华大助学

重难点手册

★九千万学子的制胜宝典
★八省市名师的在线课堂
★十九年书业的畅销品牌

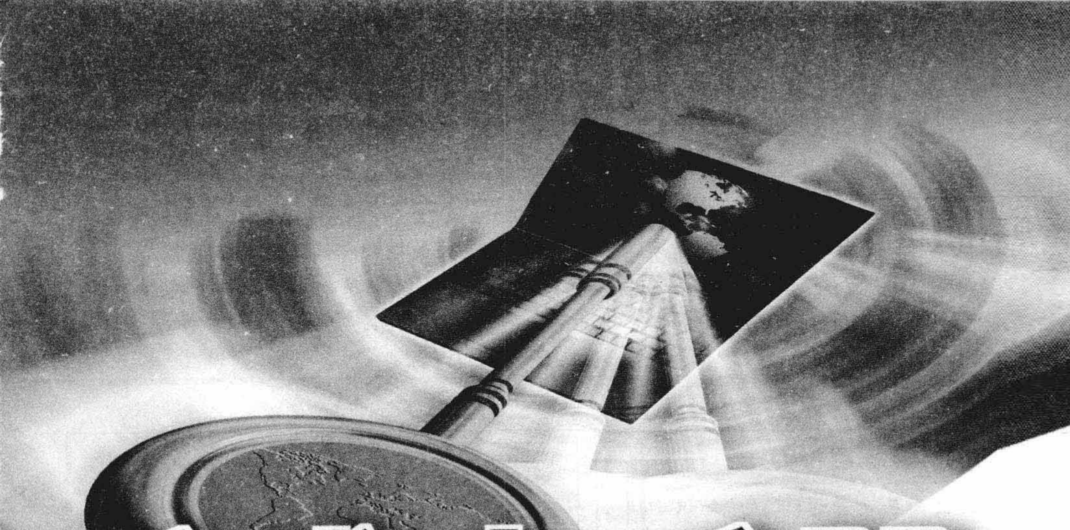
新课标
Xinkebiao

配人教A版

高中数学1（必修）

主审 蔡上鹤
主编 汪江松

华中师范大学出版社



重难点手册

新课标
Xinkebiao

配人教A版

高中数学1（必修）

主　审　蔡上鹤
主　编　汪江松

★九千万学子的制胜宝典
★八省市名师的在线课堂
★十九年书业的畅销品牌

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

重难点手册——高中数学 1(必修)(配人教 A 版)/汪江松 主编. —4 版.
—武汉:华中师范大学出版社,2011.6(2011.7 重印)
ISBN 978-7-5622-4796-8
Ⅰ.①重… Ⅱ.①汪…. Ⅲ.①数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 029325 号

重难点手册——高中数学 1(必修)(配人教 A 版)

主编:汪江松
选题策划:华大鸿图编辑室　　**责任编辑:**涂　庆
责任校对:万春春　　**封面设计:**新视点
编辑室:华大鸿图编辑室　　**咨询电话:**027—67867361
出版发行:华中师范大学出版社 ©
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号　　**邮编:**430079
销售电话:027—67867371　027—67865356　027—67867076
传真:027—67865347　　**邮购电话:**027—67861321
网址:http://www.ccnupress.com　　**电子信箱:**hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:湖北鄂南新华印刷包装有限公司　　**督印:**章光琼
字数:270 千字
开本:880mm×1230mm　1/32　　**印张:**8.5
版次:2011 年 6 月第 4 版　　**印次:**2011 年 7 月第 2 次印刷
定价:16.50 元

