高斯、克呂格投影計算表

緯度 0°——30°

克拉索夫斯基橢球体

金揚善主編

中国工业出版社

高斯、克呂格投影計算表

緯　度 0°—30°

克拉索夫斯基橢球体

金　揚　善　主　編

中　国　工　业　出　版　社

本表包含下列用途之計算用表：（1）大地坐标与平面坐标互相換算，（2）橢球面三角形改化为平面三角形的計算。表的精度达1毫米，可供三角測量精密計算之用。

本表附有“說明”，載有使用方法与算例，并扼要叙述了本表所用公式，編算方法，誤差分析，以便計算作业人員参考使用。

本表适用于緯度0°—30°。

高斯、克呂格投影計算表

緯度0°—30°

克拉索夫斯基橢球体

金揚善主編

（根据測繪出版社紙型重印）

*

国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯（北京三里河国家測繪总局）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本787×1092 1/16·印张7 1/4·字数150,000

1959年6月北京第一版

1962年10月北京新一版·1965年6月北京第二次印刷

印数1,617—3,216·定价(科六)0.95元

*

統一书号：15165·1915（測繪-46）

高斯、克呂格投影計算表

目　　錄

投影表的說明

投　影　表

高斯、克吕格投影計算表的說明

§1 高斯、克吕格投影計算的公式

（一） 投影計算的基本公式

（1） 由經緯度(L、B)計算平面坐标(x、y)的公式

$$\left.\begin{aligned}
x &= X + \frac{N}{2\rho^2} \operatorname{Sin} B \cos B \cdot l^2 + \frac{N}{24\rho^4} \operatorname{Sin} B \cos^3 B\,(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)\,l^4 \\
&\quad + \frac{N}{720\rho^6} \operatorname{Sin} B \cos^5 B\,(61 - 58t^2 + t^4)\,l^6 \\
y &= \frac{N}{\rho} \cos B \cdot l + \frac{N}{6\rho^3} \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2) l^3 \\
&\quad + \frac{N}{120\rho^5} \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) l^5
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

式中：L 为“投影点”的經度，B 为其緯度，l 为L与中央子午線經度 L_0之差，N 为該点上卯酉圈的曲率半徑，X为該点之平行圈所截中央子午線之弧長（距赤道），$b_1 = \frac{N}{\rho} \cos B$ 为該平行圈 $1''$之弧長，而 $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$，$t = \tan B$。

（2） 由經緯度(L、B)計算平面子午綫收斂角 γ 的公式

$$\gamma = \operatorname{Sin} B \cdot l + \frac{\operatorname{Sin} B}{3\rho^2} \cos^2 B (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4)\, l^3 + \frac{\operatorname{Sin} B}{15\rho^4} \cos^4 B (2 - t^2) l^5 \quad (2)$$

（3） 由平面坐标(x、y)計算經緯度(L、B)的公式

$$\left.\begin{aligned}
B_f - B &= \frac{\rho \tan B_f}{2M_f N_f} y^2 - \frac{\rho \tan B_f}{24 M_f N_f^3} (5 + 3t_f^2 + \eta_f^2 - 9\eta_f^2 t_f^2) y^4 \\
&\quad + \frac{\rho \tan B_f}{720 M_f N_f^5} (61 + 90 t_f^2 + 45 t_f^4) y^6 \\
l &= \frac{\rho}{N_f \cos B_f} y - \frac{\rho}{6N_f^3 \cos B_f} (1 + 2t_f^2 + \eta_f^2) y^3 \\
&\quad + \frac{\rho}{120 N_f^5 \cos B_f} (5 + 28 t_f^2 + 24 t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2 t_f^2) y^5 \\
&\text{或改化为下之形式：} \\
l &= y : \left\{ \frac{N_f \cos B_f}{\rho} + \frac{1}{6N_f \rho} \cos B_f (1 + 2t_f^2 + \eta_f^2)\, y^2 \right\} \\
&\quad + \frac{\rho}{360 N_f^5 \cos B_f} (5 + 44 t_f^2 + 32 t_f^4 - 2\eta_f^2 - 16\eta_f^2 t_f^2) y^5
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

式中：B_f为横坐标(y)綫在中央子午綫上之"垂足点"的緯度，N_f、η_f、t_f均为相应于B_f之値，而M_f为緯度B_f处之子午綫曲率半徑。

（4） **方向改化数的公式**

$$\left.\begin{aligned}\delta_{1\cdot2} &= -\frac{\varrho}{2R_m^2}\Delta x\left(y_m-\frac{\Delta y}{6}-\frac{y_m^3}{3R_m^2}\right)-\frac{\varrho\eta^2 t}{R_m^3}\Delta y y_m^2\\ \delta_{2\cdot1} &= +\frac{\varrho}{2R_m^2}\Delta x\left(y_m+\frac{\Delta y}{6}-\frac{y_m^3}{3R_m^2}\right)+\frac{\varrho\eta^2 t}{R_m^3}\Delta y y_m^2\\ \Delta x &= x_2-x_1,\qquad \Delta y=y_2-y_1,\qquad y_m=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

式中：$(x_1、y_1)$、$(x_2、y_2)$为投影平面上兩点之坐标，R_m 为平均曲率半徑，可由与 $x_m=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ 相应之緯度求得，$\delta_{1\cdot2}$ 为$(x_1、y_1)$至$(x_2、y_2)$方向之改化数，$\delta_{2\cdot1}$ 为$(x_2、y_2)$至$(x_1、y_1)$方向的改化数。將 δ 之代数値加于橢球面方向（卽大地綫在投影平面上之投影曲綫的方向）中，就將該方向化为投影平面上之直綫方向。

（5） **距离改化数的公式**

$$logd-logS=\frac{\mu}{2}\left(\frac{y_m}{R_m}\right)^2+\frac{\mu}{24}\left(\frac{\Delta y}{R_m}\right)^2-\frac{\mu}{12}\left(\frac{y_m}{R_m}\right)^4\quad(5)$$

