王一 模块教材

高中新课标

数学

总主编：毛文凤 / 本册编著：周冠廷 张泽宏

概率论初步

——从偶然中寻找必然的数学

中国大百科全书出版社

新课标高中数学模块教材

概率论初步

——从偶然中寻找必然的数学

《新课标数学模块教材》丛书编委会

总　主　编：毛文凤　博士

执行主编：李君华　教授

执行副主编：肖柏荣（江苏教育学院数学系教授，江苏省中学数学教学专业委员会副理事长）

袁　桐（扬州新东方中学数学特级教师，江苏省名教师）

周敏泽（常州高级中学数学特级教师，全国模范教师）

徐沥泉（无锡市教学研究中心数学特级教师，全国数学学科方法论研究中心常务副主任兼秘书长）

丛书编委：李君华　肖柏荣　袁　桐　周敏泽　徐沥泉

刘云章　马永培　朱平天　杨润生　葛福生

周冠廷　孙志人　刘国祥　何继刚　卫　岗

蔡伟元　周公贤　刘威伯　顾曼生　管义桂

顾继玲　方彩云　张新华　陈小红　徐德同

本册编著：周冠廷（南京师范大学数科院教授）

张泽宏（苏州车坊中学数学高级教师）

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚　　　社　长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

概率论初步:从偶然中寻找必然的数学/毛文凤主编.
-北京:中国大百科全书出版社,2005
新课标高中数学模块教材
ISBN 7-5000-7233-3

Ⅰ.概… Ⅱ.毛… Ⅲ.高等数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 143027 号

策划设计:可一图书　(http://www.keyibook.com)
责任编辑:简菊玲

新课标高中数学模块教材
概率论初步
——从偶然中寻找必然的数学
* * *
中国大百科全书出版社出版
全国新华书店经销
http://www.ecph.com.cn
北京阜成门北大街 17 号　邮编:100037　电话:010-88390797
南京玄武湖印刷实业有限公司印刷
* * *
2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第 1 次印刷
890×1240 毫米　32 开本　10.5 印张　188 千字
ISBN 7-5000-7233-3/G·831
定　价:15.00 元

序

李君华

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵，已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中，编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书，从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学，应注重概念清晰、计算正确、论证有据；数学作为一种文化，应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的，是符合新课标理念的。当然，归根结底，针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的，在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合：适度的形式化与启发兴趣形式相结合，发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合，掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论，背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生“登高望远”的感觉或“源远流长”的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容（指高中）相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是溶于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

（作者系南京师范大学数科院教授）

前　言

在近代科技发展中,几乎所有学科都已越来越多地运用概率论知识。概率论所提供的思维模式和解决问题的理论与方法,在人类社会活动中被广泛应用,其重要性,与日俱增。这充分表明,使中学生早日获得概率论知识,提高他们的概率统计意识,已成为中学数学教学中一项重要的任务。

现在出版的概率论书籍较多,但适合中学使用的教材甚少。编者依据高中数学课程标准的要求,编写了这本模块教材。重点讲解随机事件与概率的概念及其运算法则,随机变量的概率分布及其主要的数字特征。概率论内容丰富,思想方法新颖,习题类型繁多,初学者规律难循。针对这些情形,书中重点讲解了古典概率题的主要类型及其常用的解法,由于解概率题具有灵活、多样和易犯错误的特点,本书特设古典概率题的一题多解、古典概率题错解辨析等章节。借以开启初学者思维的闸门,激发他们勇于创新的精神。对于复杂事件的概率计算,重点讲解了事件的等价表达式,利用概率理论具有形象的直观背景等特点,将概率问题和随机变量的概率分布,

用较简单的概率模型加以归类，使初学者能较早地了解概率问题的数学体系和常见的数学模型。全书注重介绍概率论发展的历史背景和概率论知识的实际应用，领略概率论的精美内涵，以利于提高读者的学习兴趣，较快地理解和掌握概率论的基本知识和技能。书中所选的例题具有典型性和启发性，例题分设“思路点拨”、“解法”、“思维误区”等栏目，力争使读者较快地掌握解题的思想方法，提升读者的概率思维能力，并能触类旁通，举一反三。书中每节配有练习题，每章设有总复习题，编配的题目力求精当，题型丰富，知识覆盖面广，书尾给出了每一道题的参考答案，对于初学者较困难的题目，还给出了较详细的提示，或解题的全过程。本教材适合高中学生使用，也可供中学数学教师和概率统计的爱好者们阅读参考。

由于编者水平所限，如有不当或错误之处，敬请批评指正。

编者

目　　录

引　论

概率论的对象、方法和简史

概率论的研究对象是随机现象，随机现象俗称偶然现象. 它的任务是从偶然中寻找必然.