欢迎上网查询、购书

目　　录

第一章　集合与函数概念 …… 1

1.1　集合 …… 1

1.1.1　集合的含义与表示 …… 1

1.1.2　集合间的基本关系 …… 16

1.1.3　集合的基本运算 …… 28

1.2　函数及其表示 …… 43

1.2.1　函数的概念 …… 43

1.2.2　函数的表示法 …… 57

1.3　函数的基本性质 …… 80

1.3.1　单调性与最大(小)值 …… 80

1.3.2　奇偶性 …… 101

第一章综合评价 …… 113

第二章　基本初等函数(Ⅰ) …… 116

2.1　指数函数 …… 116

2.1.1　指数与指数幂的运算 …… 116

2.1.2　指数函数及其性质 …… 125

2.2 对数函数 …… 139

2.2.1 对数与对数运算 …… 139

2.2.2 对数函数及其性质 …… 152

2.3 幂函数 …… 170

第二章综合评价 …… 181

第三章 函数的应用 …… 184

3.1 函数与方程 …… 184

3.2 函数模型及其应用 …… 198

3.2.1 几类不同增长的函数模型 …… 198

3.2.2 函数模型的应用实例 …… 204

第三章综合评价 …… 217

参考答案与提示 …… 221

第一章

集合与函数概念

1.1 集 合

1.1.1 集合的含义与表示

课程目标点击

1. 初步理解集合的概念,掌握常用数集及其记法.

2. 理解元素与集合的关系,能判断某一元素"属于"或"不属于"某一集合.

3. 掌握两个集合相等的概念,会判断两个集合是否相等.

4. 理解集合的常用表示方法,初步掌握用列举法和描述法来表示集合.

5. 能结合日常生活中的一些具体事例来感受和理解集合的含义,体会并逐步熟悉集合语言的特点,并会用集合的语言来描述生活中的某些现象或事物.

重点难点突破

1. 集合与集合的元素

(1) 集合与元素

一般地,我们把研究对象统称为**元素**,把一些元素组成的总体叫做**集合**.

问题·探究

问题1 方程 $x^2-2x+1=0$ 有两个相等的实根,即 $x_1=x_2=1$,那么能不能说方程 $x^2-2x+1=0$ 所有实根组成的集合是$\{1,1\}$呢?

集合是一个原始的、不加定义的概念,这与点、直线、平面的概念一样.

我们通常用的大写字母 $A,B,C,D,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,c,d,\cdots$ 表示集合中的元素.

例如:$A=\{a,b,c,d,e\}$,$M=\{1,3,5,7,\cdots\}$,$T=\{$北京,上海,天津,重庆$\}$.

例 1 下列所给对象不能构成集合的是( ).

(A) 直线 l 上的所有点

(B) 平面直角坐标系中第一、三象限角平分线上的所有点

(C) 清华大学附中高一年级全体女生

(D) 所有高大的树

答案 D

指点迷津 所有高大的树——"高大"并不是一个明确的数学标准,若改成"10 米以上的树"就可以构成一个集合了.要记住一些日常概念并不能与数学概念划上等号,所以不能混淆.

(2) 元素与集合的关系

元素与集合的关系是"个体"与"集体"的关系.

一个元素要么属于一个集合,要么不属于这个集合,两者必居其一,而且只居其一.

若 a 是集合 A 中的元素,称 a 属于集合 A,记作 $a\in A$;

若 a 不是集合 A 中的元素,称 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$.

例如:前面的 $e\in A$,$2\notin M$.

如果构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是相等的.

(3) 集合的三种特性

① 确定性

一组对象是否构成集合,首先就得看这组对象是否是确定的.

例如:"所有的胖子"这组对象就不是确定的,因为"胖子"没有确定的定义标准.

② 互异性

这里所说的互异性是集合中所有的元素彼此是不能相同的,在今后的解题中要特别注意这一点.

例如:方程 $x^2-2x+1=0$ 的根构成的集合只有 1 一个元素,即为 $\{1\}$;不能出现两个重复的 1,即 $\{1,1\}$ 的表示就是不对的.

③ 无序性

集合的关键是其确定性和互异性,一旦集合确定,集合中的元素可以随意排列.

例如：集合$\{a,b,c,d\}$与$\{d,b,c,a\}$是同一个集合.

(4) 常用数集及其记法

数的集合简称为数集.

数学中一些常用的数集及其记法有：

自然数集(非负整数集)，记作$\mathbf{N}$；

正整数集，记作$\mathbf{N}^*$或$\mathbf{N}_+$；

整数集，记作$\mathbf{Z}$；

有理数集，记作$\mathbf{Q}$；

实数集，记作$\mathbf{R}$.