式中d、S为$(x_1、y_1)$、$(x_2、y_2)$兩点間之直綫距离与其相应的大地綫長度。

（二） 投影計算的实用公式

为了簡化投影計算，本書將(一)欵各式中各項"系数"与"微項"編算为表—卽所謂投影計算表。这些"系数"与"微項"若用下面(三)欵之簡号代表时，則投影計算的实用公式如下：

（1） $$\left.\begin{aligned}x&=X+l'(a_1+a_2l')+\delta x, & l'&=10^{-8}l^2\\ y&=l(b_1+b_2l')+\delta y, & &l\text{为秒数}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

（2） $$\gamma=l(c_1+c_2l')+\delta\gamma,\qquad l'=10^{-8}l^2\quad(7)$$

（3） $$\left.\begin{aligned}B&=B_f-y'(A_1+A_2y')-\delta B, & y'&=10^{-10}y^2\\ l&=y:(b_1+B_2y')+\delta l\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

（4） $$\left.\begin{aligned}\delta_{1\cdot2}&=-f\Delta x\sigma_1-\Delta, & \sigma_1&=y_m-\frac{\Delta y}{6}-\text{III}_\delta\\ \delta_{2\cdot1}&=+f\Delta x\sigma_2+\Delta, & \sigma_2&=y_m+\frac{\Delta y}{6}-\text{III}_\delta\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

上式供一等三角計算之用。在二等，可略去III_δ、Δ；在三等，可略去III_δ、Δ、$\frac{\Delta y}{6}$。

（5） $$(logd-logS)10^8=f'\sigma_3=f'(y_m^2+\text{II}_s-\text{III}_s)\quad(10)$$

上式供一等三角計算之用。在二等，可略去III_s；在三等，可略去II_s、III_s。

（三） 投影表的編算公式

在將(一)欵各式中各項"系数"与"微項"編算为投影表时，我們已將这些"系数"与"微項"中大部份的原形加以适当改变並調整小数位数，以便利用計算机且求計算簡捷而精確。玆列本投影表的編算公式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&c_1 = Sin\,B \\
&a_1 = \left[\frac{10^8}{2\varrho}\right] b_1c_1, \qquad \beta = \left[\frac{10^{12}}{6\varrho^2}\right] cos^2 B \\
&10^4 a_2 = (a_1\beta)\cdot \tfrac{1}{2}(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4) \\
&10^4 b_2 = (b_1\beta)\cdot(1-t^2+\eta^2) \\
&10^4 c_2 = (c_1\beta)\cdot 2(1+3\eta^2+2\eta^4) \\
&A_1 = \left[\frac{10^{10}\varrho}{2c^2}\right] V^4 t \\
&10^5 A_2 = \left[\frac{10^{15}}{12c^2}\right] A_1 V^2\cdot(5+3t^2+\eta^2-9\eta^2 t^2) \\
&10^3 B_2 = \left[\frac{10^{13}}{6\varrho c}\right] V\, cos\,B\cdot(1+2t^2+\eta^2)
\end{aligned}\right\} \quad (11)
$$

式中：$V^2=1+\eta^2$，而$N=\frac{c}{V}$、$M=\frac{c}{V^3}$，c为参考椭球体两极之曲率半徑。[　]內之值均为常数，b_1、V由(四)款之(16)、(17)式首先算出。

$$
\left.\begin{aligned}
&\delta x = X l_0^6 (mm), \qquad X = 10^{-5}\beta(a_1\beta)\cdot 10^{-1}(61-58t^2+t^4) \\
&\delta y = Y l_0^5 (mm), \qquad Y = 10^{-2}\beta(b_1\beta)\cdot 3(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58\eta^2 t^2) \\
&\delta\gamma = Z\, l_0^5 (10^{-3}\text{秒}), \qquad Z = \beta(c_1\beta)\cdot(0.48-0.24t^2) \\
&l_0 = 10^{-4} l, \qquad l\ \text{为秒数}
\end{aligned}\right\} \quad (12)
$$

（8） 式中δB、δl之原来形式为：

$$
\delta B = \frac{\varrho\, tan\, B}{720 M N^5}(61+90t^2+45t^4)y^6
$$

$$
\delta l = \frac{\varrho}{360\, N^5 cos\, B}(5+44t^2+32t^4-2\eta^2-16\eta^2 t^2)y^5
$$

为使δB、δl变为以l为引数，我們用(6)式中y之近似式代入(足够精密)，略去l之高次項后，得δB、δl之算式为：

$$
\left.\begin{aligned}
&\delta B = \varphi\, l_0^6 (10^{-4}\text{秒}), \qquad l_0 = 10^{-4} l \\
&\delta l = \lambda l_0^5 (10^{-4}\text{秒}) \\
&\varphi = \left[\frac{10^{30}}{360c^4}\right] V^4 (10^{-2}b_1)^6\cdot 10^{-4} A_1 (61+90t^2+45t^4) \\
&\lambda = \left[\frac{10^{30}}{360c^4}\right] V^4 (10^{-2}b_1)^4\cdot 10^{-2}(5+44t^2+32t^4-2\eta^2-16\eta^2 t^2)
\end{aligned}\right\} \quad (13)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&f = \frac{\varrho}{2R_m^2}, \qquad \text{Ш}_\delta = \frac{y_m^3}{3R_m^2}, \qquad \Delta = \frac{\varrho\eta^2 t\Delta y}{R_m^3} y_m^2 \\
&f' = \frac{10^8\mu}{2R_m^2}, \qquad \text{П}_s = \frac{\Delta y^2}{12}, \qquad \text{Ш}_s = \frac{1}{6R_m^2} y_m^4
\end{aligned}\right\} \quad (14)
$$

