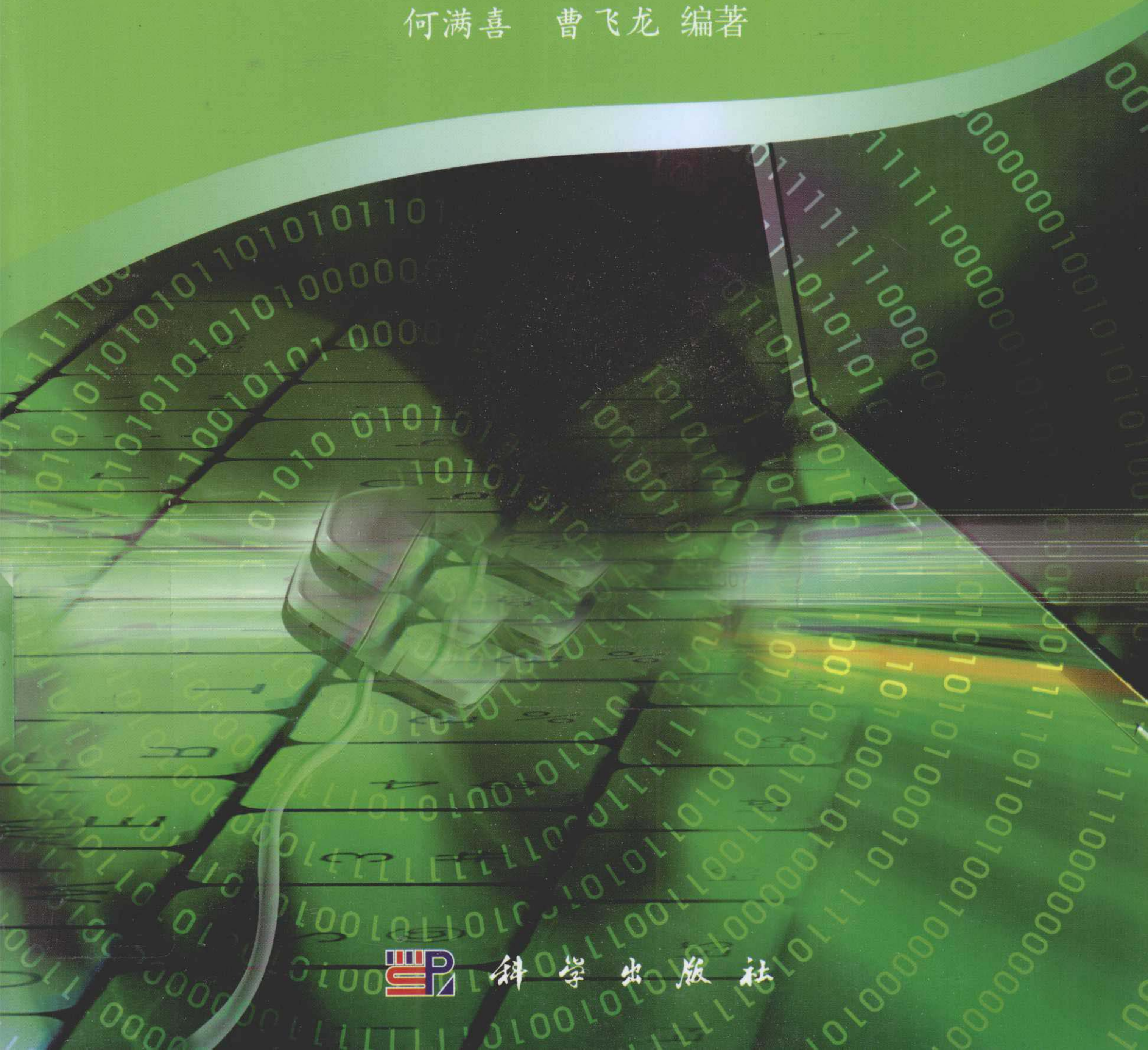
普通高等教育“十二五”规划教材

计算方法

何满喜　曹飞龙　编著



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

计 算 方 法

何满喜　曹飞龙　编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书根据普通高等理工科院校“计算方法”和“数值分析”课程的教学大纲编写而成，重点介绍计算机上常用的典型计算方法和基本理论. 主要内容包括数值计算中的误差分析、线性方程组与非线性方程组的解法、矩阵特征值与特征向量的计算、非线性方程求根的方法、数值逼近的插值法与数据拟合法、数值积分与数值微分、常微分方程初值问题的数值解法等. 书中内容力求精炼充实、由浅入深，从典型算法与实际问题着手，循序渐进，简洁易懂，便于教学与自学. 每章都有较明确简洁的算法与实例，着重训练读者的计算能力，培养读者解决实际问题的方法和创新能力. 每章后还配有适量的习题，便于读者掌握和巩固重点内容、算法与基本思想.

本书可作为普通高等院校数学各专业的本科生、研究生和理工科各类相关专业的本科生、研究生的“计算方法”、“数值分析”课程的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

计算方法/何满喜，曹飞龙编著. —北京：科学出版社，2011

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-031865-7

Ⅰ. 计… Ⅱ. ① 何… ② 曹… Ⅲ. ① 数值计算 高等学校-教材

Ⅳ. ① O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 139646 号

责任编辑：张中兴／责任校对：陈玉凤

责任印制：张克忠／封面设计：北京华路天然图文设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 7 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2011 年 7 月第一次印刷 印张：12 1/4

