新世纪高等学校教材

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

数学与应用数学基础课系列教材

SHUXUE FENXI

(第3版)

数学分析

(第2册)

北京师范大学数学科学学院 主 编

郑学安 邝荣雨 刘继志 等 编 著

$$d\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=f(x)\,dx$$

北京师范大学出版集团

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

（第3版）

数学分析

（第2册）

SHUXUE FENXI

北京师范大学数学科学学院 主编

郑学安 邝荣雨 刘继志 等 编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学分析.第2册/郑学安，邝荣雨，刘继志等编著.－3版.
—北京：北京师范大学出版社，2010.12
新世纪高等学校教材
ISBN 978-7-303-11365-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①郑…②邝…③刘… Ⅲ.①数学分析－高等学校－教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第150024号

营销中心电话　010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京中印联印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：18.75
字　　数：317千字
版　　次：2010年12月第3版
印　　次：2010年12月第1次印刷
定　　价：28.00元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　张美娟
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

第3版前言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系。2004 年成立北京师范大学数学科学学院。经过 95 年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验。将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的。

作为国家重点大学，培养人才和编写教材是两项非常重要的工作。教材的编写是学院的基本建设之一。学院要抓好教材建设；教师要研究教学方法。在教材方面，学院推出一批自己的高水平教材，做到各科都有，约 60 部。

写教材要慢一点，质量要好一点，教材修订连续化，教材出版系列化，是编写教材要注意的几项基本原则。学院希望教材要不断地继续修改和完善，对已经出版两版的教材，我们准备继续再版。在 2005 年 5 月，经由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行协商，由北京师范大学数学科学学院主编（李仲来教授负责），准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的第 2 版数学教材进行修订后出版第 3 版。

教材的建设是长期的、艰苦的任务，每一位教师在教学中要自主地开发教学资源，创造性地编写和使用教材。学院建议：在安排教学时，应考虑同一教师在 3～5 年里能够稳定地上同一门课，并参与到教材的编写或修订工作中去。在学院从事教学的大多数教师，应该在一生的教学生涯中至少以自己为主，编写或修订一种教材作为己任，并注意适时地修订或更新教材。我们还希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善。

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授（数学专业）和在职中学教师等使用和参考。（李仲来执笔）

北京师范大学数学科学学院

2010-03-16

第3版作者的话

这次修订有以下几个创见.

第一,首次定义了赋范极限,它与一元函数极限有相同的性质,它又将各种函数极限的定义,定积分、重积分、曲线积分与曲面积分的定义,曲线弧长与曲面面积的定义,统一为一个定义,这使得学生更容易掌握定积分等较复杂的概念.第二,重新叙述了极限的直观定义,给出了从极限直观定义到极限的数学定义间的直接转化过程,使得学生更容易接受、理解和运用极限的定义.第三,强调了无穷小量理论在极限理论中的核心地位,特别是给出了 Cauchy 准则与一致连续的简洁的、便于理解或运用的无穷小量等价定义.第四,首次提出了微分多中值定理与局部单射定理,使得多元微分学有了基本完整的定理体系,使得学生更容易掌握多元微积分中几个重大定理的证明.第五,首次用函数语言给出了曲线、曲面、高维曲面的准确而严格的定义.第六,给出了曲面面积的严格定义,结束了长期以来曲面面积无严格的数学定义的现状.第七,用张量给出了多元泰勒公式简明易懂的表达式,由于张量是一类十分简单的多元函数,学生很容易初步掌握它.第八,首次完整地叙述了康托的集合定义,用这个康托的集合定义,很容易指出罗素悖论和其他集合论悖论的逻辑错误所在.

感谢北京师范大学数学科学学院领导对本书修订工作的支持.感谢北京师范大学出版社对本书修订与出版的支持.参加本次修订的人员有:郑学安、邝荣雨、刘继志.