我们知道，宇宙万物总是处在永恒的变化之中，只有从变化中去认识事物，才能对客观世界获得更深刻的认识. 事物的变化，从变化的性质区分，有量变与质变之分，按变化的表现形式来分，有偶然与必然之别. 大千世界中的必然现象，又被称为确定性现象，偶然现象又称为非确定性现象. 所谓非确定性现象，是指在一定条件下，其结果可能发生也可能不发生，也许可能出现这样或那样种种不同的结果. 这种现象在自然界，在我们的学习、工作与生活中普遍地大量地存在着. 例如，买一张彩票可能中奖，也可能不中奖. 在平衡势中小李买了五百股“深发展”，一周后他可能盈利，也可能输钱. 在给定的耕作条件下，一亩水稻田，到秋季能收获多少斤粮食. 在指定的工艺条件下，生产一只日光灯管，其寿命是多少小时？ 50 只病鸡都服用一种新药，10 天后有几只鸡能存活等等. 这样的例子，每个人都能举出许多. 这些现象在观察结束之前，我们都无法肯定会发生怎样的结果. 那么在这类非确定现象中，我们所关心的结果是否

就杂乱无章，无规律可循呢？答案是否定的. 随机现象在孤立的一两次观察中，会产生什么样的结果，常常带有偶然性. 但是，当我们重复地对它进行大量观察后，就会发现其各种可能结果的数量规律. 这种随机现象内部的规律性，称为统计规律性.

随机现象中的偶然性，它的发生并不是没有原因的、超自然的，而是由于许许多多错综复杂的因素所左右，使得必然性暂时被掩盖起来. 偶然与必然的关系是现象与本质，个别与一般的关系. 过去有些人只重视必然性，而轻视偶然性，把客观世界中的规律性狭隘地理解为因果关系，即若有因，则必有果的关系. 而实际上，必然性更多地是隐藏在偶然性之中. 在偶然性的背后隐藏着必然性. 恩格斯指出："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终受到内部的隐蔽着的规律支配，而问题只是在于发现这些规律."在科学研究中，不和一定数量的随机现象打交道，就不能揭露暗藏在其内部的规律. 因此有人说，因为科学的目的总是消除偶然性，所以科学是偶然性的敌人. 但是，从偶然性不断提供科学研究的新课题来说，偶然性倒是科学最好的朋友. 如果没有了偶然性，科学也就到了终极的尽头.

概率论是基础数学的一个重要分支. 几千年来人们一直在努力探索有关自己所生活的宇宙的奥秘. 数学是了解宇宙的主要工具之一. 虽然从纯学术上来看，数学似乎不必同现实世界有某种联系，但几乎所有重要的数学都同现实世界有着某种紧密的联系. 概率论与经典数学学科类似，像欧氏几何一样，也可以从一组公理体系出发，运用形式逻辑来建立起它的全部理论，但是在学习概率论的初级阶段，用抽象的形式来传授它的知识，实践证明是行不通的. 好在概率论与现实世界的联系十分密切. 概率论的概念、理论与方法都有现实背景. 由于随

机现象存在的普遍性，所以概率论的知识具有普遍意义，极具应用价值. 既然如此，作为教学学科的概率论，尤其是初等概率论，普遍采用的传授方法是把概率论放在一些实际问题的模型中，将严格的抽象的数学形式赋以实际背景. 初等概率论的突出的优点就是富有强烈的直观性和经验性，便于建立相应的数学模型. 一般来说，数学模型是以现实世界的某些部分为依据的，但又不是它的全部精确描述. 数学模型的优点是既形象又适合于进行数学分析. 概率论中的数学模型，常常是理论的先导，有利于把概率论的理论和方法，放到直观的简单模型中去理解和思考. 在学习初等概率论的过程中，强调如下的学习过程，必须反复地往返于实际背景与抽象的数学概念和理论之间，善于把实际问题归结为概率论的某种数学模型，反过来用这种数学模型去处理、解决实际问题，不断用实际例子去加深对概率论知识以及解题思路的理解，进一步掌握概率论的思想方法.

概率论的产生与发展，历史悠久，可追溯到远古时代. 我们的先祖为了生存，狩猎时与猛兽对峙，需要估计狩猎成功的可能性，决定是否向猛兽冲杀，还是退却. 从这一意义考量，概率的含义，一开始就与人类的生存活动紧密地联系着. 现实世界中，绝大多数现象无不带有随机的成份，人们的生产与生存活动，无不在某种程度上要与随机现象打交道. 尤其到 14 世纪以后，随着商业贸易和航运事业的发展，海上保险，人寿保险以及灾难性事件的保险事业相继出现，它们都需要估计事故发生的可能性大小. 实际的需求，推动了数学家们去关注偶然性现象内部的数量规律. 17 世纪中叶，欧洲贵族赌博游戏盛行，数学家们积极参与了若干著名赌博问题的讨论，从中发现了随机现象及许多数量规律，为概率论搭起了框架，并开始用组合数学等方法的概率论