(14) 式之y_m、Δy、R_m均以公里为单位。

一（四） 投影表所依据的常数与弧长公式

这本投影表采用**克拉索夫斯基椭球体**：

長半徑　$a=6378245$ 米

扁　率　$\alpha=1:298\cdot3$

茲將本投影表編算中所用到的有关这个椭球体的常数以及其他普通常数列下：

$\alpha=1:298\cdot3$	=	0.00335	23298	69259	13509	89···	
$c\ =a:(1-\alpha)$	=	6399698·	90178	27110	663米		
$n\ =\alpha:(2-\alpha)$	=	0.00167	89791	80658	15984		
$e^2\ =2\alpha-\alpha^2$	=	0.00669	34216	22965	94323		
$e'^2=e^2:(1-e^2)$	=	0.00673	85254	14683	49126		
μ = 对数率	=	0.43429	44819	03251	82675		
π = 园周率	=	3.14159	26535	89793	23846		
$\varrho\ =648000'':\pi$	=	206264''·	80624	70963	55157		
$\frac{1}{\varrho}$ =	=	0.00000	48481	36811	09535	99359	
$arc1^\circ=\pi:180$	=	0.01745	32925	19943	29576	9	

（1）　**子午綫弧长X的算式**

$$
\left.\begin{array}{llll}
X= & 63\ 67558.^{m}\ 49687 & 49794 & B^\circ arc1^\circ \\
(或1 & 11134.\ 86108 & 38095 & B^\circ) \\
- & 16036.\ 48026 & 94138 & Sin2B \\
+ & 16.\ 82806 & 68849 & Sin4B \\
- & 0.\ 02197 & 53092 & Sin6B \\
+ & 0.\ 00003 & 11311 & Sin8B \\
- & 0.\ 00000 & 00460 & Sin10B
\end{array}\right\} \quad (15)
$$

上式之B°为B以度为單位之値。式中各数字系数，我們曾用下列三种公式之展开式进行計算，所得最末位小数完全相同，但高次項須用至e^{14}、e'^{14}、n^8:

$$M=a(1-e^2)\{1-e^2\,Sin^2B\}^{-\frac{3}{2}}=c\{1+e'^2\cos^2B\}^{-\frac{3}{2}}$$

$$M=\frac{a(1-n)^2}{(1+n)^2}\{1-\frac{4n}{(1+n)^2}\ Sin^2B\}^{-\frac{3}{2}},\qquad X=\int_0^B MdB$$

最后一式的展开式計算最簡，录之如下：

$$
\begin{aligned}
X=&a\{(1-n)+\frac{5}{4}(n^2-n^3)+\frac{81}{64}(n^4-n^5)+\frac{325}{256}(n^6-n^7)\}\,B^\circ arc1^\circ\\
&-\frac{3}{2}a\{(n-n^2)+\frac{7}{8}(n^3-n^4)+\frac{55}{64}(n^5-n^6)+\frac{875}{1024}(n^7-n^8)\}\,Sin\,2B\\
&+\frac{15}{16}a\{(n^2-n^3)+\frac{3}{4}(n^4-n^5)+\frac{91}{128}(n^6-n^7)\}\,Sin\,4B\\
&-\frac{35}{48}a\{(n^3-n^4)+\frac{11}{16}(n^5-n^6)+\frac{81}{128}(n^7-n^8)\}\,Sin\,6B\\
&+\frac{315}{512}a\{(n^4-n^5)+\frac{13}{20}(n^6-n^7)\}\,Sin8B\\
&-\frac{693}{1280}a\{(n^5-n^6)+\frac{5}{8}(n^7-n^8)\}\,Sin10B
\end{aligned}
$$

（2） **平行圈 1″ 之弧长 b_1 的算式**

$$
\left.
\begin{aligned}
b_1 = {} & 30.^{m}94854\ 17958\ 17176\ \cos B \\
& -0.02597\ 00732\ 85199\ \cos 3B \\
& +0.00003\ 26978\ 31793\ \cos 5B \\
& -0.00000\ 00457\ 45947\ \cos 7B \\
& +0.00000\ 00000\ 67203\ \cos 9B \\
& -0.00000\ 00000\ 00102\ \cos 11B
\end{aligned}
\right\} \quad (16)
$$

上式之系数，我們曾用下列兩种公式之展开式进行計算，所得最末位小数完全相同，但高次項須用至e^{14}、e'^{14}：

$$b_1 = \frac{N}{\rho}\cos B = \frac{a}{\rho}\cos B\{1-e^2 Sin^2 B\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{c}{\rho}\cos B\{1+e'^2\cos^2 B\}^{-\frac{1}{2}}$$

（3） **V 与 R 之算式**

$$
\left.
\begin{aligned}
\log V = {} & 0.00072\ 97842\ 11219\ 572 \\
& +0.00072\ 91713\ 93390\ 282\ \cos 2B \\
& -0.00000\ 06121\ 31794\ 302\ \cos 4B \\
& +0.00000\ 00006\ 85171\ 021\ \cos 6B \\
& -0.00000\ 00000\ 00862\ 791\ \cos 8B \\
& +0.00000\ 00000\ 00001\ 159\ \cos 10B
\end{aligned}
\right\} \quad (17)
$$

