全面突破考研数学

2013年

考研数学
新编考试参考书

主编/李恒沛　高文森

权威命题专家亲自编写　理工经济通用

★ 针对历年考研试题概念性强、综合性强、运算性强，灵活考查考生推理与应用能力的特点，全面精讲精练，重点突出

★ 例题选择多样化，典型性强，解析透彻，侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用每章后精选习题，与例题相互补充，深化内容

中国人民大学出版社

2013年
考研数学新编考试参考书

主　编　李恒沛　高文森

编　者　李恒沛　高文森
侯书会　陆淑珍
陶其武

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

2013年考研数学新编考试参考书/李恒沛，高文森主编．—北京：中国人民大学出版社，2012.1
ISBN 978-7-300-15092-5

Ⅰ．①2… Ⅱ．①李… ②高… Ⅲ．①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第280445号

2013年考研数学新编考试参考书
主编 李恒沛 高文森
2013 Nian Kaoyan Shuxue Xinbian Kaoshi Cankaoshu

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn(中国1考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东方圣雅印刷有限公司		
规　　格	210 mm×285 mm　16开本	**版　　次**	2012年2月第1版
印　　张	39	**印　　次**	2012年2月第1次印刷
字　　数	1 191 000	**定　　价**	69.00元

前　言

本书是为报考硕士研究生参加全国数学统考的考生而编写的，也可作为大学生的补充读物及教师的教学参考书。

遵循考试大纲规定的内容，全书分高等数学（第一至八章）、线性代数（第九章）、概率论与数理统计（第十章）三部分共十章。每章下面分节，每节又分“内容摘要与考查重点”和“例题分析”两部分。第一部分简明扼要地把本节考查内容介绍出来，并指出考查重点；第二部分列举典型例子分析解题思路，并示明考试题型。这些例子侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用，可以使考生触类旁通、举一反三。书末有三个附录，附录1为差分方程简介（仅供报考“数学三”的考生使用），附录2、附录3分别为2011年和2012年研究生入学考试数学试题及参考解答，便于广大考生复习使用。本书也可供在读本科生加深理解学习内容、复习备考以及教师教学参考使用。

从历年研究生入学考试数学试题来看，试题有如下特点：(1) 概念性强。着重考查考生对基本概念的掌握，会运用基本定理完成对一些命题的证明，从不同角度、不同提法（即所谓变形、变式）来考查考生对其掌握的熟练程度。(2) 综合性强。一道试题着重考查一部分内容，而这部分内容又有很多知识点，不可能面面俱到，只能综合几个知识点来考查。这类题几乎年年试卷都有，旨在考查考生的能力与数学素质。(3) 运算性强。正确的运算基于正确的概念和方法，数学试题虽有一定的计算量，但只要考生基本概念清楚，基本理论融会贯通，基本方法运用自如，运算起来就能快捷正确。试题具有一定的灵活性，从不同侧面（或不同角度或相关的几个知识点）考查考生的能力，注意一题多解，好让考生临场发挥，运算自如。此外，试题还注意到论证性和应用性，考查考生逻辑推理的能力和综合应用的能力。这是必不可少的能力，不论是对工学、经济学，还是管理学各专业的考生来说，都是这样。本书就是针对上述特点来精选例题和编写习题的。

本书内容紧扣大纲，全面而不烦琐，条理清晰，重点突出；再现考题，例题选择多样化，典型性强，解析透彻；章章小结，前后照应，便于掌握；每章之后附有习题，便于考生自我测试。本书中例题和习题互相补充，起到深化内容的作用，要求考生不仅要看懂例题，还要演算习题，两者都是很重要的。

本书由李恒沛、高文森、侯书会、陆淑珍、陶其武编写，全书由李

恒沛统稿。编著者均长期在重点大学从事数学教学和科研工作，有的参加过多年全国统考数学试题的命制，有的从事过多年考研辅导，并都参与过历年考研数学试卷的评阅和分析，积累了丰富的教学经验，对考研命题有深入的研究，考研辅导效果显著。编著者愿本书的出版对考研学子有所裨益。

