. 两点间的距离	王户世(300)
106. 有向线段	邱树林(303)
107. 线段的定比分点	魏宝辉(305)
108. 直线的倾斜角和斜率	袁禹门(308)
109. 直线方程的四种特殊形式(点斜式、斜截式、两点式、截距式)	郑秀云(311)
110. 直线方程的一般式	余显华(314)
111. 两直线平行	(317)
112. 两直线垂直	魏晓东(319)
113. 两直线所成的角	(322)
114. 两直线的交点	贺孝忠(324)
115. 点到直线的距离	张学灵(327)

第十二章 圆锥曲线、坐标平移

116. 曲线与方程	谭柏生(330)
117. 充要条件	尹慕文(333)
118. 两曲线的交点	朱国安(335)
119. 圆的标准方程	陈建国(338)
120. 圆的一般方程	林嘉慧(341)
121. 椭圆及其标准方程	毛天翔(344)
122. 椭圆的几何性质	马京英(347)
123. 双曲线及其方程	祝正平(349)
124. 双曲线的几何性质	贺孝忠(353)
125. 抛物线及其标准方程	周德芳(355)
126. 抛物线的几何性质	张永波(358)
127. 圆锥曲线的统一定义	刘文虎(361)
128. 坐标轴的平移	邢天军(364)
129. 利用坐标轴平移化简圆锥曲线方程	邓集柏(367)

第十三章 参数方程、极坐标

130. 曲线的参数方程	冯志云(370)
131. 参数方程与普通方程的互化	王林(373)
132. 直线参数方程的几何意义	郑祖平(376)
133. 极坐标	陈英志(378)
134. 极坐标与直角坐标互化	滕以田(380)
135. 曲线的极坐标方程	王之林(383)
136. 圆锥曲线的极坐标方程	林群(386)

第一章 幂函数、指数函数和对数函数



作者简介 邱树林,男,1963年4月出生,1987年毕业于山东师大数学系,1991年被评为滨州地区教学能手,1993年被评为中学高级教师。教学成绩显著,曾多次执教地区公开课,深受好评。近几年曾参编过四部教学专著,并在省级以上刊物上发表教学论文十余篇,其中发表在华东师大《数学教学》上的论文“提高数学讲评课质量之我见”被中国人民大学《中学数学教学》杂志转载。现任无棣一中数学教师、副校长。

1. 集合

一、考点分析 把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合。集合常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示,集合里的各个对象叫集合的元素,通常用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示。集合是数学中最基本、最原始的概念之一,是研究数学问题的基础和工具。

本考点的主要内容有:

1. 集合中元素的特征:集合是一种简炼而精确、具有高度统一性和概括性的数学语言,其元素有以下三个特征:

(1) 确定性 —— A 是一个给定的集合, x 是某一具体对象,则 $x \in A$ 或 $x \notin A$,两种情况有且只有一种成立。也就是说,一个集合中的元素都具有某种性质 P ,具备性质 P 的元素都是该集合的元素。若某些对象不具备确定性,则这些对象就不能构成一个集合。

(2) 互异性 —— 同一集合中的各个对象是互不相同的,如果有相同的元素归入同一集合时,只算作该集合的一个元素。在解决“两个集合相等”的问题时,要特别注意元素的互异性。

(3) 无序性 —— 一个集合里的元素之间是没有顺序的。例如 $\{e, i, \pi\}$ 和 $\{i, \pi, e\}$ 表示的是同一集合。

2. 元素与集合的关系 元素与集合的关系有属于($\in$)和不属于($\notin$)两种,且仅有这两种关系。

3. 集合的表示 选择适当的方法来表示一个集合是正确理解和准确使用集合语言的关键。这里要重点掌握集合的两个基本表示方法:

(1) 列举法 —— 把集合中的元素一一列举出来写在大括号内表示集合的方

法,往往适用于元素不太多或元素有明显规律时.例如,元素为 a_1, a_2, a_3 的集合可表示为 $\{a_1, a_2, a_3\}$,自然数集可表示为 $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ 等等.