(5) 有限集和无限集

含有限个元素的集合叫有限集，含无限个元素的集合叫无限集.

例如：集合$A=\{a,b,c,d,e\}$为有限集，而数集$\mathbf{N}_+$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$均为无限集.

思 想 · 文 化

全体自然数与全体平方数(即1，4，9，…)谁多谁少？

1638年，意大利天文学家伽利略发现这样一个问题，这在当时是一个无法回答的问题，这也为集合论的诞生播下了种子. 这个问题的实质在于——什么是无限？自古希腊起，如何定义"无限"就是一个数学界没有攻克的堡垒. 康托对这一问题产生了浓厚的兴趣，因此创立了"集合论". 康托给出的定义是：当一个集合与它的一部分一一对应时，这个集合就是无限的，那么你能回答伽利略提出的这个问题吗？未完待续……

2. 集合的表示方法

(1) 自然语言描述法——用文字语句描述的方法.

例如：集合$\{2,4,6,8\}$用自然语言可叙述为：小于10的正偶数组成的集合.

(2) 列举法——把集合的元素一一列举出来.

例如："所有的正奇数"用列举法可表示为$A=\{1,3,5,7,9,\cdots\}$，"中国的四个直辖市"用列举法可表示为$T=\{$北京，上海，天津，重庆$\}$.

对于元素个数较少的集合通常用列举法表示比较简单.

指点迷津 (1) 对于无限集用列举法表示集合时，应呈现出集合的规律，如$P=\{1,3,5,7,9,\cdots\}$，一看就知道是表示正奇数的集合；

(2) 对于元素较多的有限集，除了注意呈现元素的规律之外，还应注意省略号的使用及范围的限制. 如$E=\{1,3,5,7,9,\cdots,999\}$，就表示1000以内的正奇数组成的集合.

(3) 描述法——把集合中元素的公共属性描述出来.

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法. 具体方法是:在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征. 比如我们不能用列举法表示不等式 $x-7<3$ 的解集,因为这个集合中的元素是列举不完的. 但是,我们可以用这个集合中元素所具有的共同特征来描述.

例如,不等式 $x-7<3$ 的解集中所含元素的共同特征是:$x\in\mathbf{R}$,且 $x-7<3$,即 $x<10$. 所以,我们可以把这个集合表示为 $D=\{x\in\mathbf{R}|x<10\}$.

又如,任何一个奇数都可以表示为 $x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 的形式. 所以,我们可以把所有奇数的集合表示为 $E=\{x\in\mathbf{Z}|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$.

例 1 已知集合 $M=\{m\in\mathbf{N}|m=8-k,k\in\mathbf{N}_+\}$,则集合 M 中元素的个数是( ).

(A) 6　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9

思路点拨 集合 M 中的元素 $m=8-k$,其中 $m\in\mathbf{N}$,即 $8-k\geqslant0$,解 $k\leqslant8$. 又 $k\in\mathbf{N}_+$,故 k 只能取 $1,2,\cdots 8$,则 $M=\{0,1,2,\cdots,7\}$.

答案 C

例 2 试说出集合 $M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$N=\{y|y=2x+1,x\in\mathbf{R}\}$,$P=\{y|y=2x+1,x\in\mathbf{R}_+\}$的几何意义.

【解】 集合 M 表示抛物线 $y=x^2+1$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上的所有 y 的取值;集合 N 表示直线 $y=2x+1$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上的所有 y 的取值;而集合 P 则表示直线 $y=2x+1$ 在 $x\in\mathbf{R}_+$ 上的所有 y 的取值.