编者建议预备报考硕士研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关规定和要求，配合有关教材，认真阅读本书和相关参考书（推荐考生参阅由中国人民大学出版社出版，李恒沛、高文森主编的《历年考研数学真题名家解析与指导》，以及由该出版社出版，李恒沛、高文森、侯书会主编的《考研数学模拟冲刺试卷（理工类）》）。在阅读完本书及参考书之后，建议考生把本书中的全部习题做上1～2遍，从而达到熟练、正确解答的水平。

本书在编辑、出版过程中，得到有关编辑的大力支持和帮助，在此表示感谢。

祝愿考生胸有成竹，心想事成。

编著者

于北京，2011年12月

目 录

第一章

函数、极限、连续性

§1 函数

一、内容摘要与考查重点

1. 函数的概念与表示法

函数的定义：设有两个变量 x 与 y，如果当变量 x 在某数集 D 内任取一值时，变量 y 按照一定的法则总有一个确定值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$.

这时称 x 为自变量，也称 y 是因变量，称 D 是函数 $f(x)$ 的定义域.

2. 函数的简单性质

(1) 单调性：设 $y = f(x)$ 在某区间 I 内有定义，如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的（或单调减少的）.

(2) 奇偶性：设 $y = f(x)$ 在某对称于原点的区间 I 内有定义，如果对于 I 内任意点 x，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是偶函数；如果恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点.

(3) 周期性：设 $y = f(x)$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 内有定义，若存在一个正的常数 T，使得 $f(x+T) = f(x)$ 对于任何的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立，则称 $f(x)$ 是周期函数. 通常将满足关系式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

(4) 有界性：设 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在 $M > 0$，使得对于任何 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 内有界.

3. 复合函数

设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_u，$u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_x，值域为 E，若 $E \subseteq D_u$，则对于任何 $x \in D_x$，有 $u = \varphi(x)$ 与 x 对应，而 $u \in E \subseteq D_u$，故又有确定的 y 与 u 对应，从而，对于任何 $x \in D_x$，都有确定的 y 与 x 对应，按照函数的定义，确定了 y 是 x 的函数. 此函数是通过中间变量 u 建立起 y 与 x 的对应关系的，因而，称此函数为 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的复合函数，记为 $y = f(\varphi(x))$.

4. 反函数

设 $y = f(x)$ 的值域为 D_y，如果对于 D_y 中的任何一个 y 值，从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的 x 值，则按照函数的定义，也确定了 x 是 y 的函数，称此函数为 $y = f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$.

习惯上，用 x 表示自变量、y 表示因变量，因此也称 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数.

$y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

注意：$x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图象是同一个.

5. 初等函数与基本初等函数

(1) 基本初等函数：称下述五种函数为基本初等函数.

幂函数　$y=x^{\mu}$(μ 为实数).

指数函数　$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$.

对数函数　$y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)$.

三角函数　$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$.

反三角函数　$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

(2) 初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次四则运算、有限次复合而成并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

6. 分段函数

如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域内的不同的区间内，其对应法则有着不同的初等函数表达式，则称此函数为分段函数.

对于本小节的内容，应重点掌握以下几点：

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法.

例如，应会求函数的定义域和值域，会从函数的复合表达式中求出原来函数的表达式，即从 $f(\varphi(x))=g(x)$ 中求出 $f(x)$ 的表达式，尤其应注意求分段函数的复合问题.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

例如，应会判定函数的单调性(用定义或用后面所述的导数方法)、奇偶性等.

(3) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

二、例题分析

例 1　已知 $f(x+\frac{1}{x})=\frac{x^2}{x^4+1}$，求 $f(x)$.

分析：这是已知复合函数 $f(\varphi(x))$ 的表达式，欲求函数 $f(x)$ 的表达式的问题. 此问题的一般解法是在 $f(\varphi(x))$ 的表达式中，令 $\varphi(x)=u$，即可得到 $f(u)$ 的表达式，从而可得出 $f(x)$ 的表达式.

