复变函数与积分变换

FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

主　编　李江涛
参　编　王晓宏　杨木洪　张　谋

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

复变函数与积分变换

主　编　李江涛
参　编　王晓宏　杨木洪　张　谋

重庆大学出版社

内容提要

本书是大学工科复变函数与积分变换基础课教材，全书共8章，内容包括：复数与复变函数，解析函数，复变函数的积分，解析函数的级数展开及其应用，留数及其应用，共形映射，傅里叶变换，拉普拉斯变换等. 各章配有适量的习题，并附有答案。

本书可作为高等学校工科各专业本科生工程数学课教材，也可作为科技工作者和工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/李江涛主编. —重庆：重庆大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5624-6202-6

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材　Ⅳ.①0174.5②0177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第108022号

复变函数与积分变换

主　编　李江涛

参　编　王晓宏　杨木洪　张　谋

责任编辑：曾令维　杨粮菊　版式设计：杨粮菊

责任校对：夏　宇　责任印制：赵　晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：邓晓益

社址：重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编：400030

电话：(023)65102378　65105781

传真：(023)65103686　65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

自贡新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：12　字数：300千

2011年8月第1版　2011年8月第1次印刷

印数：1—3 000

ISBN 978-7-5624-6202-6　定价：23.00元

前言

复变函数与积分变换是高等理工科院校学生继微积分之后的又一门重要的数学基础课，其理论与方法在力学、自动控制、通信工程、机械设计与制造等自然科学和工程技术中有广泛的应用，它是高等理工科院校学生学习有关专业课程的理论基础和重要工具. 本书曾作为校内讲义在重庆大学各专业试用多年，在广泛听取任课教师意见的基础上编写了这本教材，力图符合新时期大学数学课程体系和内容的改革要求，以达到培养学生数学素质的目的. 该教材可供高等理工科院校各专业学生使用，也作为工程技术人员的参考书.

本书由李江涛主编，参加编写的人员为王晓宏（第1章、第2章），李江涛（第3章、第4章），杨木洪（第5章、第6章），张谋（第7章、第8章），最后由李江涛统稿. 本书编写过程中得到了重庆大学数学与统计学院顾永兴教授的鼓励、关心与指导，他仔细审阅了初稿，并提出了宝贵的修改意见；重庆大学段曦盛老师帮助校对书稿；长江师范学院李强老师帮助绘制了部分插图.

本书的出版还得到重庆大学教务处、数学与统计学院的领导和同仁的大力支持和帮助，在此深表感谢.

由于我们才疏识浅，不妥之处在所难免，恳请读者对此书提出宝贵意见和建议.

编　者

2011年4月

请按此裁下寄回我社或在网上下载此表格填好后E-mail发回

教师信息反馈表

为了更好地为教师服务，提高教学质量，我社将为您的教学提供电子和网络支持。请您填好以下表格并经系主任签字盖章后寄回，我社将免费向您提供相关的电子教案、网络交流平台或网络化课程资源。

<table>
<tr><td>书名：</td><td colspan="3"></td><td>版次</td><td></td></tr>
<tr><td>书号：</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>所需要的教学资料：</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>您的姓名：</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>您所在的校(院)、系：</td><td colspan="5">校(院)　　　　　　系</td></tr>
<tr><td>您所讲授的课程名称：</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>学生人数：</td><td colspan="2">______人　______年级</td><td>学时：</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>您的联系地址：</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">邮政编码：</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">联系电话</td><td colspan="3">(家)</td></tr>
<tr><td colspan="3">(手机)</td></tr>
<tr><td>E-mail：(必填)</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="3">您对本书的建议：</td><td colspan="3">系主任签字

盖章</td></tr>
</table>

请寄：重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)
重庆大学出版社教材推广部

邮编：400030
电话：023-65112084　023-65112085
传真：023-65103686
网址：http://www.cqup.com.cn
E-mail：fxk@cqup.com.cn

目录

第 1 章 复数与复变函数

在一些理论和实际问题中，有许多几何量与物理量，如果用复数作为变量去刻画，则在研究过程中比较方便，在 18 世纪，数学家 J. D' Alembert 与 L. Euler 等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义，并应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题. 直到这时，人们才接受了复数，复变函数理论得以顺利建立和发展.

在本章中，首先介绍复数的有关知识，然后再引入复平面点集、复变函数以及复变函数的极限与连续等概念.

1.1 复　数

1.1.1 复数域

形如

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{1.1}$$

的数称为**复数**，其中 x 和 y 是任意的实数，分别称为复数 z 的**实部**与**虚部**，记作 $x = \mathrm{Re}\, z, y = \mathrm{Im}\, z$；而 i（也可记为$\sqrt{-1}$）称为**纯虚数单位**.