问题·探究

注意代表的元素不同所表示的集合也不同. 例如,对于集合 $A=\{y|y=x^2-1\}$,$B=\{x|y=x^2-1\}$,$C=\{(x,y)|y=x^2-1\}$,如不仔细辨别,就会认为这三个集合是同一回事,或者根本无法区分它们. 实际上,集合 A 的代表元素是 y,它表示抛物线 $y=x^2-1$ 上任意一点的纵坐标所具有的性质,就是 $y=x^2-1$ 的所有 y 的取值,即$\{y|y\geqslant-1\}$是数集;集合 B 的代表元素是 x,它表示抛物线 $y=x^2-1$ 上任意一点的横坐标所具有的性质,也就是函数 $y=x^2-1$ 的定义域,即$\{x|x\in\mathbf{R}\}$也是数集;而集合 C 中的代表元素是有序实数对(x,y),它表示的是点,所以集合 C 是点的集合,这个集合的几何图形就是抛物线 $y=x^2-1$ 的图象.

问题 2 我们学习了三种集合的表示法,那么在不同的情况下应选择什么样的表示法呢?

方法技巧点拨

1. 集合中元素的互异性与无序性

例 1 集合$\{3,x,x^2-2x\}$中，满足条件的x所组成的集合是______.

思路点拨 依集合中元素的互异性，实数x应满足什么条件？

【解】 由集合$\{3,x,x^2-2x\}$中元素的互异性知

$$\begin{cases}x\neq 3,\\ x^2-2x\neq 3,\\ x^2-2x\neq x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 3,\\ x\neq 3\text{ 且 }x\neq -1,\\ x\neq 0\text{ 且 }x\neq 3\end{cases}\Rightarrow x\neq -1\text{ 且 }x\neq 0\text{ 且 }x\neq 3.$$

又$x\in\mathbf{R}$，则这样的集合为

$$\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq -1\text{ 且 }x\neq 0\text{ 且 }x\neq 3\}.$$

答案 $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq -1\text{ 且 }x\neq 0\text{ 且 }x\neq 3\}$.

例 2 已知集合$A=\{12,x-2,2x^2+5x\}$，且$-3\in A$，则$x=$________.

思路点拨 依$-3\in A$作分类讨论.

【解】 (1) 若$x-2=-3$，则$x=-1$. 此时$2x^2+5x=-3$，不符合元素的互异性，故$x=-1$不成立；

(2) 若$2x^2+5x=-3$，即$(2x+3)(x+1)=0$，得$x_1=-\dfrac{3}{2}$，$x_2=-1$(舍去). 此时$x-2=-\dfrac{7}{2}\neq -3$.

答案 $-\dfrac{3}{2}$.

● 误区警示 对于含有参数的集合，集合中元素的互异性的讨论就归结为参数取值范围的讨论，这里尤其应注意参数取值的回代检验. 比如，例 2 中$x=-1$的检验. 另外也要注意无序性. 比如，例 2 中有$x-2=-3$，也有$2x^2+5x=-3$，两者缺一不可.

变式引申 1 数集A满足：若$a\in A$，则$\dfrac{1+a}{1-a}\in A(a\neq 1)$. 已知$\dfrac{1}{3}\in A$，则$A=$________.

2. 集合与元素的关系及其表示

例 3 用列举法表示下列集合：

(1) $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{6}{2-x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{Z}\right\}$； (2) $\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{a}{b},a\in\mathbf{Z},|a|<2,b\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }b\leqslant 3\right\}$；

(3) $\{(x,y)\mid y=2x,x\in\mathbf{N}$ 且 $1\leqslant x<4\}$.

【解】 (1) $\because \dfrac{6}{2-x}\in\mathbf{Z}$, $\therefore |2-x|$ 是 6 的因数,

$\therefore |2-x|=1$ 或 $|2-x|=2$ 或 $|2-x|=3$ 或 $|2-x|=6$,

即 $x=1,3,4,0,-1,5,-4,8$.

$\therefore \left\{x\,\middle|\,\dfrac{6}{2-x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{Z}\right\}=\{-4,-1,0,1,3,4,5,8\}$.

(2) 由 $a\in\mathbf{Z},|a|<2$,知 $a=-1,0,1$;由 $b\in\mathbf{N}^*$ 且 $b\leqslant3$,知 $b=1,2,3$.

$\therefore \dfrac{a}{b}$的值为$\dfrac{-1}{1},\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{1},\dfrac{-1}{2},\dfrac{0}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{3},\dfrac{0}{3},\dfrac{1}{3}$.