解：令 $x+\frac{1}{x}=u$，则有

$$f(u)=\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2}=\frac{1}{u^2-2},$$

所以　$f(x)=\frac{1}{x^2-2}$.

例 2　已知 $f(x)$ 在$[-2,2]$上为偶函数，且 $f(x)=2x^2+x(x\in[-2,0])$，那么当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)$ 的表达式为(　　).

(A)$2x^2+x$　　(B)$2x^2-x$　　(C)$-2x^2+x$　　(D)$-2x^2-x$

分析：已知函数的奇偶性时，可以由奇偶性的性质来得出对称区间上的函数的表达式.

当 $x\in[0,2]$ 时，$-x\in[-2,0]$，由于 $f(x)$ 是偶函数，所以有

$$f(x)=f(-x)=2(-x)^2+(-x)=2x^2-x.$$

解：应选 B.

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

分析：这是一个分段函数求复合函数的问题，按照一般求复合函数的方法，先将 $f(x)$ 的表达式中的 x 用 $g(x)$ 替换. 这里的关键是要注意到 $g(x)$ 也是分段函数，要讨论分段函数 $g(x)$ 的取值范围.

解：$f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1,\end{cases}$

以下的关键问题是要知道当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)|\leqslant 1$，当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)|>1$.

先来讨论使 $|g(x)|\leqslant 1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式清楚地看出只有当 $|x|\leqslant 2$ 时才可能使 $|g(x)|\leqslant 1$.

在 $|x|\leqslant 2$ 范围内,要使 $|g(x)|=|2-x^2|\leqslant 1$,只需

$$1\leqslant |x|\leqslant \sqrt{3}.$$

所以,当 $1\leqslant |x|\leqslant \sqrt{3}$ 时,有 $|g(x)|\leqslant 1$.

再来讨论使 $|g(x)|>1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式可知当 $|x|>2$ 时 $|g(x)|>1$.另外,当$\sqrt{3}<|x|\leqslant 2$ 或 $|x|<1$ 时,也有 $|g(x)|>1$.

综合上述讨论知

$$f(g(x))=\begin{cases}1, 1\leqslant |x|\leqslant \sqrt{3},\\ 0,\ |x|>\sqrt{3} \text{ 或 } |x|<1.\end{cases}$$

例 4 设 $y=(a-x^b)^{\frac{1}{n}}$,当 a,b 满足条件________时,该函数的反函数与该函数相等.

分析:由 $y=(a-x^b)^{\frac{1}{n}}$ 可得

$$x=(a-y^n)^{\frac{1}{b}},$$

也即反函数为 $y=(a-x^n)^{\frac{1}{b}}$.

与直接函数比较就知当 $b=n,a$ 为任意值时,反函数与直接函数相等.

解:应填 $b=n,a$ 为任意值.

例 5 设 $g(x)$ 在$[a,b]$上单增,$f(x)$ 在$[g(a),g(b)]$上单减,则 $f(g(-x))$(　　).

(A) 在$[a,b]$上单增　　(B) 在$[a,b]$上单减

(C) 在$[-b,-a]$上单增　　(D) 在$[-b,-a]$上单减

分析:首先,可知保证 $f(g(-x))$ 有定义的区间应是$[-b,-a]$,所以,可排除 A、B 选项.

然后,再用单调性定义判断.

任取 $x_1,x_2\in[-b,-a]$,$x_1<x_2$,则

$$-x_1,-x_2\in[a,b],\text{且} -x_1>-x_2.$$

由 $g(x)$ 的单增性有 $g(-x_1)>g(-x_2)$.

再由 $f(x)$ 的单减性有 $f(g(-x_1))<f(g(-x_2))$.

所以复合函数 $f(g(-x))$ 在$[-b,-a]$上单增.

解:应选 C.

例 6 设 $y=\dfrac{1}{2x}f(t-x)$,当 $x=1$ 时,$y=\dfrac{1}{2}t^2-t+5$,求 $f(x)$.

解:$x=1$ 时,$y=\dfrac{1}{2}f(t-1)=\dfrac{1}{2}t^2-t+5$.