印数：1—3 000 字数：240 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是为普通高等理工科院校“计算方法”和“数值分析”课程而编写的教材，主要介绍计算机上常用的典型计算方法和基本理论. 书中以介绍计算方法的重要理论和基本算法为主要内容，以解决实际问题的基本思想为引导，同时以数值算法的实用性为基础. 我们力求取材内容合理、系统、科学，叙述简洁易懂. 我们在多年给不同专业(数学、物理、计算机) 的不同层次学生 (本科生、研究生) 讲授“计算方法”、“数值分析”、“数值代数”、“算法分析设计”、“计算机程序设计”等相关课程的基础上总结经验，学习和参考了相关教材，取长补短，相互对比分析，并在“计算方法”、“数值分析”课程讲稿的基础上经过修改、完善、补充后，编写完成了本书.

近年来计算机与计算数学这一学科发展很快，计算数学的内容也在不断丰富和更新，数值计算方法在实际问题的研究和解决中的应用日趋活跃. 因此本书在介绍常用的基本理论与方法的同时，把握一些典型算法介绍的广度和深度，结合作者的研究成果，突出了算法的实用与实际问题的解决，以典型算法在数学建模中的应用为例，介绍了有关算法在不同领域科学研究中的应用性. 在注重内容充实与紧凑的同时，还注意了算法的描述与实现，并力求文字叙述流畅，内容简洁易懂.

随着高等教育迅速发展，教育教学改革研究不断深入，教学与教材面临着新的考验. 高等教育已从精英教育转向大众教育，课程教学课时明显减少，对教学与教材建设提出了新的要求. 考虑到教学课时的限制，编写中我们只能力求教材内容的精炼和算法的实用与简洁，很多好的算法没有继续研究和深入讨论. 读者需要时可以在此基础上参考有关书籍，以便了解和掌握更多的算法. 学习本书仅需高等代数、数学分析、

高等数学、线性代数中的基础知识. 完整讲完本书约需要 60 学时, 只要适当削减书中部分章节, 便可用于不同专业或不同层次的讲授.

教材内容的合理性、系统性、科学性是我们所希望的, 但由于编者水平有限, 难免有不当之处, 恳请各位学者、同仁不吝赐教, 予以批评、指正.

编 者

2011 年 1 月于杭州

目　录

第 1 章

引 论

1.1 数值问题的计算方法

计算方法是解决实际问题过程中形成的处理数值问题的方法, 是计算数学的重要分支之一, 也是研究各种数学问题求解的数值计算方法.