北京师范大学数学科学学院

郑学安

2010-04-30

目　录

第 4 章　一元函数的极限理论

4.1　实数概论

17 至 18 世纪是微积分大发展的时期. 到了 19 世纪，由于本身逻辑基础不严密，以及前两个世纪沿袭下来的凭几何直觉和物理印象进行推证的方法的局限性，使得微积分的发展日益步履维艰. 虽然经过柯西(Cauchy)、魏尔斯特拉斯(Weierstrass)等人的艰苦努力，终于给微积分的基础——极限理论建立了一套严密的逻辑体系，但是问题并没有彻底解决，由于极限理论的基础——实数理论还没有严格建立起来，因而极限理论的一些重大问题也没有得到彻底解决，例如我们在第 1 册中多次使用的单调数列收敛原理、连续函数整体性质(介值性、有界性、最值性)以及连续函数的可积性等重要定理都无法予以严格证明.

实数，看起来很浅显，几乎人人都认识它，也会用它作四则运算. 但数学家偏偏要问：什么是实数？它有什么性质？这些问题从古希腊开始一直困惑了数学家 2 000 多年. 直到 19 世纪后半叶才由梅莱(Mèray)、戴德金(Dedekind)、康托尔(Cantor)等人给出了满意的回答.

人类认识的第一个数系是自然数系，由于实际生活与数学运算的需要，逐渐地扩充到整数系，再扩充到有理数系. 有理数系是一个比较完美的数系：它具有稠密性，即任何两个有理数之间必含有有理数；它对四则运算是封闭的，即任何有理数经过加、减、乘、除四则运算后仍是有理数；它的元素有顺序关系，因而可以比较大小，进行不等式运算. 有理数系的这些性质使得古希腊人认为每一个数均是有理数，并且设想把它们由小到大、连续无空隙地排列在一条无限长的直线上，即在全体有理数与直线上全体点之间建立一一对应关系，这种关系"形"与"数"自然和谐的连续性设想促使古希腊学者毕达哥拉斯(Pythagoras)喊出他的哲理名言"万物皆为数"(这里他所说的数指的是有理数)，但事实并非如此. 在公元前 500 年前后，毕氏学派门徒希伯斯(Hippasus)发现并证明了正五边形的边长与其对角线长是不可公度的，接着他又证明了正方形的边长与其对角线长也是不可公度的. 这就是说，单位边长正五边形和单位边长正方形的对角线长竟然不是数(有理数)！希伯斯的发现动摇了古希腊几何理论的基础，同时也第一次向人们提示了有理数系的缺陷，它告诉人们，有理数虽然密密麻麻排在数轴上，但并没有铺满整个数轴，它上面还存在很多不能用有理数填补的"孔隙". 我们应

当怎样扩充有理数系,使得这条带有“孔隙”的直线真正成为“连续”的直线呢?

柯西在他的名著《国立工科大学的分析教程》(1821)一书中曾试图用有理数列的极限来定义无理数,但这必须先承认无理数的存在,这就产生了一个逻辑的自身循环.如何克服这个恶性循环呢?戴德金分析了直线连续性的本质,是由于它上面任一点都能把直线划分为不重、不漏、不空的两部分;反过来,只要直线被划分成了这样两部分,它就必然有一个分界点.这就是说,直线上任一点与上述任一“分划”在本质上是一回事.戴德金抓住了这个本质,认为“这样的平凡之见,暴露了连续性的秘密”.他利用这种“分划”的方法,从有理数系出发构造出了实数系,建立了一整套严密的实数理论,奠定了微积分的坚实基础.

从自然数系出发,采用构造性的方法,逐步得到实数系的过程是冗繁的,我们将按照公理化的方法定义实数系,然后再定义它的一些重要子集.采用这种方法是考虑到实数的表达形式(如常用的十进位记数法)虽然很重要,但其特性与功用主要是通过它们之间的关系和性质表现出来,尤其是其中一些最基本的关系和性质完全刻画了实数的本质,它们的全体就组成了实数的公理系统.

4.1.1 实数域

实数公理系统包含三组公理.

第一组是刻画实数四则运算关系的公理,称为**域公理**.