从而　$f(t-1)=t^2-2t+10$.

令　$t-1=x$, $f(x)=(x+1)^2-2(x+1)+10$.

所以　$f(x)=x^2+9$.

例 7 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$　$(x\neq 1)$,则 $f(f(f(f(x))))=$________.

分析:$f(f(x))=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x$　$(x\neq 1)$,

$$f(f(f(x)))=\frac{f(f(x))}{f(f(x))-1}=\frac{x}{x-1}\quad (x\neq 1).$$

$$f(f(f(f(x)))) = f(f(x)) = x \quad (x \neq 1).$$

解:应填 $x(x \neq 1)$.

例 8 下列函数中是偶函数的应为( ).

(A) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (B) $f(x) = ([x])^2$

(C) $f(x) = (2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x$ (D) $f(x) = \mathrm{sgn}(x) \cdot \cos x$

分析:此题是考查函数的奇偶性的定义以及一些典型函数的定义. 容易验证 A、D 选项的函数是奇函数,B 选项的函数非奇非偶,故只有选择 C.

因为此时

$$f(-x) = (2+\sqrt{3})^{-x} + (2-\sqrt{3})^{-x} = \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$$
$$= (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = f(x).$$

解:应选 C.

例 9 下列函数中不是周期函数的应为( ).

(A) $f(x) = \sin^2 x$ (B) $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$

(C) $f(x) = \sin 2x + \cos \pi x$ (D) $f(x) = x - [x]$

分析:因 $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$,故 $f(x)$ 为周期函数,其最小正周期为 $T = \pi$. 容易看出,$\sin\frac{x}{2}$ 的最小正周期为 4π,$\cos\frac{x}{3}$ 的最小正周期为 6π,从而其和的最小正周期为 12π. 同理 $\sin 2x$ 的最小正周期为 π,$\cos \pi x$ 的最小正周期为 2,从而其和不是周期函数. 至于 $f(x) = x - [x]$(若 $x = n + \alpha$,n 为整数,且 $0 \leqslant \alpha < 1$,则 $[x] = n$),容易验证它为周期函数. 事实上,设 $x = n + \alpha$,n 为整数,$0 \leqslant \alpha < 1$,m 为整数,则

$$f(m+x) = f(m+n+\alpha) = m+n+\alpha-[m+n+\alpha]$$
$$= m+n+\alpha-m-[n+\alpha] = n+\alpha-[n+\alpha]$$
$$= x-[x] = f(x).$$

于是所有整数 m 都是 $f(x)$ 的周期,而最小正周期为 1. 综上分析,应选 C.

解:应选 C.

例 10 设 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$,函数 $y = f(x)$ 的图形对称于直线 $x = a$ 与 $x = b(a < b)$,试证函数 $f(x)$ 为周期函数.

分析:先弄清题意,写出题设表达式,再由周期函数定义证之.

证明:由题设,有

$$f(a-x) = f(a+x), \qquad ①$$
$$f(b-x) = f(b+x), \qquad ②$$

由 ②, $f[b+(x+b-2a)] = f[b-(x+b-2a)]$

$$= f(2a-x) = f[a+(a-x)] \xlongequal{由①} f[a-(a-x)]$$
$$= f(x)$$

即 $f[x+2(b-a)] = f(x)$,$2(b-a) > 0$.

故 函数 $f(x)$ 为具有周期 $2(b-a)$ 的周期函数.

注:用 $a-x$,$b-x$ 分别替代 x,由 ①,② 得

$$f(x) = f(2a-x) \qquad ③$$
$$f(x) = f(2b-x) \qquad ④$$

由 ④,$f(2a-x) = f[2b-(2a-x)] = f[x+2(b-a)]$

由 ③,$f(x)=f[x+2(b-a)]$

同样由 ③,④ 也可推出 ①,②.

故 ① 与 ③ 等价,② 与 ④ 等价.

§2 极 限

一、内容摘要与考查重点

1. 极限的有关定义

(1) 数列极限的定义:对于数列$\{x_n\}$,如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在正整数N,使得当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$,则称常数a是数列$\{x_n\}$的当n趋于无穷时的极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,也记为$x_n\to a(n\to\infty)$.