为了研究某些科学与工程实际问题, 首先要依据物理现象、力学规律等可观察的因素, 建立问题的数学模型, 这些模型一般为代数方程、微分方程或更复杂的数学问题等. 科学计算的一个重要内容就是要研究这些数学问题的数值计算方法 (适合计算机计算的计算方法), 即求解数学模型. 因此在计算机成为数值计算的主要工具以后, 学习和研究适合于计算机上使用的数值计算方法是个重要的问题. 利用数值计算方法解决实际问题的大致过程如下:

$$\boxed{\text{实际问题}} \to \boxed{\text{数学模型}} \to \boxed{\text{数值计算方法}} \to \boxed{\text{程序设计}}$$
$$\to \boxed{\text{上机处理数据}} \to \boxed{\text{输出数值结果}} \to \boxed{\text{分析结果}}$$

计算方法涉及的问题和内容很广, 但它主要是讨论如何把实际问题归结为数值问题, 制定数值问题的算法, 同时也讨论算法的优缺点和数值解的精度等问题.

所谓的**数值问题**就是对给定的问题或模型, 给出计算机上可以实现的算法或迭代公式, 或利用已知数据求出另一组结果数据, 使得这两组数据满足预先指定的某种关系. 而得到的这一组结果数据就是**数值解**, 得出数值解的过程或方法就称为**数值算法**.

数值问题的讨论通常以数学分析 (或高等数学) 和高等代数 (或线性代数) 作为主要工具和手段, 对实际问题进行理论的分析, 从而进一步讨论和研究数值问题. 计

算方法作为数值分析的一个重要手段也有它自己的理论基础和基本的一些概念、有关重要的结果、定理等. 需要说明的是, 计算方法中得到的有关方法和结果在理论上虽不严格, 但通过实际计算、对比、分析等手段被证明是行之有效的方法和结果. 因此, 计算方法用来进行数值分析既有纯粹数学的高度抽象性与严密科学性的特点, 又有应用的广泛性与实际试验的高度技术性的特点, 是一门与计算机密切配合的实用性很强的数学内容和课程.

根据计算方法的数值分析的特点, 学习本课程时首先要注意掌握方法的基本原理和思想、处理问题的技巧及与计算机的结合, 其次还要充分重视方法的优缺点、数值结果的误差、迭代公式的收敛及稳定性.

1.2 浮 点 数

1.2.1 定点数

设 r 是大于 1 的正整数, $0 \leqslant a_i \leqslant r-1$, 则位数有限的 r 进制正数 x 可以表示为

$$x = a_l a_{l-1} \cdots a_2 a_1 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m} \tag{1.1}$$

那么 x 是有 l 位整数, m 位小数的 r 进制数. 因为 r 进制数的基为 r, 所以式 (1.1) 的 x 还可以表示成

$$x = a_l \times r^{l-1} + a_{l-1} \times r^{l-2} + \cdots + a_2 \times r^1 + a_1 \times r^0 + a_{-1} \times r^{-1} + \cdots + a_{-m} \times r^{-m} \tag{1.2}$$

这种把小数点固定在指定位置上, 位数有限的数称为*定点数*.

定点数的特点是小数点不能随意移动. 例如要把十进制数 1105.2391, 105.1268, 0.6 表示成 $l=4$, $m=4$ 的定点数, 那么可以写成: 1105.2391, 0105.1268, 0000.6000, 也就是说, $l=4$, $m=4$, $r=10$ 的定点数是 8 位定点数, 而所有这样的 8 位定点数中绝对值最大的数是 ±9999.9999, 绝对值最小的非零数是 ±0000.0001. 所以说定点数是有限个、可数的.

对于给定的 l, m, r 组成的定点数全体用 $F(l,m,r)$ 来表示, 并称为*定点数的数系*. 对不同的 l, m, r 组成的定点数的数系是不同的数系.

1.2.2 浮点数

设 s 是 r 进制数, p 是十进制的整数, 记 $x = s \times r^p$, 则 x 是 r 进制的数. 若 s 的

整数部分为零, 即可表示成

$$s = \pm 0.a_1a_2\cdots a_t \tag{1.3}$$

即 s 是由 t 位小数构成, 其中 $0 \leqslant a_i \leqslant r-1\,(i=1,2,\cdots,t)$, 则有

$$x = \pm s \times r^p = \pm 0.a_1a_2\cdots a_t \times r^p \tag{1.4}$$

这时 x 称为 t 位浮点数, 其中 s 称为尾数, r 称为基数, p 称为阶数(是一个整数). 若 $a_1 \neq 0$, 则该浮点数称为 t 位的规格化的浮点数. 若取 $r=10$, 则式 (1.4) 就称为十进制的 t 位浮点数.