当 $\mathrm{Im}\, z = 0$ 时，$z = \mathrm{Re}\, z$ 可视为实数；而当 $\mathrm{Re}\, z = 0, \mathrm{Im}\, z \neq 0$ 时，z 称为**纯虚数**；特别地，当 $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z = 0$ 时，记 $z = 0 + \mathrm{i}0 = 0$.

两个复数 z_1, z_2 满足 $\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2, \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$ 时，称这两个复数相等，记为 $z_1 = z_2$.

对任意两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，其四则运算定义如下：

①$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$；

②$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$；

③$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\dfrac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, x_2 + \mathrm{i}y_2 \neq 0.$

容易验证加法与乘法满足

①交换律：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$；

②结合律：$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$；

③分配律：$(z_1 \pm z_2)z_3 = z_1z_3 \pm z_2z_3$.

全体复数构成的集合在引进上述加法和乘法运算后称为**复数域**，用符号 $\mathbb{C}$ 表示. 与实数域不同的是，复数域里的数没有大小之分，但可以证明在实数域内成立的一切代数恒等式在复数域内仍成立，例如：

$$z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2),(z_1 \pm z_2)^2 = z_1^2 \pm 2z_1z_2 + z_2^2$$

等.

1.1.2 复平面、复数的模与辐角

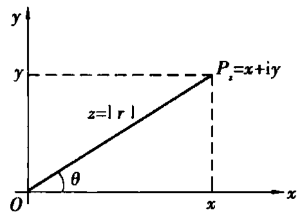

图 1.1

由于一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可以由有序实数对 (x,y) 唯一确定，而有序实数对 (x,y) 与平面直角坐标系 xOy 中的点一一对应，因此可以用坐标为 (x,y) 的点 P 来表示复数 $z = x + \mathrm{i}y$（图 1.1），此时 x 轴上的点与实数对应，称 x 轴为**实轴**，y 轴上的点（除原点外）与纯虚数对应，称 y 轴为**虚轴**. 像这样表示复数的平面称为**复平面**，或按照表示复数的字母是 $z,w,\cdots$，而称为 **z 平面**、**w 平面**，等等.

如图 1.1 所示，复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 还可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，x 与 y 分别是向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴与 y 轴上的投影. 这样，复数 z 就与平面上的向量 $\overrightarrow{OP}$ 建立了一一对应的关系.

引进了复平面后，为方便起见，"复数 z"、"点 z"及"向量 $\overrightarrow{OP}$"三者不再区分.

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的**模**或**绝对值**，记作 $|z|$，于是

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

显然 $|z| = 0$ 的充要条件是 $z = 0$.

当点 P 不是原点，即复数 $z \neq 0$ 时，向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向的夹角称为复数 z 的**辐角**，记作 $\mathrm{Arg}\, z$. 辐角的符号规定为：由正实轴依反时针方向转到 $\overrightarrow{OP}$ 为正，依顺时针方向转到 $\overrightarrow{OP}$ 为负. 显然一个非零复数 z 的辐角有无穷多个值，它们相差 2π 的整数倍，但 $\mathrm{Arg}\, z$ 中只有一个值 θ_0 满足条件 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$，称 θ_0 为复数 z 的**主辐角**，记为 $\theta_0 = \arg z$（以后也把 $\mathrm{Arg}\, z$ 中任一确定的值记为 $\arg z$），于是

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2n\pi (n \in \mathbb{Z})$$

当 $z = 0$ 时，z 的辐角没有意义.

由图 1.1 易知：复数 $z = x + \mathrm{i}y (\neq 0)$ 的主辐角 $\arg z$ 与反正切的主值 $\arctan \dfrac{y}{x}$ 有以下关系：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } x > 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0, \text{且 } y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0, \text{且 } y < 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{当 } x < 0, \text{且 } y \geqslant 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{当 } x < 0, \text{且 } y < 0; \end{cases}$$

由直角坐标与极坐标的关系可知(图 1.1),非零有穷复数 z 可以用其模 $r=|z|$ 与辐角 θ 来表示,即

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.2}$$

利用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \tag{1.3}$$

得

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.4}$$

由式(1.3)及复数的运算容易证明

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

分别称式(1.2)和式(1.4)为非零复数 z 的**三角表示式**和**指数表示式**,相应地称为式(1.1)复数 z 的**代数表示式**. 复数 z 的这三种表示式可以互相转化,以方便讨论不同问题时的需要.

例 1.1　将 $z=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ 化为三角表示式和指数表示式.