(2) 描述法——把集合中所有元素的共性以文字或数学表达式写在大括号内表示集合的方法.其一般形式为: $\{\text{元素的一般形式} \mid \text{元素所具有的共同属性}\}$,当集合中的元素过多时常常用此法表示.例如,圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的所有点构成的集合可表示为 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x, y \in \mathbf{R}\}$.另外,还可用区间、图形(韦恩图)表示一个集合.一些常用数集的表示:自然数集 $\mathbf{N}$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,实数集 $\mathbf{R}$,复数集 $\mathbf{C}$.

高考要求 理解集合的概念,了解属于的意义;能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合.

二、方法导引 在高考中,集合几乎是每年必考的内容之一.一般来说,以两种方式进行考查:一是考查集合本身的知识,如怎样表示一个集合?怎样判断 $x \in A$?等等,且多以选择题或填空题的形式出现;二是考查集合语言与集合思想的应用,如函数的定义域、值域,方程与不等式的解集,排列组合问题,解几中曲线间的相交问题,等等.即考查把集合作为工具在其他数学问题中的应用,多以解答题的形式出现.

三、基本联系 集合作为重要的数学语言几乎渗透到数学的一切领域,例如几何学可以看成是研究点的集合;代数学可以看成是研究数的集合以及这些集合的运算规律等.又由于集合语言简明、准确,所以很多数学问题是以集合的形式出现的,集合语言是一种符号语言,因而有一定的抽象性,实现集合语言向非集合语言的转化(或“转译”)是解决这类问题的关键.例如, $k \in \mathbf{N}, I_k = (2k - 1, 2k + 1]$,求集合 $M_k = \{a \mid \text{使方程}(x - k)^2 = ax \text{ 在 } I_k \text{ 上有两个不等的实根}\}$.该题可转译为这样一个非集合问题:方程 $(x - k)^2 = ax$ 在区间 $I_k = (2k - 1, 2k + 1]$ 上有两个不等实根,求 a 的取值范围.再如, $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x, y \in \mathbf{R}\}, B = \{(x, y) \mid x + y = r, x, y \in \mathbf{R}\}$,若存在 $(x_0, y_0) \in A$,且 $(x_0, y_0) \in B$,求 r 的取值范围.该题实质是这样一个数学问题:若直线 $x + y = r$ 和圆 $x^2 + y^2 = 1$ 有交点,求 r 的取值范围,等等.

四、应用举例 例1 下列命题中,正确的是_____. (1) 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合,最多含有2个元素; (2) 集合 $\{x^2 - 2x - 1 = 0\}$ 中含有2个元素; (3) 很小的正数能构成一个集合; (4) $\{1, 3, 5\}$ 和 $\{3, 5, 1\}$ 表示的是同一集合; (5) $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}, C = \{x \mid x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$,若 $a \in A, b \in B$,则 $a + b \in C$.

分析:该题考查集合中元素的特征及“ $\in$ ”的意义,正确的命题是(1)、(4).

例2 选取适当的方法表示下列集合:

(1) x, y, z 都是非零实数, $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xy}{|xy|} + \frac{xyz}{|xyz|}$ 可能取的值组成的集合; (2) 直角坐标系中, 不在坐标轴上点的集合.

分析: (1) 用列举法. 按 x, y 同正、同负、异号三种情形各配上 z 为正或 z 为负共六种情况考虑, 并注意集合中元素的互异性. 答案为 $\{-3, -1, 1, 5\}$. (2) 用描述法, 答案为 $\{(x, y) | xy \neq 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$.

例 3 集合 S 满足条件: 若 $x \in S$, 则 $(1-x)/(1+x) \in S$. (1) 若 $S = \{x\}$, 求 x ; (2) $-1 \pm \sqrt{2} \in S$, 且 S 中含有 n 个元素, 证明: $n \in \{x | x = 2k, k \in \mathbf{N}\}$.