对于不同的 t, 浮点数所表示的数是不同的, 所以可用数系的方法来表示不同的 t 所表示的浮点数. 例如 $F(t,r,p)$ 来表示 t 位的、r 进制的、阶数为 p 的浮点数的全体.

例 1 把以下十进制数表示成 3 位的浮点数和 3 位的规格化的浮点数.

0.015 15.4 0.89

解 3 位浮点数的表示是: 0.015×10^0, 0.154×10^2, 0.890×10^0

还可以表示成: 0.150×10^{-1}, 0.154×10^2, 0.089×10^1

3 位规格化浮点数的表示是: 0.150×10^{-1}, 0.154×10^2, 0.890×10^0

因此 3 位浮点数的表示一般不是唯一的, 而 3 位规格化的浮点数的表示是唯一的. 所以说, 一个浮点数其规格化的表示是唯一的.

计算机中数的运算都是以浮点数的形式来实现的, 并以规定的 t 位规格化的浮点数进行运算.

在计算中必须注意浮点数的运算规则, 就是两个浮点数进行加减运算时先要对阶, 然后计算. 即把两个浮点数的阶数写成同一幂次, 然后才对两个浮点数的尾数进行加减运算. 例如对浮点数 $x=0.156\times10^3$, $y=0.08\times10^{-1}$, 在 6 位的规格化的浮点数的计算机上进行运算时有

$$\begin{aligned} x+y &= 0.156\times10^3 + 0.08\times10^{-1} = 0.156000\times10^3 + 0.000008\times10^3 \\ &= (0.156000+0.000008)\times10^3 = 0.156008\times10^3. \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.3 误差、有效数字

1.3.1 误差的来源

解决社会、经济、生态等领域的实际问题中常用的数值计算方法包括: 函数的数

值逼近、非线性方程数值解、数值线性代数、数值微积分和微分方程数值解等. 计算方法与数值分析不仅要讨论这些数值方法, 而且还要研究这些模型和算法的误差. 应该强调, 误差分析在计算方法、数值分析和数学建模中占有一定地位.

解决实际问题时对问题进行分析研究的基础上要建立对应的数学模型来刻画和描述原问题. 在这个建模过程中往往根据主要因素, 并忽略一些次要因素的影响, 简化许多条件, 使实际问题理想化, 便于用数学语言、数学表达式描述和表达原问题. 因此, 数学模型是实际问题理想化、简单化得到的, 是实际问题的近似. 把实际问题的解与数学模型的解之间的误差称为“*模型误差*”.

例 2　设一根铝棒在温度 t 时的实际长度为 L_t, 在 $t=0$ 时的实际长度为 L_0, 用 l_t 来表示铝棒在温度为 t 时的长度的近似值, 并已建立了数学模型

$$l_t = L_0(1+at) \tag{1.6}$$

式中, a 是由实验观测到的常数, 当不考虑代入数据本身的误差时, $L_t - l_t$ 就是模型误差.

数学模型一旦确定, 模型中包含有一些物理量 (变量), 这些物理量大多都是由观测、测量得到的. 即数值问题的原始数据一般是通过大量的实验和观测得到的, 这些数据往往与原问题的实际的精确值有误差. 而数学模型求解时总要利用一些观测数据, 所以不考虑模型误差时, 由于测量仪器精度的限制以及人工干预等多方面的原因, 模型中代入的数据是有误差的, 因此在求解过程中误差是不可避免的, 这种误差称之为“*测量误差*”或“*观测误差*”.

用数值计算方法来求数学模型的数值解时, 有时只能用有限次的运算来得到数值解. 如求一个无穷级数

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{1.7}$$

之和时总是用它前面的若干项的和来近似代替无穷级数之和, 即截去该级数的后一段. 而根据计算方法的理论, 迭代公式是需要无限次地循环下去, 所以用级数的前面若干项的和来近似原级数时必然产生误差, 由此引入的误差称为“*截断误差*”, 截断误差也称为*方法误差*.