上式之系数，我們是用$\log V = \frac{\mu}{2}ln(1+e'^2\cos^2 B)$的展开式算得，而$e'$的高次項用至$e'^{14}$。$R$由下式計算：

$$R = \frac{c}{V^2} \qquad (18)$$

§2 投影表的計算

（一） 內插公式与內插表

“內插法”可減輕計算，故常采用。玆先說明本投影表所用之內插法。設有表列函数$f(t)$及其各次差如下表：

列　号	t	$f(t)$	一次差 Δ'	二次差 Δ''	三次差 Δ'''	四次差 Δ^{IV}	…
…	…	…					
-2	$t_0-2\omega$	$f(t_0-2\omega)$	$\Delta'_{-\frac{3}{2}}$				
-1	$t_0-\omega$	$f(t_0-\omega)$	$\Delta'_{-\frac{1}{2}}$	Δ''_{-1}	$\Delta'''_{-\frac{1}{2}}$		
0	t_0	$f(t_0)$	$\Delta'_{\frac{1}{2}}$	Δ''_0	$\Delta'''_{\frac{1}{2}}$	Δ^{IV}_0	
1	$t_0+\omega$	$f(t_0+\omega)$	$\Delta'_{\frac{3}{2}}$	Δ''_1	$\Delta'''_{\frac{3}{2}}$	Δ^{IV}_1	
2	$t_0+2\omega$	$f(t_0+2\omega)$	$\Delta'_{\frac{5}{2}}$	Δ''_2			
3	$t_0+3\omega$	$f(t_0+3\omega)$					
…	…	…					

白塞尔式：

$$\left.\begin{aligned} &f(t_0+h)=f(t_0)+n\Delta'_{\frac{1}{2}}+B_2(\Delta''_0+\Delta''_1)+B_3\Delta'''_{\frac{1}{2}}+B_4(\Delta^{\text{IV}}_0+\Delta^{\text{IV}}_1)+\cdots \\ &n=\frac{h}{\omega} \qquad\qquad B_2=\frac{1}{4}n(n-1) \\ &B_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-\tfrac{1}{2}), \qquad B_4=\frac{1}{48}(n+1)n(n-1)(n-2) \end{aligned}\right\}\quad(19)$$

若 Δ''、Δ'''、Δ^{IV}依次小于4、60、20(以 $f(t)$之末位小数为單位)时，則此各次差可分別略去，本表所用的內插計算中，即依此标准为取捨。

斯提林式：

$$\left.\begin{aligned} &f(t_0+h)=f(t_0)+n\Delta'_0+\tfrac{1}{2}n^2\Delta''_0+\cdots \\ &n=\frac{h}{\omega}, \qquad \Delta'_0=\tfrac{1}{2}(\Delta'_{-\frac{1}{2}}+\Delta'_{\frac{1}{2}}) \end{aligned}\right\}\quad(20)$$

上式亦可写成下之形式：

$$f(t_0+h)=f(t_0)+h\{\delta+d\delta\} \qquad (21)$$

$$\delta=\frac{\Delta'_0}{\omega}, \quad \delta'=\frac{\Delta''_0}{\omega}, \quad d\delta=\frac{h}{2\omega}\delta' \qquad (22)$$

此处δ为每單位的“平均一次差”；δ'为每單位的“二次差”，亦等于相鄰兩δ之差。

在內插計算中，編制下述之內插表—“数域之函数”表，最利实用。編制之法：先“反解”函数$z=f(t)$为$t=\Phi(z)$，使z等于拟定的某一“等差級数”z_1、z_2、z_3……(如0.5、1.5、2.5…)，求其相应之t_1、t_2、t_3……，然后將各相鄰兩z之中数(如1、2、3……)列为下表：

$$\left.\begin{aligned} &t=t_1 \qquad t_2 \qquad t_3 \qquad t_4 \quad \cdots\cdots \\ &z=f(t)=\frac{z_1+z_2}{2} \quad \frac{z_2+z_3}{2} \quad \frac{z_3+z_4}{2} \quad \cdots\cdots \end{aligned}\right\}\quad(23)$$

就得“t数域之函数$f(t)$”表。用此表內插时：看出已知t位于某兩个表列t值之間后，可立即查得$f(t)$之值，其最大誤差为等差級数之“半差”，而此誤差乃編制此表时所应事先拟定者。

在本投影表中各函数的直接計算中，其引数間隔ω之选擇，以使內插时不超过三次差插算为限。

(二) X、b_1、V、R 的計算

X、b_1各用(15)、(16)式按緯度每5′計算，計算小数位数較表列小数多兩位，按(19)式內插每1′之值，內插时仅用至二次差。

(11)、(13)、(14)式所需之 V、R：在緯度 15°—30° 者，由“苏联大地位置計算表”查取；在0°—15°者，各用(17)、(18)式按B每10′計算。

(三) a_1、a_2、b_2、c_1、c_2、A_1、A_2、B_2之計算

$c_1=Sin\,B$用三角函数表直接查出，其余各“系数”按緯度每30′計算，在依据(11)式所拟定的一个“計算格式”中一齐算出。計算小数位数均較表列小数多兩位，用(19)式內插每1′之值，內插时，a_1、b_2、A_1均用至三次差，其余均用至二次差。

（四） δx、δy、$\delta\gamma$、δB、δl 的計算

这些“微項”δ，按(12)、(13)式計算。先在一个“計算格式”中一齐算出各δ的系数X、Y、Z、φ、λ；Y、λ按緯度每1°計算，其他按每5°計算。然后計算各δ。

各δ均为双引数(B、l)函数，为使制成之“δ表”容易內插，須使引数l变化时，各δ之变化不超过1（（以表列末位小数为單位）。使用如此之“δ表”进行內插时，可仅使用表中引数l与已知l最近之一行，而單独按B进行內插。为此，先在各个緯度的X、Y、Z、φ、λ中选出其最大值X_m、Y_m、Z_m、φ_m、λ_m(在l相同时，由此等值所算之δ为最大)；按此最大值，並使(12)、(13)式之δ依次等于1、2、3……(以表列末位小数为單位)，而反解其相应之l(至l=3°•5为止)，此即为表Ⅱ—Ⅳ中表头上所載之l值。例如δy、δl表头上l之值，即为按緯度0°之Y_m与30°之λ_m反解而得。然后，根据这些l值，用(12)、(13)式計算其他各緯度之δ。于此应指出：$\delta\gamma$、δB表中l之值，采用“苏联表”上之值，亦可滿足要求。