考虑到集合中元素的互异性,故原集合可用列举法表示为

$$\left\{-1,0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}.$$

(3) $\because x\in\mathbf{N}$ 且 $1\leqslant x<4$,

$\therefore x=1,2,3$,其对应的 y 值分别为2,4,6.

故原集合可用列举法表示为 $\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$.

例 4 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 无任何元素,求 a 的取值范围;

(2)若 A 中至多有一个元素,求 a 的取值范围.

思路点拨 A 为方程的解集.A 中无元素,即方程无解;A 中只有一个元素,即方程只有一解.

【解】 (1)若 A 无任何元素,即 $ax^2-3x+2=0$ 无实根,

$\therefore \Delta=9-8a<0$,即 $a>\dfrac{9}{8}$.

故 a 的取值范围是 $a>\dfrac{9}{8}$.

(2)若 A 中只有一个元素,

当 $a=0$ 时,方程为 $-3x+2=0$,即 $x=\dfrac{2}{3}$;

当 $a\neq0$ 时,方程 $ax^2-3x+2=0$ 有两个相等的实根.

$\therefore \Delta=9-8a=0$,即 $a=\dfrac{9}{8}$.

综合(1)的结论可知 a 的取值范围是 $a=0$ 或 $a\geqslant\dfrac{9}{8}$.

例 5 试用适当方法表示下列集合:

(1) 24 的正约数; (2) 数轴上到原点的距离小于 1 的所有点;

(3) 平面直角坐标系中第一、三象限的角平分线；

(4) 所有非零偶数；　　(5) 所有被 3 除余数是 1 的数.

思路点拨 上述集合都是用文字语言描述的，通常我们用列举法或符号语言描述法来表示集合.

【解】 (1) $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.　　(2) $\{x \mid |x|<1\}$.

(3) $\{(x,y) \mid y=x\}$.

(4) $\{x \mid x=2k,\ k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0\}$ 或 $\left\{x \,\middle|\, \frac{x}{2}\in\mathbf{Z}\text{ 且 }x\neq0\right\}$.

(5) $\{x \mid x=3k+1,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

例 6 有下列各命题：

(1) 方程 $\sqrt{2x-1}+|3y+3|=0$ 的解集是 $\left\{\frac{1}{2},-1\right\}$；

(2) 方程 $x^2+x-6=0$ 的解集为 $\{(-3,2)\}$；

(3) 集合 $M=\{y \mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$ 与集合 $N=\{(x,y) \mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$ 表示同一集合；

(4) 方程组 $\begin{cases}2x+y=0,\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集是 $\{(x,y) \mid x=-1$ 或 $y=2\}$.

其中描述正确的个数为(　　).

(A) 0 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

思路点拨 正确区分数集与点集(有序实数对)的表示方法.

【解】 (1)二元方程的解是有序实数对 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$，用集合表示为 $\left\{\left(\frac{1}{2},-1\right)\right\}$，而 $\left\{\frac{1}{2},-1\right\}$ 是含两个元素的数集；

(2)中一元二次方程的解集为数集 $\{-3,2\}$，而不是点集；

(3)中 M 为数集，N 为点集，两者不同；

(4)中的解集是 $\{(x,y) \mid x=-1$ 且 $y=2\}$.

综上可知，四个命题均错.

答案 A

变式引申 2　用数字符号语言表示图中阴影部分(含边界)的点的坐标的集合.

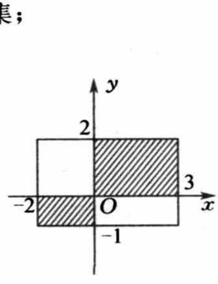


图 1.1-1

3. 利用集合相等关系解题

例 7 (2007·全国Ⅰ) 设 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,$

$a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$,则 $b-a=$(　　).

(A) 1　　(B) -1　　(C) 2　　(D) -2

思路点拨　当从 $0\in\{1,a+b,a\}$ 突破.