例如对某一函数 $f(x)$ 用它的泰勒多项式 $p_n(x)$ 来近似代替函数 $f(x)$ 时, 其产生

的截断误差为

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{1.8}$$

其中,

$$p_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{1.9}$$

对 $\frac{1}{3},\frac{1}{7}$ 等有理数或 $\pi,\mathrm{e},\sqrt{2}$ 等无理数, 在计算机上做运算时, 因受有效位数的限制, 计算过程中可能利用四舍五入的规则来解决或处理超出有效位数的数字, 这就有可能产生误差, 这样的误差称之为"舍入误差".

例 3 对 π 取近似值 $\pi^*=3.14$, 则 $\pi-\pi^*=0.0015926\cdots$ 就是舍入误差, 对 $\frac{1}{3}$ 取近似值 0.333, 则 $\frac{1}{3}-0.333=0.000333\cdots$ 就是舍入误差.

在数值计算方法中主要讨论方法误差和舍入误差.

1.3.2 误差

设准确值 x 的近似值为 x^*, 则由近似值 x^* 所产生的*误差*e^* 定义为

$$\mathrm{e}^*=x^*-x \tag{1.10}$$

由式 (1.10) 定义的 e^* 也称为*绝对误差*. 若 $\mathrm{e}^*\geqslant 0$, 则称 x^* 为*强近似*, 若 $\mathrm{e}^*\leqslant 0$, 则称 x^* 为*弱近似*. 在实际应用中一般无法得到准确值 x, 故误差 e^* 的大小不能直接估计, 但若能计算出 (给出) 误差绝对值的一个上限 ε^*, 即有

$$|x^*-x|\leqslant\varepsilon^*$$

则称 ε^* 为近似值 x^* 的*误差限*, 此时可以记为

$$x=x^*\pm\varepsilon^* \tag{1.11}$$

例 4 有一位顾客在超市用一台以 g(克) 为计量单位的电子秤对自己购买的货物进行了核实, 其读出的重量为 $x^*=4500\mathrm{g}$, 电子秤本身的误差不超过 10g, 则有

$$|x^*-x|=|4500-x|\leqslant 10\mathrm{g}$$

因此得 $4490\leqslant x\leqslant 4510$ 或 $x=4500\pm 10$.

1.3.3 相对误差

误差限的大小并不能完全反映近似值的准确程度. 例如取

$$x = 10 \pm 1, \quad y = 1000 \pm 5,$$

则 $x^*=10$, $\varepsilon_x^* = 1$, $y^* = 1000$, $\varepsilon_y^* = 5$, 并有 $\varepsilon_y^* = 5\varepsilon_x^*$, 但是

$$\frac{\varepsilon_y^*}{y^*} = \frac{5}{1000} = 0.5\%, \quad \frac{\varepsilon_x^*}{x^*} = \frac{1}{10} = 10\%.$$

可以看出, y^* 对于 y 的近似程度远好于 x^* 对于 x 的近似程度. 所以经常用**相对误差**

$$\mathrm{e}_\mathrm{r}^* = \frac{\mathrm{e}^*}{x} = \frac{x^* - x}{x} \tag{1.12}$$

来刻画近似值的好坏情况, 在实际应用中由于 x 在多数情况下是不知道的, 因此 e_r^* 的大小不能估计, 但若能计算出 (给出) 相对误差绝对值的一个上限 ε_r^*, 即若有

$$|\mathrm{e}_\mathrm{r}^*| \leqslant \varepsilon_\mathrm{r}^*$$

则称 ε_r^* 为近似值 x^* 的**相对误差限**, 此时相对误差 e_r^* 的大小就可以估计. 在实际计算中可用表达式

$$\mathrm{e}_\mathrm{r}^* \approx \frac{x^* - x}{x^*} \tag{1.13}$$

来代替式 (1.12). 即当近似值 x^* 的**误差限**ε^* 给定后, 若 $\dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|}$ 较小, 则可用 $\mathrm{e}_\mathrm{r}^* \approx \dfrac{x^* - x}{x^*}$ 作为 x^* 的相对误差, 此时可取 $\varepsilon_\mathrm{r}^* = \dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|}$. 这是因为