（五） f、f'、Ⅱs、Ⅲs、Ⅲ$_\delta$、$\varDelta$的計算

这些数量根据(14)式計算。其中f、f'为相应于$x_m=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$之緯度的函数，編成以x_m为引数之表則使用較便，其法用整百公里之x_m反插其相应之緯度，然后求f、f'。

在Ⅲs、Ⅲ$_\delta$式中R_m之誤差沒有影响，故編表时采用緯度35°之值$R_{35°}$。Ⅱs、Ⅲs、Ⅲ$_\delta$均按本节(一)欵所述之法編成“数域之函数”表，其所用之算式如下：

$$\left.\begin{aligned}\varDelta y&=\sqrt{12}\,(\text{Ⅱ}_s)^{\frac{1}{2}} &&=3{\cdot}4641\,(\text{Ⅱ}_s)^{\frac{1}{2}}\\ y_m&=(6R^2_{35°})^{\frac{1}{4}}\,(\text{Ⅲ}_s)^{\frac{1}{4}} &&=124{\cdot}92\,(\text{Ⅲ}_s)^{\frac{1}{4}}\\ y_m&=(3R^2_{35°}10^{-2})^{\frac{1}{3}}(100\,\text{Ⅲ}_\delta)^{\frac{1}{3}} &&=106{\cdot}78(100\,\text{Ⅲ}_\delta)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

令上式中之（Ⅱs)、(Ⅲs)、(100Ⅲ$_\delta$)各等于0.5、1.5、2.5……（各以10^{-8}、10^{-8}、1 km为單位)，則得表Ⅵ中以公里为單位之$\varDelta y$、y_m。

緯度每10°編一“$\varDelta$表”（表Ⅶ），$\varDelta$式中之R_m与$\eta^2 t$采用其中間緯度之值R_0与$\eta_0^2 t_0$，可无大誤。編算“$\varDelta$表”之法，与前(四)欵編算各δ之法同，即先按“反解式”$y_m=(10^3\varDelta y\ \dfrac{\varrho\eta_0^2 t_0}{R_0^3})^{-\frac{1}{2}}(10^3\varDelta)^{\frac{1}{2}}$解求$\varDelta y=50km$以及$(10^3\varDelta)=1''$、$2''$、$3''$…时之$y_m$，这就得“$\varDelta$表”中表头上之$y_m$，然后据此$y_m$再算$\varDelta y$每10公里时$\varDelta$之值。

§3 投影表的編制与校核

（一） 投影表中各項的說明

表Ⅰ中各系数的符号与單位，均已載于其数列的上方。各系数右旁的$\varDelta 1''$，各为其“每秒的平均一次差”，各頁並載“$\varDelta B$数域之函数$d(\varDelta 1'')$”表，以供按下式（参見(21)式)进行內插之用：

$$\left.\begin{aligned}f(B)&=f(B_0)+\varDelta B\{\varDelta 1''+d(\varDelta 1'')\}\\ \varDelta B&=B-B_0\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

式中B为已知之緯度，B_0为略小于B的“表列緯度”，而$f(B)$、$f(B_0)$各为相应于B、B_0之函数X、b_1等。

"$\varDelta B$数域之函数$d(\varDelta 1'')$"表，按下式(参见(22)式)編得：

$$\varDelta B=\frac{120''}{(\varDelta 1'')_1-(\varDelta 1'')_0}d(\varDelta 1'') \tag{26}$$

其中 d ($\varDelta 1''$)与 ($\varDelta 1''$)之單位相同。($\varDelta 1''$)$_1$、($\varDelta 1''$)$_0$ 依次代表"內插間隔"下端与上端之$\varDelta 1''$，而$(\varDelta 1'')_1-(\varDelta 1'')_0$即为"$d(\varDelta 1'')$表"中表头上之数字。

为了按下式(参考(25)式)反插与x相应的B_f时可直接用$\varDelta X$查取$d(\varDelta_x 1'')$

$$\left.\begin{array}{ll} B_f=(\text{表列之}B)+\varDelta B, & \varDelta X=x-X \\ \varDelta B=\varDelta X\div\{\varDelta_x 1''+d(\varDelta_x 1'')\} & \end{array}\right\} \tag{27}$$

我們在前述之"$\varDelta B$ 数域之函数 $d(\varDelta_x 1'')$"表中，按 $\varDelta X=\varDelta B$ ($\varDelta_x 1''$) 加入与 $\varDelta B$ 相应的$\varDelta X$之一行，此式为近似式，其中($\varDelta_x 1''$)采用緯度每度30′之値已足。

(二) 投影表之校核計算

投影表全系二人对算，編成本表后，又全部檢查各一次差或二次差之变化是否均匀。又因本表与3°帶与6°帶換帶表同时編算，故又用下法同时校核投影表与換帶表：

先用本投影表計算一点在相鄰兩帶之坐标(x_1、y_1)与(x_2、y_2)，然后用換帶表將(x_1、y_1)換算为鄰帶之(x_2、y_2)。在165个点的校核实例中，兩法所得(x_2、y_2)之差異情况为：与"3°帶換帶表"所得結果相較，x_2的差異均未超过$2mm$，y_2最大差 $3mm$，但仅佔8.4%；与"6°帶換帶表"所得結果相較，x_2、y_2最大差$3mm$，但仅各佔1.8%与9.7%。

(三) 投影計算結果的誤差估計

投影結果之誤差的来源，分析如下：

(1) 公式誤差

这是指(1)至(5)式中略去 η、t、$(\frac{l}{\varrho}\cos B)$、$(\frac{y}{N})$、$(\frac{y}{R})$、$(\frac{\varDelta x}{R})$、$(\frac{\varDelta y}{R})$ 之更高次項所引起之誤差。在最不利情况下（即緯度0°处l、y达其最大値时，$\varDelta$x、$\varDelta$y为50公里时），