【解】 显然 $a\neq0$,则 $a+b=0\Rightarrow\dfrac{b}{a}=-1$,依对应元素知 $b=1,a=-1$.

从而 $b-a=1-(-1)=2$.

答案　C

变式引申 3　若 $A=\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}$,$B=\{a^2,a+b,0\}$,且 $A=B$,求 a.

4. 关于集合的信息题

例 8　(2008·江西)定义集合运算 $A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$. 设 $A=\{1,2\}$,$B=\{0,2\}$,则集合 $A*B$ 的所有元素之和为(　　).

(A) 0　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 6

思路点拨　依 $A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$ 的定义知,z 是将 A,B 中的元素两两作积.

【解】 当 $y=0$ 时,$z=0$;

当 $y=2,x=1$ 时,$z=2\times1=2$;

当 $y=2,x=2$ 时,$z=2\times2=4$.

故 $A*B$ 的所有元素之和为 $0+2+4=6$.

答案　D

变式引申 4　设 P,Q 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$,若 $P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$,则 $P+Q$ 中元素的个数是(　　).

(A) 9　　(B) 8　　(C) 7　　(D) 6

例 9　(2006·辽宁)设 $\oplus$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个运算,A 是 $\mathbf{R}$ 上的非空子集. 若对任意 $a,b\in A$,有 $a\oplus b\in A$,则称 A 对运算 $\oplus$ 封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不等于零)(四则运算)都封闭的是(　　).

(A) 自然数集　　(B) 整数集　　(C) 有理数集　　(D) 无理数集

思路点拨　理解并运用"A 对运算 $\oplus$ 封闭的含义".

【解法 1】 令 $a=1$, $b=2$,则 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$,可排除 A、B;

令 $a=\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$,则 $\dfrac{b}{a}=2$,可排除 D.

【解法 2】 自然数集对减、除法不封闭；整数集对除法不封闭；无理数集对减、乘、除法都不封闭.

答案　C

例10　设 $a,b\in\mathbf{Z}$, $E=\{(x,y)\mid(x-a)^2+3b\leqslant 6y\}$，点 $(2,1)\in E$，但点 $(1,0)\notin E$，点 $(3,2)\notin E$. 求 a,b 的值.

思路点拨　理解点 $(x,y)\in E$ 和点 $(x_0,y_0)\notin E$ 的含义，化归为求不等式组的公共解.

【解】 $\because$ 点 $(2,1)\in E$，点 $(1,0)\notin E$，点 $(3,2)\notin E$，

$$\therefore\quad\begin{cases}(2-a)^2+3b\leqslant 6, & ①\\(1-a)^2+3b>0, & ②\\(3-a)^2+3b>12. & ③\end{cases}$$

由①② 得　$6-(2-a)^2>-(1-a)^2$，解得　$a>-\dfrac{3}{2}$.

联立①③，解得　$a<-\dfrac{1}{2}$.　$\therefore -\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{1}{2}$.

又 $a,b\in\mathbf{Z}$，　$\therefore a=-1$，　代入①②解得　$b=-1$.

探究创新拓展

分类讨论

——高中数学七大数学基本思想方法(一)

函数与方程、数形结合、分类讨论、化归、特殊与一般、有限与无限、或然与必然是高中数学所涉及的七大基本思想方法. 这里我们来了解一下分类讨论这一思想方法.

据估计，在科学、事务处理和工业上使用计算机，其四分之一的时间是花在分类问题上的.

——(美)马丁·加德纳

由此可见，分类是一个不可忽视的问题.

分类讨论的基本步骤：

(1) 确定分类主体以及分类主体的范围；

(2) 确定分类标准；

(3) 逐类讨论(注意回代检验)；

(4) 归纳综述结论.

例1　已知集合 $A=\{a,\ a+d,\ a+2d\}$，$B=\{a,\ aq,\ aq^2\}$（a 为常数），

若 $A=B$，求 d,q 的值.

【解】 由 $A=B$,即 A 与 B 的元素一样,则

$$(\mathrm{I})\begin{cases}a+d=aq,\\ a+2d=aq^2\end{cases} \quad 或 \quad (\mathrm{II})\begin{cases}a+d=aq^2,\\ a+2d=aq.\end{cases}$$

由(Ⅰ)消去 d，得 $aq^2-2aq+a=0$.