解　$|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$,因为 z 在第 I 象限,所以

$$\arg z = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

故 z 的三角表示式为 $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;$z$ 的指数表示式为 $z=2\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$.

例 1.2　试将 $z=1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,(-\pi<\theta\leqslant\pi)$ 化为三角表示式.

解　由已知可得

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} \\ &= 2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\arg z = \arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$$

故 z 的三角表示式为

$$z = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

利用复数 z 的代数表示式容易理解复数加法与减法运算的几何意义,设复数 z_1,z_2 对应的向量分别为 $\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2}$,由复数的运算法则知复数的加减法与向量的加减法一致,于是在平面上以 $\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2}$ 为邻边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{OP}$ 就表示复数 z_1+z_2(图 1.2),对角线 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 就表示复数 z_1-z_2.

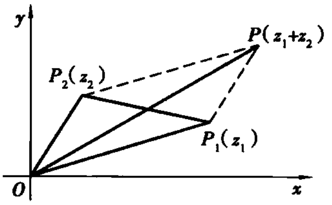

图 1.2

由上述几何解释知下面两个不等式成立:

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\ |z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|,$$

其中 $|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 表示向量 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 的长度,也就是复平面上点 z_1,z_2 之间的距离.

利用复数 z 的指数表示式作复数乘法与除法运算很方便.

假设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$, $z_2=r_2e^{i\theta_2}$,则由式(1.5)可得

$$z_1z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\qquad(r_2\neq 0)$$

于是

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,\ \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2 \tag{1.6}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2 \tag{1.7}$$

由此可知:

①两个复数乘积的模等于它们各自模的乘积,两个复数乘积的辐角等于它们各自辐角的和;

②两个复数商的模等于它们各自模的商,两个复数商的辐角等于分子辐角与分母辐角的差.

值得注意的是,由于 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$, $\mathrm{Arg}\,z_1$ 与 $\mathrm{Arg}\,z_2$ 都是多值的,因此,式(1.6)和式(1.7)中关于辐角的等式两边都为无穷多个数(角度)组成的数集,它们相等意味着,对于等式左边集合的任意一个数值,等式右边集合中必有一个值与之相等,反之亦然. 例如取 $z_1=i$, $z_2=\frac{i}{2}$,则

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\pi+2k\pi(k\in\mathbb{Z}),\ \mathrm{Arg}\,z_1=\frac{\pi}{2}+2m\pi(m\in\mathbb{Z}),\ \mathrm{Arg}\,z_2=\frac{\pi}{2}+2n\pi(n\in\mathbb{Z})$$

此时 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2$ 成立的充分必要条件为 $k=m+n$,即对每一个 k 都可分别选取一个 m 和 n 使得 $k=m+n$,反之亦然.

由式(1.6)即得复数乘法的几何意义,乘积 z_1z_2 对应的向量是把 z_1 对应的向量旋转一个角度 $\theta_2=\arg z_2$ 后再将其模伸缩 $|z_2|$ 倍而得到的(图1.3). 特别地,当 $|z_2|=1$ 时,只需把 z_1 对应的向量旋转一个角度 $\theta_2=\arg z_2$ 即得到 z_1z_2. 例如 $z\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$,就可由表示 z 的向量逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 而得到.

例 1.3 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1+2i$, $z_2=\frac{3}{2}+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$,求其第三个顶点.

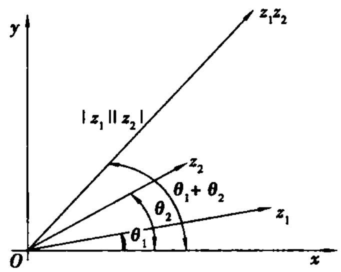

图 1.3

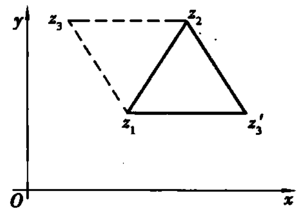

图 1.4

解 如图1.4将向量 z_2-z_1 绕 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}$ $\left(或 -\frac{\pi}{3}\right)$ 得另一个向量,其终点就是所求的第三个顶点 z_3(或 z_3'),根据复数乘法的几何意义可得

$$z_3 - z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_1)$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

所以

$$z_3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + z_1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)i$$

类似可得 $z_3' = e^{-\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_1) + z_1 + 2 + 2i$

1.1.3　复数的乘幂与方根

n 个相同非零有穷复数 z 的乘积称为复数 z 的 n **次幂**,记作

$$z^n = \overbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}^{n个}$$

若 $z = re^{i\theta}$,则

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)(n \in \mathbb{N}).$$

特别地,当 $r = 1$ 时,即 $z = \cos\theta + i\sin\theta$,则得 De Moivre 公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

如果复数 w 和 z 满足

$$w^n = z(n 为大于 1 的正整数) \tag{1.8}$$

则称复数 w 为 z 的 n **次方根**,记作 $\sqrt[n]{z}$,即 $w = \sqrt[n]{z}$.