分析: (1) $x = (1-x)/(1+x) \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$. (2) 设 $x \in S$, 则 $(1-x)/(1+x) \in S, \therefore x \neq -1 \pm \sqrt{2}, \therefore x \neq (1-x)/(1+x)$, 即 S 中的元素是一对一对出现的, 故 n 为偶数.

五、考点研究 集合相等与元素的互异性. 解决集合相等的问题易产生与互异性相矛盾的增解, 这需要解题后的反思和检验.

例 4 $A = \{x, xy, \lg(xy)\}, B = \{0, |x|, y\}, A = B$, 求 x, y .

解: $\because xy \geq 0$, 而 $A = B, \therefore \lg(xy) = 0$, 即 $xy = 1$. 若 $x = |x|$, 则 $x > 0$ 且 $xy = y$, 于是 $x = y = xy = 1$, 这与集合的元素的互异性相矛盾. $\therefore x = y$ 且 $xy = |x|$, 又 $xy = 1, \therefore x = -1, y = -1$. 这时 $A = B = \{0, 1, -1\}$, 故 $x = y = -1$.

请思考: $A = \{a, a+d, a+2d\}, B = \{a, ar, ar^2\} (d \neq 0, r \neq 1)$, 求使 $A = B$ 成立的充要条件. 特别, 求 $a = 1$ 时的集合 A . ($r = -1/2$ 且 $d = -3a/4; a = 1$ 时, $A = \{1, 1/4, -1/2\}$).

六、考点训练 1. 选择题: $A = \{x | x = \frac{a^2 - 2a + 1}{a - 1}, a \in \mathbf{Z}, a \neq 1\}$, 若 $x \in A$, 则 (1) $x \in \mathbf{N}$, (2) $x \in \mathbf{Z}$, (3) $x \in \mathbf{Q}$, (4) $x \in \mathbf{R}$, 其中正确的有 ()

(A) 1 个; (B) 2 个; (C) 3 个; (D) 4 个.

2. 填空题: (1) 用描述法表示集合 $\{1, 5, 25, 125, 625\} =$; (2) $A = \{m + \sqrt{2}n | m, n \in \mathbf{Z}\}$, $x, y \in A$, 则 $x + y, xy, y/x (x \neq 0)$ 中不是 A 的元素的是

3. 设 $G = \{a + b\sqrt{2} | |a^2 - 2b^2| = 1, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$, 若 $x, y \in G$, 求证: (1) $xy \in G$; (2) $1/x \in G$.

4. 集合 $A = \{\text{模为 } 1 \text{ 的 } n \text{ 个复数}\}$ 满足条件: (1) $1 \in A$; (2) 若 $z, w \in A$, 则 $z - 2w\cos\theta \in A$, 其中 $\theta = \arg(z/w)$. 试求 $n \leq 4$ 时集合 A 中的每一个元素.

答案 1. (C). 2. (1) $\{x | x = 5^{n-1}, n \in \mathbf{N}, n < 6\}$; (2) y/x .

4. $A = \{1, -1, i, -i\}$.



作者简介 谭业静,男,1965年3月出生.毕业于辽宁师范大学,辽宁省清原满族自治县高级中学数学教研组长,中教一级.参加抚顺市85期间教育科研项目“数学思维能力和品质的训练和培养”的研究工作,得到许多研究成果.在抚顺市教师教学基本功表演赛中,获中学数学科第一名.所作《怎样在高三数学课教学中处理好诸因素的关系》获市级优秀教学经验,曾获县级优秀教育工作者,市级教学新秀.

2. 子集、交集、并集

一、考点分析 1. 子集概念涉及两个集合之间的包含关系.(1)对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$);(2)如果集合 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A ,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作 $A \subset B$ (或 $B \supset A$);(3)性质:1° 任何一个集合是它自身的子集,即有 $A \subseteq A$;2° 空集是任何集合的子集,即 $\emptyset \subseteq A$;3° 对于集合 A, B, C ,若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$;若 $A \subset B, B \subset C$,则 $A \subset C$;4° 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则 $A = B$.