(x、y)之誤差不超过0.5mm，(B、l)之誤差不超过0″.00005，γ之誤差不超过0″.0005，$\log\frac{d}{S}$之誤差不超过8×10^{-9}，$\delta_{1.2}$与$\delta_{2.1}$之誤差不超过0″.0005。

(2) 投影表的計算誤差

投影表中各量之計算小数，均較表列小数多算兩位；內插計算时，均已力求略去的"高次差"項不影响"計算小数位数"。故計算誤差不足影响表列小数之精度。

(3) 投影計算結果之誤差

这是指应用这本投影表所算得的結果中可能存在之誤差。这种誤差起源于：

列表誤差—投影表所載各量之"湊整誤差"所引起者；

內插誤差—內插各量之誤差所引起者。这一誤差至为复杂，它包含：(a) 投影表中各$\varDelta 1''$的湊整誤差；(b) 內插增量的湊整誤差；(c) 內插表的湊整誤差；(d) 使用內插表不符(如查各δ表时l之値不符)之誤差，以及內插时略去"高次差"項所引起之誤差等等。在以下三表中，(d)項略而未計。

在最不利情况下（即緯度0°处l、y 达其最大値时，$\varDelta$x、$\varDelta$y 为50公里时，发生最大湊数誤差），x、y、γ、B、l、δ，与$10^8\log\frac{d}{S}$之計算結果的最大誤差，略如下表。表中各"誤差"欄

之前一数为列表誤差所引起者，后一数为內插誤差所引起者，这一內插誤差系設想为前述(a)、(b)、(c)三項同符号之最大誤差的累积，但这是很少可能者。

x		y		γ	
項 目	誤 差(mm)	項 目	誤 差(mm)	項 目	誤 差(10^{-3})
X	$\pm0.5\pm1.1$				
$l'\,a_1$	$\pm0.8\pm1.3$	$l\,b_1$	$\pm0.6\pm1.4$	$l\,c_1$	$\pm0''.6\pm1''.0$
$l'^2\,a_2$	$\pm1.3\pm1.3$	$ll'\,b_2$	$\pm1.0\pm1.6$	$ll'\,c_2$	$\pm1.0\pm1.0$
δx	$\pm0,5\pm0.5$	δy	$\pm0.5\pm0.5$	$\delta\gamma$	$\pm0.5\pm0.5$
同符号之累积	$\pm3.1\pm4.2$	同符号之累积	$\pm2.1\pm3.5$	同符号之累积	$\pm2.1\pm2.5$

B		l	
項 目	誤 差(10^{-4})	項 目	誤 差(10^{-4})
B_f	$\pm0''.2\pm0''.4$		
$y'\,A_1$	$\pm0.8\pm1.2$	因b_1	$\pm0''.2\pm0''.4$
$y'^2\,A_2$	$\pm1.1\pm1.8$	因B_2	$\pm0.3\pm0.5$
δB	$\pm0.5\pm0.5$	$\delta\,l$	$\pm0.5\pm0.5$
同符号之累积	$\pm2''.6\pm3''.9$	同符号之累积	$\pm1''.0\pm1''.4$

δ		$10^8(log\,d-log\,S)$	
項 目	誤 差(10^{-3})	項 目	誤 差
$\Delta x\sigma\cdot f$	$\pm0''.1\pm0''.1$	$\sigma_3 f'$	$\pm0.1\pm0.1$
$\Delta y f\cdot \mathrm{III}_\delta$	±0.6	$f'\,\mathrm{II}_s$	±0.3
Δ	$\pm0.5\pm0.5$	$f'\,\mathrm{III}_s$	±0.3
同符号之累积	$\pm0''.6\pm1''.2$	同符号之累积	$\pm0.1\pm0.7$

以上各表最末列“同符号之累积”之数值，仅为就公式表面上看来所能出現之“最大誤差”，並非表示实际上眞有此可能；同时发生同符号的最大誤差，实为不堪設想者。

§4 投影計算的示例与說明

在实际作业中，可采用下面各算例中之“格式”。計算时，依格式中之“計算次序”进行，由格式第二行之“計算項目”並参考§1(二)欵中相应之算式，易知其計算方法。玆分別說

明如下：

（一）（例一）为按(6)、(7)式由經緯度計算平面坐标与子午綫收斂角之例。其計算表格中B、L、L_0为已知数，L、L_0各为已知点与中央子午綫之經度。表格中各系数按(25)式插算，如本例中$\varDelta B=42''.0172$，求X、b_1之內插值时，先用$\varDelta B$由內插表查出$d(\varDelta 1'')$，于是：

$$X=2431998.335+\varDelta B(30.75889+0.00002)=2433290.738$$

$$b_1=28.6877647+\varDelta B(-55822-15)\cdot 10^{-9}=28.6854186$$

δx、δy、$\delta\gamma$按“比例內插法”插算，插算δx、δy、$\delta\gamma$时，应按表中引数l与已知l相近之一行进行。

（二）（例二）为按(8)式由平面坐标計算經緯度之例，其計算表格中之x、y、L_0为已知。首先根据x按(27)式反插B_f，如本例中$\varDelta X=2435277.460-2433843.870=1433.590$，用$\varDelta X$由內插表查出$d(\varDelta_x 1'')=3\times10^{-5}$，于是

$$B_f=22°0'+\frac{1433.590}{30.75895+3\times10^{-5}}=22°0'46''.6072$$

然后据此B_f以查表，b_1、A_1、A_2、B_2之內插法与前（一）欵同，δB、$\delta\gamma$用“比例內插法”。

（三）（例三）为用方向与距离改化方法將橢球面三角形轉化为平面三角形，並由已知点Ⅰ之坐标(x_1、y_1)按下式計算Ⅱ点之坐标(x_2、y_2)：

$$\left.\begin{aligned}x_2-x_1&=\varDelta x=d\cos\alpha_{1\cdot2}\\y_2-y_1&=\varDelta y=d\sin\alpha_{1\cdot2}\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