(2) 当自变量趋于无穷时函数极限的定义.

① 设$f(x)$当$|x|$充分大时有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$X>0$,使得当$|x|>X$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于无穷时的极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,也记为$f(x)\to A(x\to\infty)$.

② 设$f(x)$当x充分大时有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$X>0$,使得当$x>X$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于正无穷时的极限,记为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,也记为$f(x)\to A(x\to+\infty)$.

③ 设$f(x)$当$-x$充分大时有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$X>0$,使得当$x<-X$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于负无穷时的极限,记为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,也记为$f(x)\to A(x\to-\infty)$.

(3) 当自变量趋于某定点时函数极限的定义:

① 设$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于x_0时的极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,或$f(x)\to A(x\to x_0)$.

② 设$f(x)$在x_0的左邻域内有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,使得当$x_0-\delta<x<x_0$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于x_0时的左极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,或$f(x)\to A(x\to x_0^-)$.

③ 设$f(x)$在x_0的右邻域内有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,使得当$x_0<x<x_0+\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于x_0时的右极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或$f(x)\to A(x\to x_0^+)$.

(4) 无穷小的定义:如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称$f(x)$为当$x\to x_0$时的无穷小.

类似地,可定义当$x\to\infty$(或其他过程)时的无穷小.

(5) 无穷大的定义:设$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义.如果对于任意给定的$M>0$,总存在$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)|>M$,则称$f(x)$是当x趋于x_0时的无穷大.记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

类似地,可定义$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

类似地,还可定义当$x\to\infty$(或其他过程)时的无穷大.

(6) 无穷小阶的定义：设$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$，

① 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称当$x\to x_0$时，$\alpha$是比$\beta$高阶的无穷小，记为$\alpha=o(\beta)$；

② 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A(A\neq 0)$，则称当$x\to x_0$时，$\alpha$是与$\beta$同阶的无穷小，记为$\alpha=O(\beta)$；特别地，当$A=1$时，则称当$x\to x_0$时，$\alpha$是与$\beta$等阶的无穷小，记为$\alpha\sim\beta$；

③ 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称当$x\to x_0$时，$\alpha$是比$\beta$低阶的无穷小.

类似地，可定义当$x\to\infty$(或其他过程) 情形下的无穷小的阶.

2. 极限的有关性质

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

(2)(保号性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0(A<0)$，则存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0(f(x)<0)$.

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$，则$A\geqslant 0(A\leqslant 0)$.

(4)(局部有界性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则存在$x_0$的某去心邻域$U^0(x_0,\delta)$，使得$f(x)$在$U^0(x_0,\delta)$内有界.

以上 4 条性质在$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或其他过程) 的情形下也有相应的形式.

3. 极限存在准则

(1) 单调有界数列必有极限.

(2)(夹逼准则) 若在x_0的某去心的邻域(或$|x|$充分大时) 内有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，则有$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

通过变量替换这两个公式可写成更加一般的形式：设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且$f(x)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1,$$

$$\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}.$$

5. 极限的运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=AB$；

(3) 若$B\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

上述性质当$x\to\infty$时也成立.

6. 无穷小的有关性质

(1) 有限个无穷小的代数和是无穷小.

(2) 有限个无穷小的乘积是无穷小.

(3) 有界变量乘无穷小是无穷小.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha = 0$.

(5) 若 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小,且 $f(x) \neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大;反之,若 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

(6)(等价无穷小替换)设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta = 0$,且 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质当 $x \to \infty$ 时也成立.

对于本小节的内容,应重点掌握以下几点:

① 利用极限的运算法则求极限.

② 利用两个重要极限求极限.

③ 利用等价无穷小替换求极限.

④ 利用极限存在准则求极限.

⑤ 利用左、右极限求极限或证明极限不存在.

⑥ 利用函数的连续性求极限.

⑦ 利用“洛必达法则”求极限.

上述 ⑥、⑦ 项的内容将在后面复习.