设 R 是一个集合,在它的元素之间规定了两种分别称为加法“+”和乘法“·”的运算关系,使得对于 R 中任何两个元素 a,b,都有 $a+b\in R$, $a\cdot b\in R$,并且满足下面九条基本性质:

(1)(加法结合律) $a+(b+c)=(a+b)+c$;

(2)(加法交换律) $a+b=b+a$;

(3)(加法零元) $\exists 0\in R$,对 $\forall a\in R$,有 $0+a=a$;

(4)(加法负元) $\forall a\in R$,$\exists -a\in R$,使得 $a+(-a)=0$;

(5)(乘法结合律) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;

(6)(乘法交换律) $a\cdot b=b\cdot a$;

(7)(乘法单位元) $\exists 1\in R$,且 $1\neq 0$,对 $\forall a\in R$,有 $a\cdot 1=a$;

(8)(乘法逆元) $\forall a\in R$,且 $a\neq 0$,$\exists \dfrac{1}{a}\in R$,使得 $a\cdot\dfrac{1}{a}=1$;

(9)(加法与乘法的分配律) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

凡是具有加法和乘法两种运算且满足上述九条性质的集合称为**域**.

第二组是刻画实数顺序关系的公理,称为**序公理**.

设 R 是一个集合，在它的元素之间规定了一种顺序关系“$<$”，并且满足下面四条性质：

(1)（三歧性）　$\forall a,b \in R$，以下三种关系有且仅有一种成立：$a<b, a=b, b<a$；

(2)（传递性）　若 $a<b, b<c$，则 $a<c$；

(3) 若 $a<b$，则对 $\forall c \in R$，有 $a+c<b+c$；

(4) 若 $a<b$，则对 $\forall c \in R$ 且 $c>0$，有 $a \cdot c<b \cdot c$.

凡满足上面条件(1)及(2)的集合称为**有序集**.“$a<b$”又可写成“$b>a$”. 关系“$\leqslant$”表示“$<$”或“$=$”. 有了序公理，就可以定义 R 的非空子集的上界与下界.

第三组是刻画实数连续性的公理，称为**连续(完备)公理**. 通常取分划原理作为实数域的连续公理. 在本节的开始部分指出，戴德金用集合的观点分析了直线(实数域)连续性的本质. 用准确的数学语言描述这个本质，就得到了分划原理.

分划原理(Dedekind)　设 A,B 是 R 的非空子集且每个 $b \in B$ 均是 A 的上界，则存在 $c \in R$，使得 c 既是 A 的上界，又是 B 的下界.

反之，如果一个集合满足上述三组公理，这个集合就叫做**实数域**，记作 $\mathbf{R}$，其中元素叫做**实数**. 即**实数域是满足连续公理的有序域**. 我们熟知的有关实数四则运算与不等式运算的一切性质都可以由上述域公理与序公理推导出来. 为避免烦琐，仅举几例以说明之.

例 1　证明：方程 $a+x=b$ 在 $\mathbf{R}$ 中有唯一解 $x=b+(-a)$.

证明　首先证明 $x=b+(-a)$ 是 $a+x=b$ 的解. 事实上，利用加法结合律、加法交换律及零元存在性，有

$$\begin{aligned} a+x &= a+[b+(-a)] = a+[(-a)+b] \\ &= [a+(-a)]+b = 0+b = b. \end{aligned}$$

其次证明 $x=b+(-a)$ 是 $a+x=b$ 的唯一解. 事实上，在 $a+x=b$ 两端加 $-a$，得

$$(a+x)+(-a)=b+(-a).$$

而左端是

$$\begin{aligned} (a+x)+(-a) &= -a+(a+x) \\ &= (-a+a)+x = 0+x = x, \end{aligned}$$

所以 $x=b+(-a)$. 由序公理易证负元是唯一的，故 $x=b+(-a)$ 是唯一的.