2. 交集和并集概念涉及两个集合之间的运算关系.(1)由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$.即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$;(2)由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$.即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;(3)性质: $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A, A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A$.

高考要求 理解子集、交集、并集的概念和性质,掌握有关的术语和符号,正确地表示两集合的包含关系及它们的交集和并集.

二、方法导引 1. 首先要注意集合的元素的一般特征以及集合与集合关系的实质.如有可能一定要把有关集合以及集合之间的关系等价转化为最简形式.

2. 从数量关系去分析子集、交集、并集时,有时较为繁难,若能追溯问题的几何背景,数形结合,将抽象思维和形象思维结合起来.通过对图形的处理,发挥直观对抽象的支柱作用.实现抽象概念与具体形象、表象的联系和转化,化难为易,化抽象为直观,挖掘题中的隐含条件,促进问题的解决.

三、基本联系 1. 子集、交集、并集之间存在着密切联系.(1) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;(2)1° 若 $A \subseteq B$,则 $A \cap B = A, A \cup B = B$;2° 若 $A = B$,则 $A \cap B = A \cup B = A = B$.

2. 子集、交集、并集是集合论的最基本的内容. 它和许多数学概念都有着十分广泛的联系, 其中和函数、方程、不等式、复数、排列组合、解析几何、三角之间的联系尤为密切.

四、应用举例 例1 集合 $\{1, 2, 3\}$ 的子集总共有()个.

(A)7; (B)8; (C)6; (D)5.

解: 含一个元素的子集有 C_3^1 个, 含二个元素的子集有 C_3^2 个, 含三个元素的子集有 C_3^3 个, 不含任何元素的集合(空集) C_3^0 个, 共有 $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3$, 即8个, 选(B).

例2 若 $P = \{y | y = x^2 + 1, x \in N\}$, $Q = \{y | y = x^2 - 2x + 2, x \in N\}$, 则下列关系正确的是()

(A) $P \cap Q = \emptyset$; (B) $P \subset Q$; (C) $P = Q$; (D) $P \supset Q$.

解: P, Q 是定义在自然数集 N 上的函数值的集合, 即函数的值域. $P = \{2, 5, 10, 17, \dots\}$ 而 Q 中 $y = (x-1)^2 + 1$, 故 $Q = \{1, 2, 5, 10, 17, \dots\}$ 得 $P \subset Q$, 应选(B).

例3 已知集合 P, Q, R 满足 $P \subset Q \subset R$, 下列各式中错误的是()

(A) $(P \cup Q) \subset R$; (B) $P \subset (Q \cap R)$; (C) $(P \cap R) \subset Q$; (D) $(P \cup R) \subset Q$. 如图 2-1.

解: 从韦恩图中看出 P, Q, R 的关系, 应选(D).

例4 已知集合 A 和集合 B 各有12个元素, $A \cap B$ 含4个元素, 试求同时满足下列两个条件的集合 C 的个数: (1) $C \subset (A \cup B)$, 且 C 中含有3个元素; (2) $C \cap A \neq \emptyset$. (1986年高考题).

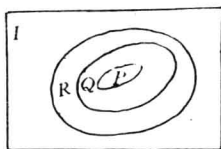


图 2-1

解 利用韦恩图可知, $A \cup B$ 共有 $8 + 8 + 4 = 20$ 个元素, 又 $A \cap C \neq \emptyset$, 可解得集合 C 的个数共有 $C_{12}^1 \cdot C_8^2 + C_{12}^2 \cdot C_8^1 + C_{12}^3 = 1084$ (或 $C_{20}^3 - C_8^3 = 1084$). 如图 2-2.