二、例题分析

例 1 “对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$”是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的(　　).

(A) 充分但非必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

分析:此题是 1999 年全国考研数学二的原题,考查对数列极限的定义的理解. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的定义是“对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$,总存在正整数 N_1,当 $n > N_1$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$”. 两种说法相比较,似乎定义中的条件更强些,显然,由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的定义必能推出“对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数 N,当 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$”. 其逆是正确的. 因为对任意 $\varepsilon_1 > 0$,取 $\varepsilon = \min\left(\dfrac{\varepsilon_1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$,显然 $\varepsilon \in (0,1)$,所以总存在正整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$. 现取 $N_1 = N - 1$,于是当 $n > N_1$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant \dfrac{2\varepsilon_1}{3} < \varepsilon_1$. 所以以上两种说法是等价的,即选项 C 是正确的.

解:应选 C.

例 2 若 ε 为任意给定的正数,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的充要条件为(　　).

(A) $U(a,\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的全部点

(B) $U(a,\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点

(C) $U(a,\varepsilon)$ 之外至多有 $\{x_n\}$ 的有限个点

(D) $U(a,\varepsilon)$ 之外可能有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点

分析:由于“$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$”的精确含义是“对任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在 N,当 $n > N$ 时,恒有 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$”,所以,在 $U(a,\varepsilon)$ 内不一定有 $\{x_n\}$ 的全部点,只含有满足 $n > N$ 的 x_n,所以 A 不对. 而 B“$U(a,\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点”只能保证在某 N 之后的无穷多项 x_n 在 $U(a,\varepsilon)$ 内,而不能保证 N 之后的一切 x_n 都在 $U(a,\varepsilon)$ 内,故 B 也不对. C“$U(a,\varepsilon)$ 之外至多有 $\{x_n\}$ 的有限个点”能保证存在 N,当

$n > N$ 时的 x_n 都在 $U(a,\varepsilon)$ 内，所以，C 与"$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$"是可以互相推出的. 易知 D 项也不对.

解：应选 C.

例 3 设对任意的 x，总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$（　　）.

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

分析：此题是2000年全国考研数学三的原题. 有的考生认为由条件"$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$"则可得出"$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$"，但它们不一定为零，故错选为 B. 事实上，由条件"$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$"不一定能保证 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 的存在，例如若取 $g(x)=e^x+e^{-x}$，$\varphi(x)=e^x-e^{-x}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ 都不存在. 这样，可以想象，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 也不一定存在了. 例如取 $f(x)=e^x$，则 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$ 不存在.

解：应选 D.

例 4 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，则必有（　　）.

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在

分析：由于极限值的大小只能反映当 $n\to\infty$ 时的数列的变化趋势，不能反映前面有限项的取值情况. 所以，A、B选项都是不正确的. 又如 $\lim\limits_{n\to+\infty} x\cdot\dfrac{1}{x}=1$ 知C选项也不正确. 由无穷大的定义易知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n = \infty$，所以，D 选项正确.

解：应选 D.

例 5 设 $x_n = \begin{cases} \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n \text{ 为奇数}, \\ \dfrac{1}{n}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，x_n 为（　　）.

(A) 无穷大量　　(B) 无穷小量

(C) 有界变量　　(D) 无界变量

分析：n 为奇数时，$x_n\to\infty$.

n 为偶数时，$x_n\to 0$.

所以，x_n 既不是无穷大量，也不是无穷小量. 由于 $x_n\to\infty$（n 为奇数），所以 x_n 不是有界变量而是无界变量，故 D 选项正确.

解：应选 D.

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（　　）.

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

分析：由于 $f(x)$ 单调，所以若 $\{x_n\}$ 单调时必有 $\{f(x_n)\}$ 单调，又 $f(x)$ 有界，因此 $\{f(x_n)\}$ 是单调有界的数列，由极限存在的准则知 $\{f(x_n)\}$ 收敛，故应选择 B. 下面再看选项 A、C、D 的不正确性.