研究.这是否就能说概率论起源于赌博呢?实际上,赌博的存在,已有几千年的历史,但概率论作为机会原理的一个抽象化的学科,到17世纪资本主义商业经济快速发展时才得以形成,这是由于欧洲封建社会末期,资本主义开始萌芽,赌博无意中给数学家们提供了一个比较简单而又非常典型的随机模型.这些赌博模型正具备着商业、保险经营的现实基础,即经营的赔与赚,类同于赌博中的输与赢.社会实际的需要,使数学家们发现赌博中的输赢与商业经营中赔赚的惊人相似之处,才会激起数学家们对赌博问题的热情.因此在概率论的形成过程中,赌博与社会经济发展这两者之间的关系,可以这样说:如果没有社会的迫切需要,概率论至今恐怕仍然只能在赌桌上显示神通,它不可能发展成为理论严谨、应用广泛的基础数学分支;反之,如果没有一系列赌博模型的研究,概率论的建立及其在社会经济等领域的应用,恐怕要困难得多.概率论的创造者们,正是把它在解决赌博特殊问题中所蕴含着的有效法则与方法,予以一般化、系统化,终于在解决社会实际问题的过程中,也推动了概率论的发展.

概率论和许多科学技术的发展一样,是经过了漫长的过程,他的发展大致可分为三个阶段.

第一阶段,是概率论的萌芽到形成一个独立的学科体系.欧洲资本主义萌芽,商业贸易,海上交通日趋发达,开始了与偶然事故有关的财产、寿命等保险事业;同时在自然科学方面开普勒(德国人,1571~1630)、伽利略等人在各自的研究领域中也遇到了测量结果的随机误差,这些单纯运用传统数学无法解决的问题,孕育着17世纪中叶概率论的诞生.这一时期,概率论从赌博问题开始,并进一步跨出赌桌,去研究随机现象中的实际问题,标志着一门新兴学科的诞生.反映当时

研究水平的主要作品和代表人物，首推 1657 年荷兰数学家、物理学家惠更斯(1629～1695)的《论赌博的计算》一文. 这是迄今所知关于概率论的第一篇论文. 文中记载着由法国赌徒梅尔于 1651 年向法国著名数学家帕斯卡(1623～1662)求教的分赌注问题. 1654 年帕斯卡将自己的解法写信给法国著名数学家费马(1601～1665)，两人之间的通信激发了欧洲数学家们的兴趣，惠更斯专程到巴黎，和他们一起讨论分赌注问题，三人各自从不同的理由出发，都给出了问题的正确解，而且还为解决机会游戏的其他问题搭起了框架. 他们所取得的成果，已宣告了概率论这门学科的诞生. 因此说早期概率论的真正创立者是帕斯卡、费马和惠更斯. 这一时期的概率论，称为组合概率时期.

1713 年雅谷・伯努利(瑞士著名数学家，1654～1705)在他逝世后的第 8 年出版了《推测术》一书. 书中解答了惠更斯《论赌博的计算》中提出的若干问题，并把分赌注问题，推广为赌徒输光赌注问题. 书中首次给出并证明频率收敛与概率的大数定理，指出了概率的客观存在性. 这是概率论发展史上第一个基本极限定理，这个定理称为伯努利大数定理，以此纪念他在概率论中所作出的贡献.

在此期间法国著名数学家棣莫弗(1667～1754)首先提出了 $p=q=\frac{1}{2}$ 条件下的中心极限定理. 1777 年法国博物学家蒲丰(1707～1788)出版了《偶然性的算术尝试》一书，书中给出了概率的几何型定义，创造了著名的投针问题，为当今一门崭新的计算方法——蒙特卡洛方法奠定了思想基础.

1812 年拉普拉斯的巨著《分析概率论》出版. 书中将棣莫弗的中心极限定理推广到 $p\neq 0, 1$ 的场合. 这是概率论发展史上第二个基本极

限定理.《分析概率论》具有里程碑的意义,它全面系统地总结了前人的成果,在概率论中引入代数、微积分等数学工具.第一次明确地给出了概率的古典定义.在此基础上证明了概率的基本性质和概率的基本运算法则.拉普拉斯在1814年出版的《概率论的哲学的考察》一书中,揭示了概率论应用于社会现象的研究,将概率论的基本原理与统计学相结合,初步奠定了数理统计学的理论基础,使统计学在定量方面走上了新的发展阶段.拉普拉斯是法国著名的天文学家、数学家和统计学家.他出生于一个小农家庭,靠别人资助才上了学,由于成绩优异留校任教数学.18岁时由著名数学家达朗贝尔介绍,到巴黎军事学校任教.凑巧,在他教过的学生中,有后来成为大人物的拿破仑.在法国大革命时期,拉普拉斯得到拿破仑的器重,出任法国内政部长.在任职期间,他系统编制了社会统计资料,进行了法国人口抽样调查.由于他集国家管理者与数学家、统计学家于一身的特殊背景,便给拉普拉斯在概率论与统计学的结合,开创数理统计学方面创造了良好的条件.拉普拉斯还与德国著名数学家高斯(1777～1855)分别创建了最小二乘法.高斯推广和扩大了正态分布的实际应用.正是由于拉普拉斯、伯努利、棣莫弗和高斯等人的出色工作,使概率论日臻完善.这一时期被称为分析概率论时期.