下面求 $w = \sqrt[n]{z}$ 的表达式.

令 $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$,则由式(1.8),得

$$\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta},$$

于是有

$$\rho^n = r, n\varphi = \theta + 2k\pi,$$

从而

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}(k \in \mathbb{Z}),$$

故 z 的 n 次方根为

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}(k = 0,1,2,\cdots,n-1) \tag{1.9}$$

从式(1.9)可以看出,只有当 k 取 $0,1,2,\cdots,n-1$ 时,所得 w 之值是不同的,而 k 取其他整数时所得 w 之值将与上述 n 个值之一重合. 因此,一个非零有穷复数 z 的 n 次方根仅有 n 个不同的值,在几何上表现为以原点为中心、以 $\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 1.4　求 $z = 1$ 的 n 次方根.

解　因为

$$1 = \cos 0 + i\sin 0$$

所以

$$\sqrt[n]{1} = e^{\frac{2k\pi}{n}i} = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

特别地,1 的立方根为

$$w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

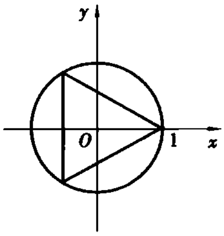

图 1.5

$$w_1=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

它们均匀地分布在以原点为中心,以 1 为半径的圆周上(图 1.5).

例 1.5 设 n 为自然数,证明等式

$$\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

证明 令 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$,则

$$\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}=\frac{1+\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}{1+\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}-2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$$

故由 De Moivre 公式得

$$\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

1.1.4 共轭复数

设复数 $z=x+\mathrm{i}y$,称复数 $x-\mathrm{i}y$ 为 z 的**共轭复数**,记为 $\bar{z}$. 显然 z 和 $\bar{z}$ 是关于实轴对称的(图 1.6).

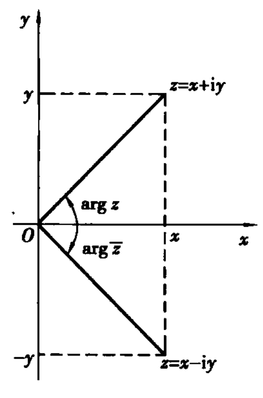

图 1.6

由定义,容易验证下列关系成立:

①$|\bar{z}|=|z|$, $\arg z=-\arg\bar{z}$, $\bar{\bar{z}}=z$;

②$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

③$z\cdot\bar{z}=|z|^2$;

④$z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$, $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\operatorname{Im}z$.

例 1.6 设 $z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,试求 $\operatorname{Re}z$, $\operatorname{Im}z$ 和 $z\bar{z}$.

解 因为

$$z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}-\frac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

所以

$$\operatorname{Re}z=\frac{3}{2},\operatorname{Im}z=-\frac{1}{2},z\bar{z}=|z|^2=\frac{5}{2}.$$

例 1.7 求证:若 $|a|=1$,则对 $\forall b\in\mathbb{C}\setminus\{a\}$,有 $\frac{a-b}{1-\bar{a}b}=a$.

证　由 $a\bar{a}=|a|^2=1$,得

$$\frac{a-b}{1-\bar{a}b}=\frac{a-b}{a\bar{a}-\bar{a}b}=\frac{1}{\bar{a}}=\frac{a}{a\bar{a}}=a$$

例 1.8　设复数 z_1,z_2,z_3 满足条件

①$z_1+z_1+z_3=0$;②$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.

求证 z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点.

证　由条件②,可知 z_1,z_2,z_3 位于 $|z|=1$ 上;又由条件①,可知 $z_1=-z_2-z_3$,则

$$z_1\overline{z_1}=(-z_2-z_3)\overline{(-z_2-z_3)}=z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}$$

即
$$|z_1|^2=|z_2|^2+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}+|z_3|^2$$

再结合条件②得
$$z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}=-1$$

故
$$|z_2-z_3|^2=(z_2-z_3)\overline{(z_2-z_3)}=z_2\overline{z_2}-z_2\overline{z_3}-z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}=3$$

即 $|z_2-z_3|=\sqrt{3}$,同理可得 $|z_1-z_3|=\sqrt{3}$, $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$,因此,z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形的 3 个顶点.