$$\left|\frac{\mathrm{e}^*}{x} - \frac{\mathrm{e}^*}{x^*}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^*(x^* - x)}{xx^*}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{*2}}{xx^*}\right| = \left|\frac{\left(\dfrac{\mathrm{e}^*}{x^*}\right)^2}{1 - \dfrac{\mathrm{e}^*}{x^*}}\right| \leqslant \frac{\left(\dfrac{\varepsilon^*}{x^*}\right)^2}{\left|1 - \dfrac{\mathrm{e}^*}{x^*}\right|}$$

所以 $\dfrac{\mathrm{e}^*}{x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{e}^*}{x^*}$ 的误差是 $\dfrac{\varepsilon^*}{x^*}$ 的高阶无穷小量.

1.3.4 有效数字

定义 1 如果 x 的近似值 x^* 的误差不超过 x^* 某一位的半个单位, 而该位到 x^* 的第一位非零数字 (即自左向右看最左边的第一个非零数字) 共有 n 位, 就说 x^* 有n **位有效数字或者说** x^***准确到该位**.

定义 2 如果用 x^* 表示 x 的近似值, 并将 x^* 表示成

$$x^* = \pm 0.a_1a_2\cdots a_m \times 10^p(a_1 \neq 0, p\text{是整数}) \tag{1.14}$$

若有

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{p-n} \quad (m \geqslant n) \tag{1.15}$$

则近似值 x^* 具有n 位有效数字.

用四舍五入法取准确值 x 的前 n 位作为近似值 x^*, 则 x^* 有 n 位有效数字, 即一个四舍五入得到的近似值

$$x^* = \pm 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^p(a_1 \neq 0, p\text{是整数}) \tag{1.16}$$

一定满足 $|x^* - x| \leqslant \dfrac{1}{2} \times 10^p \times 10^{-n} = \dfrac{1}{2} \times 10^{p-n}$. (1.17)

例 5 对 $\pi = 3.1415926\cdots$ 取近似值 $\pi^* = 3.14$, 则其误差满足

$$|\pi - \pi^*| = 0.0015926\cdots < \frac{1}{2} \times 0.01 = 0.005.$$

所以近似值 $\pi^* = 3.14$ 有 3 位有效数字. 因 $\pi^* = 3.14 = 0.314 \times 10^1$, 也看出其误差满足

$$|\pi - \pi^*| = 0.0015926\cdots \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{1-3} = 0.005,$$

即满足式 (1.17), 所以近似值 $\pi^* = 3.14$ 具有 3 位有效数字. 再取近似值 $\pi^* = 3.141$, 则其误差是

$$|\pi - \pi^*| = 0.0005926\cdots > \frac{1}{2} \times 0.001 = 0.0005$$

因此近似值 $\pi^* = 3.141$ 不能有 4 位有效数字, 而只有 3 位有效数字. 若取近似值 $\pi^* = 3.1416$, 那么近似值 $\pi^* = 3.1416$ 有几位有效数字? 请读者考虑.

引入有效数字概念后需要明确的是: 两个近似值 50.8 与 50.800 是不同的, 前者只有 3 位有效数字, 而后者有 5 位有效数字.

1.4 误差的估计

在实际问题的数值计算中, 误差的产生与传播情况是比较复杂的, 误差的产生、传播及大小都可能取决于具体的数值计算的方法. 因此对于不同的计算方法将需要提出不同的误差估计方法. 这里只介绍误差估计的几个常用的方法.

定理 1 设形如式 (1.14) 的近似值 x^* 具有 n 位有效数字, 则其相对误差满足

$$|\mathrm{e}_\mathrm{r}^*| \approx \left|\frac{x^*-x}{x^*}\right| \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)} \tag{1.18}$$

证明 对形如式 (1.14) 的近似值 x^* 有

$$a_1 \times 10^{p-1} \leqslant |x^*| \leqslant (1+a_1) \times 10^{p-1} \tag{1.19}$$

因形如式 (1.14) 的近似值 x^* 具有 n 位有效数字, 故满足

$$|x^*-x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{p-n}$$

所以由以上两式得

$$|\mathrm{e}_\mathrm{r}^*| \approx \left|\frac{x^*-x}{x^*}\right| \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{p-n}}{a_1 \times 10^{p-1}} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

因此式 (1.18) 成立.