设 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，$f(x)=\begin{cases}\arctan x+1, & x\geqslant 0, \\ \arctan x-1, & x<0,\end{cases}$ 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，且 $x_n\to 0\ (n\to\infty)$. 但

$$f(x_n)=\begin{cases}\arctan\left[\dfrac{(-1)^n}{n}\right]+1, & n \text{ 为偶数}, \\ \arctan\left[\dfrac{(-1)^n}{n}\right]-1, & n \text{ 为奇数},\end{cases}$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{2n})=1$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{2n+1})=-1$，

从而$\{f(x_n)\}$不收敛，此例说明 A 不正确.

设 $x_n=n, f(x)=\arctan x$，易知 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调，$f(x_n)=\arctan n\to\frac{\pi}{2}\ (n\to\infty)$，但是$\{x_n\}$不收敛. 此例说明 C 不正确. 由于此时$\{f(x_n)\}$也是单调的，故此例也说明 D 不正确.

解:应选 B.

例 7 若$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$，则必有(　　).

(A)$f(x_0)=A$　　(B)$f(x_0)$存在但不一定为 A

(C) 存在邻域 $U^0(x_0,\delta)$，使 $f(x)$ 在其中有界　　(D) 对任何邻域 $U^0(x_0,\delta)$，$f(x)$ 在其中有界

分析:由极限的定义知"$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$"的精确含义是"对任何给定 $\varepsilon>0$，存在 $U^0(x_0,\delta)$，使得 $x\in U^0(x_0,\delta)$ 时，$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$"，易知 C 正确. 而$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 与 $f(x_0)$ 的存在是无关的，故 A、B 不正确. 由极限的定义可知"$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$"只能保证 $f(x)$ 在 x_0 的附近有界，故要求 $U^0(x_0,\delta)$ 中的 δ 较小，不能保证在任何的 $U^0(x_0,\delta)$ 内 $f(x)$ 有界，所以 D 也不对.

解:应选 C.

例 8 当 $x\to 0^+$ 时，与$\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　).

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$　　(B)$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-1$　　(D)$1-\cos\sqrt{x}$

分析:由于当 $x\to 0^+$ 时，

$$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x},$$

$$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{x}{2},$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-1\to-1,$$

所以选项 A,C,D 均不正确，

又 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}-\frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right],$$

而 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-1,$$

所以 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=0-(-1)=1.$$

故当 $x\to 0^+$ 时，$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}$.

解:应选 B.

例 9 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则(　　).

(A)$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B)$a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C)$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D)$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

分析:由题意知　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，且 $b\neq 0$.

而 $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2},$$

可知应有 $a=1$,否则上面极限不可能等于 1. 从而有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{-3bx^2}=-\frac{1}{6b}.$$

所以 $$-\frac{1}{6b}=1,$$

即 $$b=-\frac{1}{6}.$$

综上可知 $a=1,b=-\frac{1}{6}$.

解:应选 A.

例 10 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$.

分析:这是一个 n 项求和求极限的问题. 对这类问题首先应考虑是否这个和式能够求和,即用一个单项表示. 此时,所谓的"拆项法"要经常用到,即将和式"$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$"写成"$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})$"的形式,再展开求和时就会有许多项"抵消",剩下一个单项形式. 然后再求极限.

解:$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]$$
$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$
$$=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1.$$

例 11 设 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]=$ ________.

分析:此题是 1999 年全国考研数学四的原题. 此题考查的是对数函数性质,数列极限的求法,以及利用对数性质运算.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln f(1)\cdot\cdots\cdot f(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln f(i)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln a^i=\lim_{n\to\infty}\ln a\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$$
$$=\lim_{n\to\infty}\ln a\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{\ln a}{2}.$$

解:应填$\frac{1}{2}\ln a$.

例 12 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-4}-x)$.

分析:此式中含有"$\infty-\infty$"的因子,不好判断其极限值,而且该因子含根号,常用的处理方法是分子分母同乘一个共轭根式来变形.

解:$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-4}-x)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2-4}-x)(\sqrt{x^2-4}+x)}{(\sqrt{x^2-4}+x)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1}=-2.$$