式中$\alpha_{1\cdot2}$、d为Ⅰ至Ⅱ点之坐标方向角与直綫距离。但一般仅知其大地綫長S，須加距离改化以得d；且一般$\alpha_{1\cdot2}$亦不知，而仅知其大地方位角$A_{1\cdot2}$，或仅知其与“已知坐标方向角α_0之他边”間的球面角u，則須用下兩式之一以求$\alpha_{1\cdot2}$：

$$\alpha_{1\cdot2}=A_{1\cdot2}+\delta_{1\cdot2}-\gamma_1=\alpha_0\pm(u+\delta u)\quad(29)$$

第二式中$\delta u=\delta_{右}-\delta_{左}$为將$u$角化为平面角之改化数，而$\delta_{右}$、$\delta_{左}$为構成$u$角之右、左边之方向改化数。第一式中$\gamma_1$为($x_1$、$y_1$)点之平面子午綫收斂角，本投影表中未备有由($x_1$、$y_1$)直接求$\gamma_1$之計算表，故須先將($x_1$、$y_1$)改算为($B_1$、$l_1$)(如例二)，然后求$\gamma_1$。若已知($B_1$、$l_1$)而不知($x_1$、$y_1$)，則应換算为($x_1$、$y_1$)並同时求$\gamma_1$(如例一)。在下面(例三)之三角形$ABC$中，已知其在橢球面上之角度$u$如(表3)所載，並已知其起算边$AB$之大地綫長$S_{AB}$与大地方位角$A_{AB}$以及$A$点之經緯度($L$、$B$)为：

$$\log S_{AB}=4.37953441,\qquad A_{AB}=180°58'56''.242$$

$$L=13°25'31''.4880,\qquad B=21°59'42''.0172$$

計算步驟如下：

用(例一)之表格算得与(B、L)相应的x_1、y_1与γ_1，分別記于(例三)之(表1、2、4、)中的相应位置。

为了計算(表1)中方向与距离改化数所需B、C点之坐标，应另紙算出(表1)“5”欄之$\log S$，在Ⅰ等三角形，並应先加入近似的“方向与距离改化数”，以改正三角形的角度与边長，(表1)中u角之改正数δu与边長改正数以及AB方向之方向改化数δ_{AB}，可按下之近似式(三等)求之：

$$\left.\begin{aligned}\delta u&=-f(x_{右}-x_{左})y_m\qquad 10^8(\log d-\log S)=f'y_m^2\\\delta_{AB}&=-f(x_B-x_A)y_m\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

式中$x_左$、$x_右$为構成u角之左右边之他端的縱坐标，x_A与x_B为A、B点之縱坐标，δ_u式之y_m为三角形各点的平均横坐标。这些x、y，可在"三角系图"上量取，亦可將橢球面三角形視为平面三角形而用(28)式算得之。算得之δu与($logd-logS$)記于(表1)之"7、8"欄；δ_{AB}記于(表1)之第六行，从而算出近似坐标方向角α_{AB}，並記之于(表1)"9"欄的相应位置。在Ⅰ等以下之三角形可不必加(30)式之改正，此时(表1)中之"7、8"欄略去不計。

至此，就可依(表1)之"計算次序"进行方向与距离改化数之計算。距离改化数仅須計算起算边(AB)者，其值加于(表2)之$logS$中，則得$logd$，此值記于(表3)之第六行。又在(表2)中計算起算边之精確的坐标方向角α_{AB}，此值記于(表4)"6"欄的相应位置。

按(表1)所得之方向改化数，計算(表3)中各角之改正数$\delta u=\delta_右-\delta_左$，此处$\delta_右$、$\delta_左$为構成各角右左边的方向改化数。应注意，$-\Sigma\delta u$应等于三角形的球面角超。繼后，在(表3)中計算三角形之平面角与直綫边長$logd$，在(表4)中計算各点之平面坐标。

(例一)　由(B、L)求(x、y、γ)

計算次序	計算項目	点名：A点
1	B	21°59′42″.0172
2	L	113 25 31.4880
3	L_0	111
4	l	2 25 31.4880
5	l''	8731.4880
6	$l'=l^2 10^{-8}$	0.7623888
9	$a_2\ 10^{-3}$	2144
11	$b_2\ 10^{-7}$	81407
13	$c_2\ 10^{-7}$	2567
8	a_1	2604.281
14	$a_2 l'$	1.635
17	$a_1+a_2 l'$	2605.916
7	X	2433290.738
20	$l'(a_1+a_2l')$	1986.721
23	δx	1
26	x	2435277.460
10	b_1	28.6854186
15	b_2l'	62064
18	b_1+b_2l'	28.6916250
21	$l(b_1+b_2l')$	250520.579
25	δy	11
27	y	250520.590
12	c_1	0.3745258
16	$c_2 l'$	1957
19	c_1+c_2l'	0.3747215
22	$l(c_1+c_2l')$	0° 54′31″.876
24	$\delta\gamma$	1
28	γ	0 54 31.877

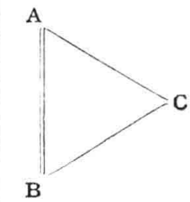
(例二)　(由x、y)求(B、L)