1837年拉普拉斯的学生,法国著名数学家泊松(1781～1840)发表了《概率在刑事与民事诉讼方面的应用研究》,书中给出了泊松定理和著名的稀有事件的概率分布——泊松分布.

总的来说,在这一阶段,人类突破必然现象中的确定型数量描述,开始分析随机现象内部的数量规律,它和突破描述静态事物的常量数学而进入反映现实世界运动变化的变量数学,两者的发展紧密地交织

在一起，有力地推动了概率论由低级向高级，由简单到复杂的发展.揭示出大量为形而上学所无法理解的规律，使概率论趋于系统化而成为一门独立数学学科.

第二阶段，是概率论发展史上的一个相对停滞的阶段.时间大致可划为19世纪初到19世纪末，近一百年时间.在这段时间里，概率论由于受基础数学工具的制约，又由于自身概念的不明晰，也限制了概率论的发展.例如，由于概率论中两个最基本的概念，事件与概率没有能明确定义，致使许多人对概率论的客观含义和概率论结论的可应用性产生了怀疑.在这段时间里，概率论中的一些权威，将其应用于审判、伦理学等社会领域，让人抓住“把柄”.例如，他们否定概率的古典定义，说等可能性本身就包含了概率的含意，犯了自己解释自己的逻辑错误，导致概率应用的信任危机.在概率论的基础理论方面，1889年法国数学家贝特朗提出了几何型概率的贝特朗奇论，同一道概率题至少可以给出三种合理的不同答案，向等可能性描述的概率提出了挑战，动摇了概率论的理论基础.以致造成概率论的危机和蒙难，但在这一时期里，也形成了《统计物理学》等.可以说这一时期是概率论发展的潜伏期，它的基础理论受到质疑，它在实际应用中遇到挫折，也正是酝酿着它的理论进一步改进和完善的时期.

第三阶段，是概率论突飞猛进的时期.时间是20世纪初直到现在.在20世纪初，人们发现随机事件的性质与集合相似，概率实际上是一种特殊的测度.在数学公理化潮流的冲击下，产生了概率论的公理化体系.它是概率论发展史上的一个重大转折点.在这方面作出重大贡献的首推代表人物是俄罗斯数学家柯尔莫哥洛夫(1903～1987)，在他1933年出版的名著《概率论基础》中，第一次给出了概率的测度

论式的定义和一套严密的概率论的公理化结构.指明了概率应具有的基本性质.从此概率论成为一门理论严谨的基础数学.它以简练和优美和谐的风格,统一了人们对概率论的认识,获得了无限的动力.如今,概率论已成为最活跃、发展最快的数学分支之一.在这期间,由俄罗斯数学家契比雪夫开创了严格化的一般意义下的大数定律,在这之后,由于法国数学家波雷尔(1871～1956)、勒维、俄罗斯数学家欣钦(1894～1959)等人的卓越工作,将其发展为强大数定律,契比雪夫的学生俄罗斯数学家李雅普诺夫(1857～1918)在前人研究的基础上,简练而又严密地证明了“无论原始分布是什么形态,只要样本容量无限增大时,样本平均数的总体分布都趋向正态分布”,从而建立了更为一般的中心极限定理,使正态分布的广泛存在性在理论上得到了更充分的证据.契比雪夫的又一名学生,俄罗斯数学家马尔科夫(1856～1922)提出了在事件不相互独立下的实验模型,创建了马尔科链,这一研究引导我们进入现代概率论的一个重要领域,随机过程、时间序列分析等.在应用理论方面,还创建了博奕论、决策分析、随机规划理论和排队论等现代数学分支.概率论与其他数学分支相结合,产生了随机微分方程、随机微分几何、概率计算方法即蒙特卡洛方法、多元分析、不分明概率论等.概率论与数理统计还渗透到众多自然科学、社会科学中去,如雨后春笋般地产生了大量的边缘学科.

近20年来,概率论与数理统计又有一些思想新颖、理论与应用紧密联系的以电子计算机为工具,以经济和科技为背景的新分支迅速地发展起来.概率论与数理统计已成为当今最活跃、发展最快、应用最广的数学分支,愈来愈受到人们的重视.