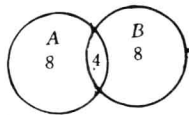


图 2-2

例5 设 a, b 是两个实数, $A = \{(x, y) | x = n, y = na + b, n \text{ 是整数}\}$, $B = \{(x, y) | x = m, y = 3m^2 + 15, m \text{ 是整数}\}$, $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 144\}$ 是平面 xOy 内的点集合, 讨论是否存在 a 和 b 使得(1) $A \cap B \neq \emptyset$; (2) $(a, b) \in C$ 同时成立(1985年全国高考题).

分析: $A \cap B \neq \emptyset$ 意味着存在整数 n , 使得 $na + b = 3n^2 + 15$; $(a, b) \in C$ 意味着 $a^2 + b^2 \leq 144$, 于是构造与原命题等价的命题: 讨论关于 a, b 的混合组

$$\begin{cases} na + b = 3n^2 + 15 \\ a^2 + b^2 \leq 144 (n \in \mathbf{Z}) \end{cases} \quad \text{①} \quad \text{② 是否有实数解.}$$

解: 假设存在实数 a, b 满足以上混合组, 由 ① 得 $b = 3n^2 + 15 - an$, 代入 ② 得关于 a 的不等式 $(1+n^2)a^2 - 2n(3n^2+15)a + (3n^2+15)^2 - 144 \leq 0$, $\therefore$ 该不等式有解, 且 $1+n^2 > 0$, $\therefore \Delta = -36(n^2-3)^2 \geq 0$, 即 $(n^2-3)^2 \leq 0$, 但 $(n^2-3)^2 \geq 0$, $\therefore n^2 = 3, n = \pm\sqrt{3}$ 这与 $n \in \mathbf{Z}$ 矛盾, 故不存在实数 a, b 使得 (1)、(2) 同时成立.

五、考点研究 · 分类与讨论的基本要求

当我们研究与参数 a 有关的数学命题, 需要对 a 进行分类讨论才能解决时, 必须满足下列要求: 若 $a \in M$, 根据我们需要可以把 M 分割成若干个子集 $M_1, M_2, \dots, M_n$, 按 $a \in M_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 分类研究, 但 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 必须满足 (1) 对任意的 $i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, M_i \cap M_j = \emptyset$; (2) $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n = M$.

例 6 求函数 $f(x) = a \sin x + b$ 的最值.

解: $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 的最大值是 $a + b$, 最小值是 $-a + b$; $a < 0$ 时, $f(x)$ 的最大值是 $-a + b$, 最小值是 $a + b$.

六、考点训练 1. 选择题: (1) 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \not\subseteq T, T \not\subseteq S$, 令 $X = S \cap T$, 那么 $S \cup X = (\quad)$

(A) X ; (B) T ; (C) $\emptyset$; (D) S .

(2) 设 $X = \{(2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}\}, Y = \{(4k \pm 1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 那么 X 与 Y 的关系是 $(\quad)$.

(A) $X \subset Y$; (B) $X \supset Y$; (C) $X = Y$; (D) $X \neq Y$.

2. 填空题: (1) 设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S , 其中由 3 个元素组成的子集数为 T . 则 T/S 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 已知集合 $E = \{\theta | \cos \theta < \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, F = \{\theta | \tan \theta < \sin \theta\}$, 那么 $E \cap F$ 为区间 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 集合 $A = \{x | x = \cos \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}\}$ 与 $B = \{y | y = \sin(2m-3)\pi/6, m \in \mathbf{Z}\}$ 之间是什么关系? 为什么?

4. 已知复数集合 $A = \{z | |(z-1)/z| = 1, \arg(z-1)/z = \pi\}, B = \{z | |z - z_1|, z_1 \in A\}, C = \{z | z = iz_2 + b, z_2 \in B, b \in \mathbf{R}\}$, 若 $B \cap C = \emptyset$, 求实数 b 的取值范围.

答案 1. (1) D; (2) C. 2. (1) $15/128$; (2) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. 3. $A = B$.

4. $b > \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ 或 $b < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.