計算次序	計算項目	点名：A点
1	x	2435277.460
2	y	250520.590
3	$y'=y^2 10^{-10}$	6.276057
8	$A_2\ 10^{-6}$	— 1157
9	$B_2\ 10^{-8}$	156449
7	A_1	10.29874
10	A_2y'	— 726
12	A_1+A_2y'	10.29148
5	B_f	22°00′46″.6072
14	$-y'(A_1+A_2y')$	— 1 4.5899
16	$-\delta B$	— 1
18	B	21 59 42.0172
6	b_1	28.6818098
11	B_2y'	98188
13	b_1+B_2y'	28.6916286
15	$y:(b_1+B_2y')$	8731″.4873
17	δl	7
19	l''	8731.4880
20	l	2°25′31″.4880
4	L_0	111
21	L	113 25 31.4880

（例三）　　椭球面三角形轉化为平面三角形之計算

（表1）　　方向与距离改化数之計算

計算次序	計算項目	1. A点 2. B点	1. A点 2. C点	1. B点 2. C点
3	α_0		180° 4′ 39″	0° 4′ 39″
4	$\pm u$		—56 40 6	+83 13 36
7	$\pm \delta u$		— 2	+ 14
9	$\alpha_{1\cdot2}$	180°4′ 39″	123 24 31	+83 18 29
1	x_1	2435277	2435277	2411296
14	Δx	— 23981	— 20356	+ 3625
16	x_2	2411296	2414921	2414921
2	y_1	250521	250521	250489
15	Δy	— 32	+ 30861	+ 30894
17	y_2	250489	281382	281383
12	$log \Delta x$	4.37987*n*	4.30869*n*	3.55928
11	$log\ cos\ \alpha_{1\cdot2}$	0.00000*n*	9.74084*n*	9.06644
5	$log\ S$	4.37953	4.56747	4.49246
8	$(logd-logS)$	34	38	38
10	$log\ Sin\ \alpha_{1\cdot2}$	7.13118*n*	9.92156	9.99703
13	$log \Delta y$	1.51105*n*	4.48941	4.48987
6	L_0	111°	111°	111°
18	$x_m(km)$	2423	2425	2413
20	f	0.00254741	0.00254741	0.00254745
21	f'	0.536363		
19	$y_m(km)$	250.505	265.952	265.936
27	$\frac{1}{6}\Delta y(km)$	—0.01	+ 5.14	+ 5.15
24	$-\mathrm{III}_\delta$	—0.13	— 0.15	— 0.15
28	$f\Delta x(km)$	—0.061089	—0.051855	+0.009235
29	$\sigma_1 = y_m - \frac{1}{6}\Delta y - \mathrm{III}_\delta$	250.38	260.66	260.64
30	$\sigma_2 = y_m + \frac{1}{6}\Delta y - \mathrm{III}_\delta$	250.36	270.94	270.94
31	$\delta'_{1\cdot2} = -f\Delta x\cdot\sigma_1$	+15″.295	+13″.517	— 2″.407
26	$-\Delta$	0	— 4	— 4
33	$\delta_{1\cdot2}$	+15.295	+13.513	— 2.411
32	$\delta'_{2\cdot1} = f\Delta x\cdot\sigma_2$	—15″.294	—14″.050	+ 2.502
25	$+\Delta$	0	+ 4	+ 4
34	$\delta_{2\cdot1}$	—15.294	—14.046	+ 2.506
35	y_m^2	62753		
22	II_s	0		
23	$-\mathrm{III}_s$	— 16		
36	σ_3	62737		
37	$(logd-logs)10^8$	33650		



起算边
近似坐标方向角
之計算

$A_{AB} = 180°58'56''$
$-\gamma_A = -\ \ 54\ 32$
$+\delta_{AB} = +\ \ 15$

$\alpha_{AB} = 180\ \ 4\ 39$

（表2） 起算边之精确边长与坐标方向角之計算

$\log S_{AB}$ $(\log d-\log S)$	4.3795 3441 3 3650	A_{AB} $-\gamma$ $+\delta$	180° 58′ 56″.242 — 54 31.877 + 15.295
$\log d_{AB}$	4.3798 7091	α_{AB}	180 4 39.660

（表3） 平面上三角形之最后解算

点之名称	椭球面角度 u	$\delta u=\delta_{右}-\delta_{左}$	平面角度 $u+\delta u$	$\log Sin(u+\delta u)$	$\log d$
C	40° 6′ 20″.382	—16″.552	40° 6′ 3″.830	9.8089 7881	4.3798 7091
A	56 40 5.568	+ 1.782	56 40 7.350	9.9219 5030	4.4928 4240
B	83 13 35.937	+12.883	83 13 48.820	9.9969 6142	4.5678 5352
和	180 0 1.887	— 1.887	180 0 0.000		

（表4） 精确平面坐标之計算

計算次序	計算項目	1. A点 2. B点	1. A点 2. C点	1. B点 2. C点
1	α_0		180° 4′ 39″.660	0° 4′ 39″.660
4	$\pm(u+\delta u)$		—56 40 7.350	+83 13 48.820
6	$\alpha_{1\cdot2}$	180° 4′ 39″.660	123 24 32.310	83 18 28.480
2	x_1	2 435 277.460	2 435 277.460	2 411 296.282
11	Δx	— 23 981.178	— 20 356.298	+ 3 624.880
13	x_2	2 411 296.282	2 414 921.162	2 414 921.162
3	y_1	250 520.590	250 520,590	250 488.076
12	Δy	— 32.514	+ 30 861.427	+ 30 893.942
14	y_2	250 488.076	281 382.017	281 382.018
9	$\log\Delta x$	4.3798 7051n	4.3086 9880n	3.5592 9358
8	$\log\cos\alpha_{1\cdot2}$	9.9999 9960n	9.7408 4528n	9.0664 5118
5	$\log d$	4.3798 7091	4.5678 5352	4.4928 4240
7	$\log Sin\,\alpha_{1\cdot2}$	7.1322 0508n	9.9215 6248	9.9970 3092
10	$\log\Delta y$	1.5120 7599n	4.4894 1600	4.4898 7332