下面举例简单说明复数的应用,具体讨论两个问题:①如何用含复数的方程来表示平面曲线;②怎样从复数形式的方程来确定该方程所表示的平面曲线.

若平面曲线 Γ 的实方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,则 Γ 的复方程可表示为 $z=z(t)=x(t)+y(t)\mathrm{i}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$.

例 1.9　(1)因连接 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 两点的实方程为

$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1)\\y=y_1+t(y_2-y_1)\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

故该线段的复数方程为

$$z=x_1+t(x_2-x_1)+\mathrm{i}[y_1+t(y_2-y_1)]=z_1+(z_2-z_1)t\qquad(0\leqslant t\leqslant 1);$$

同理过 z_1 与 z_2 两点的直线的复数方程为

$$z=z_1+(z_2-z_1)t\qquad(-\infty<t<+\infty)$$

于是有

三点 $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ 共线的充分必要条件为 $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(2)因 z 平面上以点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 为心、r 为半径的圆周的实方程为

$$\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta\\y=y_0+r\sin\theta\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

故该圆的复数方程为

$$z=x_0+r\cos\theta+\mathrm{i}(y_0+r\sin\theta)=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

若平面曲线 Γ 的实方程为 $F(x,y)=0$,则 Γ 的复方程可用 $f(z)=0$ 表示.

例 1.10　(1)z 平面上以点 z_0 为心、r 为半径的圆周的复方程为 $|z-z_0|=r$.

(2)平面直角坐标下直线 $ax+by=c(a,b,c\in\mathbb{R}$,且 $ab\neq 0)$ 方程的复数方程为

$$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}=\beta,\text{其中 }\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\beta\in\mathbb{R}.$$

事实上,设 $z=x+\mathrm{i}y$,则由共轭复数的定义得

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

将它们代入所给的直线方程 $ax+bx=c$,有

$$a \cdot \frac{z+\bar{z}}{2} + b \cdot \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}} = c$$

化简得

$$(a-\mathrm{i}b)z + (a+\mathrm{i}b)\bar{z} = 2c$$

记 $\alpha = a+\mathrm{i}b, \beta = 2c$,便得结论.

(3)方程 $|z-\mathrm{i}| = |z+2\mathrm{i}|$ 表示到点 i 和 $-2\mathrm{i}$ 的距离相等的点 z 的轨迹,即连接复数 i 和 $-2\mathrm{i}$的线段的垂直平分线.

(4) 方程 $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2$ 表示一个圆周.(请读者自己讨论)

1.1.5 无穷远点与扩充复平面

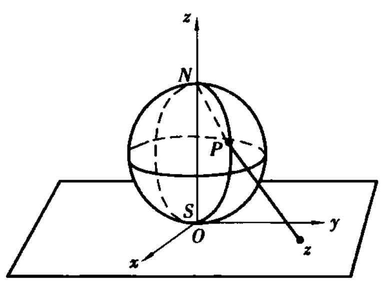

图 1.7

复数还有一种表示方法,这种方法是将球面上的点与复平面上的点一一对应起来,从中可直观地引入无穷远点的概念.

取一个与$\mathbb{C}$相切于坐标原点 O 的球面 S. 过 O 作与复平面相垂直的直线,该直线与球面 S 交于另一点 N,O 和 N 分别称为球面的**南极**和**北极**(图 1.7).

在复平面上任取一点 z,则连接 z 和 N 的直线必交于球面上唯一的异于 N 的点 P;反之,若 P 为球面上任意一个异于 N 的点,则连接 NP 的直线必交复平面上唯一的一点 z. 这样就建立起球面上除去北极 N 外的点 P 与复平面上点 z 之间的一一对应关系,我们称 P 为 z 在球面上的球极射影,如果 z 的模愈大,则它的球极射影就愈靠近北极 N,因此,北极 N 可以看作复平面上一个模为无穷大的理想点的对应点,这个理想点称为无穷远点,并记为∞,复平面上加上点∞后就称为**扩充复平面**,通常记为$\overline{\mathbb{C}}$,即$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. 与之对应的是整个球面,称为**复球面**,换言之,扩充复平面的一个几何模型就是复球面.

最后需要指出的是,扩充复平面$\overline{\mathbb{C}}$上只有一个无穷远点∞,它是一个确定的复数,对∞来说,其实部、虚部与辐角均无意义,仅规定其模$|\infty| = +\infty$. 关于∞我们规定其运算如下:

①若 a 为有限复数,则

$$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty; a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty\ (a \neq 0); \frac{a}{\infty} = 0; \frac{a}{0} = \infty\ (a \neq 0).$$

②$\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$均无意义.

在本书中,今后若无特别声明,所涉及的复数都是指有穷复数.