根据已知条件及集合中元素的互异性知,$a\neq0$，$d\neq0$，解得 $q=1$.

但 $q=1$ 时，$a=aq=aq^2$，这与集合中元素的互异性矛盾，故舍去 $q=1$.

由(Ⅱ)消去 d，得 $2aq^2-aq-a=0$.

$\because a\neq0$，$q\neq1$，$\therefore q=-\dfrac{1}{2}$或 $q=1$(舍去).

将 $q=-\dfrac{1}{2}$代入(Ⅱ)，解得 $d=-\dfrac{3}{4}a$. $\therefore d=-\dfrac{3}{4}a$，$q=-\dfrac{1}{2}$.

例 2 设 a,b,c 为非零实数,则 $x=\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{|abc|}{abc}$的所有值组成的集合有哪些元素?

思路点拨 这里肯定是要分类讨论的,那么怎样"分"呢?大多数同学可能会这样想:①a 正,b 正,c 正;②a 正,b 正,c 负;③a 正,b 负,c 正;④a 正,b 负,c 负;⑤a 负,b 负,c 负;⑥a 负,b 负,c 正;⑦a 负,b 正,c 负;⑧a 负,b 正,c 正共 8 种情况.这是不是太复杂了呢?而且,一不小心就会漏掉情况,那么有没有简洁的分类办法呢?将 a,b,c 均视为分类的主体似乎太细致,太麻烦,我们可不可以将 a,b,c 视作一个"有机"整体呢?

【解】 当 a,b,c 均为负数时,$\dfrac{a}{|a|},\dfrac{|b|}{b},\dfrac{c}{|c|},\dfrac{|abc|}{abc}$均为$-1$,故 $x=-4$;

当 a,b,c 只有一个为正数时,$\dfrac{a}{|a|},\dfrac{|b|}{b},\dfrac{c}{|c|},\dfrac{|abc|}{abc}$中必有两个为 1,两个为$-1$,故 $x=0$;

当 a,b,c 有两个为正数时,$\dfrac{a}{|a|},\dfrac{|b|}{b},\dfrac{c}{|c|},\dfrac{|abc|}{abc}$中必有两个为 1,两个为$-1$,故 $x=0$;

当 a,b,c 均为正数时,$\dfrac{a}{|a|},\dfrac{|b|}{b},\dfrac{c}{|c|},\dfrac{|abc|}{abc}$均为 1,故 $x=4$.

由 $x=\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{|abc|}{abc}$的所有值组成的集合的元素有 $0,-4,4$.

反思 由此可见,选择适当的分类主体和分类标准,有时能起到事半功倍的效果,并不是分得越细越好.但要注意无论选择怎样分类,不漏不重是共同的原则.

与分类讨论相对的是整体的思想，整体思想是系统思想中的整体性原则在数学中的反映，用整体思想解决问题，不是着眼于它的局部特征，而是着眼于它的整体结构，通过对其整体结构全面、深刻地观察、分析，从宏观上去理解和认识问题的实质，从宏观上把握住所研究问题的关键，用宏观思维策略考虑问题，从而挖掘和发现整体结构中的内在联系，促使解题过程得到简缩.

例 3　设实数 a,b 使方程 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ 有实根，求 a^2+b^2 的最小值.

思路点拨　问题本身言简意赅，降次是首要目标. 对方程两边同除以 x^2，则方程变成：

$x^2+ax+b+\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$，整理得 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+b-2=0.$

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$，则 $t^2+at+b-2=0(*)$，且 $|t|\geqslant 2$（这做为一个结论先使用）.

即上述方程（*）有绝对值不小于 2 的实根.