定理 2 设有形如式 (1.14) 的近似值 x^*, 若其相对误差限满足

$$\varepsilon_\mathrm{r}^* \leqslant \frac{1}{2(1+a_1)} \times 10^{-(n-1)} \tag{1.20}$$

则 x^* 至少具有 n 位有效数字.

证明 对形如式 (1.14) 的近似值 x^*, 由式 (1.19)、式 (1.20) 有

$$|x^*-x| = |x^*|\,\frac{|x^*-x|}{|x^*|} \leqslant |x^*|\,\varepsilon_\mathrm{r}^* \leqslant (1+a_1) \times 10^{p-1}\frac{1}{2(1+a_1)} \times 10^{-(n-1)} = \frac{1}{2} \times 10^{p-n}$$

所以形如式 (1.14) 的近似值 x^* 至少具有 n 位有效数字.

例 6 对 $\pi = 3.1415926\cdots$ 用四舍五入法取近似值 $\pi^* = 3.142$, 求其相对误差限.

解 因近似值 $\pi^* = 3.142$ 是用四舍五入法得到的, 故有 4 位有效数字, 因此由定理 1 得其相对误差满足

$$|\mathrm{e}_\mathrm{r}^*| \approx \left|\frac{\pi^*-\pi}{\pi^*}\right| \leqslant \frac{1}{2 \times 3} \times 10^{-(4-1)} = \frac{1}{6} \times 10^{-3}$$

所以 $\pi^* = 3.142$ 的相对误差限可取为 $\frac{1}{6} \times 10^{-3}$.

在数学建模中人们经常关心的是由于某些数据引入近似值而对模型整个结果的影响. 对于这个问题, 如果运算过程比较简单, 则可以从理论上对此误差的传播过程近似解决. 例如, 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的近似值为 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$, 要计算多元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 那么近似值为 $f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$(用多元函数泰勒展开式的第一项来近似), 则产生的误差可由多元函数的泰勒展开得 (用多元函数泰勒展开式的线性部分来近似)

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^*(f)&=f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*(x_k^*-x_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\mathrm{e}_k^*\end{aligned}\tag{1.21}$$

于是误差限 $\varepsilon(f^*)$ 与相对误差限 $\varepsilon_{\mathrm{r}}(f^*)$ 分别近似于

$$\varepsilon(f^*)\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\cdot|\mathrm{e}_k^*|$$

$$\varepsilon_{\mathrm{r}}(f^*)\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\cdot\left|\frac{\mathrm{e}_k^*}{f^*}\right|$$

特别地有

$$\varepsilon(x_1^*\pm x_2^*)\approx\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(x_1^*\cdot x_2^*)\approx|x_1^*|\,\varepsilon(x_2^*)+|x_2^*|\,\varepsilon(x_1^*)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)\approx\frac{|x_1^*|\,\varepsilon(x_2^*)+|x_2^*|\,\varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2}$$

设 x^* 为 x 的近似值, 记 $\Delta x=x^*-x$, 则当 x^* 充分近似 x 时有

$$\mathrm{e}_{\mathrm{r}}^*=\frac{\mathrm{e}^*}{x}=\frac{x^*-x}{x}=\frac{\Delta x}{x}=\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}\ln x\tag{1.22}$$

例 7 设 $y=x^5$, 求 y 的相对误差与 x 的相对误差的关系.

解 因 $\mathrm{e}_{\mathrm{r}}^*(y)=\mathrm{d}\ln y=\mathrm{d}\ln x^5=5\mathrm{d}\ln x=5\mathrm{e}_{\mathrm{r}}^*(x)$, 所以 y 的相对误差是 x 的相对误差的 5 倍.

同理可得 $\sqrt{x}$ 的相对误差是 x 的相对误差的一半.

1.5 在近似计算中需要注意的若干问题

如果模型中需作大量的复杂运算, 从理论上对误差的传播作出定性分析, 对模型