【解法 1】（分类讨论）

（*）式有实根，则 $\Delta\geqslant 0\Rightarrow a^2-4(b-2)\geqslant 0$，　①

$$|x_{1,2}|=\left|\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4(b-2)}}{-2}\right|\geqslant 2,$$

即 $|a|+\sqrt{a^2-4(b-2)}\geqslant 4.$　②

只讨论 $a\geqslant 0$ 的情形：

当 $a\geqslant 1$ 时，令 $b=0$ 易验证①、②均满足条件，故此时 a^2+b^2 的最小值就是 $a^2(a\geqslant 1)$；

当 $0\leqslant a<1$ 时，②式变为 $a^2-4(b-2)\geqslant(4-a)^2$，化简得 $b\leqslant 2a-2$，所以 $b<0$满足条件①，此时 $|b|\geqslant|2a-2|$，所以 $a^2+b^2\geqslant a^2+(2a-2)^2=5\left(a-\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{4}{5}$，当 $a=\dfrac{4}{5}$时，a^2+b^2 的最小值为$\dfrac{4}{5}$，此时 $b=-\dfrac{2}{5}$.

综上，满足题设的 a^2+b^2 的最小值为$\dfrac{4}{5}$.

【解法 2】（避开分类讨论）

将 $t^2+at+b-2=0\Rightarrow t^2-2=-(at+b)$ 且 $|t|\geqslant 2$.

$\Rightarrow(t^2-2)^2=a^2t^2+b^2+2abt\leqslant a^2t^2+b^2+a^2+b^2t^2$，

即 $(t^2-2)^2\leqslant(a^2+b^2)(t^2+1)$（当且仅当 $a=bt$ 时等号成立）.

对于上式，化简得 $(a^2+b^2)\geqslant\dfrac{(t^2-2)^2}{t^2+1}=t^2+1+\dfrac{9}{t^2+1}-6\geqslant\dfrac{4}{5}$.

$\therefore (a^2+b^2)_{\min}=\dfrac{4}{5}$,当且仅当$|t|=2$时等号成立.

例 4 若不等式$x^2+3mx-4<0$对任意$m\in[0,1]$都成立,求实数x的取值范围.

思路点拨 由于受思维定势干扰,常常把函数看成是关于x的函数,其解法繁琐.此题含有两个变量x和m,而条件是不等式对区间$[0,1]$内的所有m都成立,其重心落在m上,因此确定m为主变量可避免分类讨论.

【解】 构造函数$f(m)=(3x)m+x^2-4$.借助一次函数图像的特征,只要

$$\begin{cases}f(0)<0,\\ f(1)<0\end{cases}\Rightarrow -2<x<1.$$

分分合合,顺势而定,如何定夺,这可需要同学们用心去体会.

高考真题链接

例 1 (2007·江西)若集合$M=\{0,1,2\}$,$N=\{(x,y)\mid x-2y+1\geqslant 0$且$x-2y-1\leqslant 0,x,y\in M\}$,则$N$中元素的个数为(　　).

(A) 9　　(B) 6　　(C) 4　　(D) 2

思路点拨 先依$x\in M,y\in M$,一一列举出有序数对(x,y)的全部情况,再逐一检验这些有序数对是否满足N中的两个不等式.

【解】 $\because N$为点集,$(x,y)\in N$且$x\in M,y\in M$,

$\therefore$ 由$x,y\in M$组成的点有$(0,0)$,$(0,1)$,$(0,2)$,$(1,0)$,$(1,1)$,$(1,2)$,$(2,0)$,$(2,1)$,$(2,2)$.

其中满足$x-2y+1\geqslant 0$且$x-2y-1\leqslant 0$的仅有$(0,0)$,$(1,0)$,$(1,1)$,$(2,1)$四个元素.

答案 C

例 2 (2006·上海)若关于x的不等式$(1+k^2)x\leqslant k^4+4$的解集是M,则对任意实常数k,总有(　　).

(A) $2\in M,0\in M$　　(B) $2\notin M,0\notin M$

(C) $2\in M,0\notin M$　　(D) $2\notin M,0\in M$

思路点拨 先解含以k为参数的关于x的一元一次不等式,再运用配方法求出不等式的最值.

【解】 因为$1+k^2>0$,所以$M=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant\dfrac{k^4+4}{1+k^2},k\in\mathbf{R}\right\}$.