式子 $b+(-a)$ 常记作 $b-a$，由此可定义减法，称 $b-a$ 为 b 与 a 的**差**. 同理可以证明当 $a \neq 0$ 时，方程 $a \cdot x=b$ 在 $\mathbf{R}$ 中有唯一解 $x=b \cdot \dfrac{1}{a}$，常把它记作 $x=$

$\dfrac{b}{a}$,由此可定义除法,当 $a \neq 0$ 时,称 $\dfrac{b}{a}$ 为 b 与 a 的**商**. 用类似的方法可以证明:$a \cdot 0 = 0; -(-a) = a; (-a) \cdot b = -(a \cdot b); -a = (-1) \cdot a$.

例 2 设 $a,b \in \mathbf{R}$,证明:

(1) $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$.

(2) $a \leqslant b, b \leqslant a \Rightarrow a = b$.

(3) $a > 0, b > 0$ 或 $a < 0, b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$.

证明 (1) 若 $a > 0 \Rightarrow 0 = -a + a > -a + 0 = -a$;若 $-a < 0 \Rightarrow 0 = -a + a < 0 + a = a$.

(2) 假若 $a \neq b$,由序公理的三歧性 $\Rightarrow a < b$ 或 $a > b$. 若 $a < b$,因 $b \leqslant a \Rightarrow a < a$,矛盾!同理,当 $a > b$ 时也推出矛盾,故 $a = b$.

(3) 利用序公理(4) 知,$a > 0, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$. 当 $a < 0, b < 0$ 时,有 $-a > 0, -b > 0 \Rightarrow a \cdot b = (-a) \cdot (-b) > 0$.

用类似的方法可以证明:$1 > 0$; $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$.

我们称大于零的实数为**正实数**,小于零的实数为**负实数**.

在实数域 $\mathbf{R}$ 中,还可引进绝对值概念,从而可引进两个实数 a 与 b 的**距离** $|a-b|$,并有著名的**三角形不等式**

$$|a-b| \leqslant |a-c| + |c-b|.$$

定义了距离的实数域常称为**实数空间**,仍记作 $\mathbf{R}$.

定义好了实数以后,接着就应该定义有理数、整数和自然数. 按照传统方法,我们先定义自然数. 通常说自然数就是 $1,2,3,\cdots$ 这种说法是含糊的,但它也隐含了归纳原理的本质属性. 下面我们严格地论述自然数定义及其重要性质.

设 $E \subset \mathbf{R}$,若对任何 $a \in E$,有 $a + 1 \in E$,则称 E 是**归纳集**.

易知实数域 $\mathbf{R}$ 与正实数集是归纳集,任意多个非空归纳集的交集也是归纳集. 由此可引进下面的定义.

包含数 1 的一切归纳集的交集以及数 0 的集合,叫做**自然数集**,记作 $\mathbf{N}$,其中的元素叫做**自然数**. 由此易得重要的自然数集的性质.

定理 1.1(数学归纳原理)

设 $E \subset \mathbf{N}$,有 $1 \in E$,若 $\forall n \in E$,有 $n+1 \in E$,则 $E = \mathbf{N}$.

通常所说的数学归纳法是这样陈述的:给定命题 $p(n)$,设

1° 当 $n = 1$ 时,命题 $p(1)$ 成立;

2° 若 $\forall n \in \mathbf{N}, p(n)$ 成立 $\Rightarrow p(n+1)$ 成立.

则命题 $p(n)$ 对一切自然数 n 成立.

证明 设 $E=\{n\in\mathbf{N}\mid$ 命题 $p(n)$ 成立$\}$. 则显然有 $E\subset\mathbf{N}$. 又因为 $p(1)$ 成立,即 $1\in E$,E 非空. 如果 $E\neq\mathbf{N}$,则必然存在 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $p(n_0)$ 不成立. 因为若 $p(n)$ 成立则必有 $p(n+1)$ 成立,所以 $p(n_0-1)$ 不成立. 由此又可得到 $p(n_0-2)$ 不成立,依此递推,由于小于 n_0 的自然数只有有限个,就得到了 $p(1)$ 不成立,与已知的 $p(1)$ 成立矛盾. 所以 $E=\mathbf{N}$,即命题 $p(n)$ 对一切自然数均成立. □

利用数学归纳原理可以证明我们通常很熟悉的自然数的性质,例如自然数集 $\mathbf{N}$ 关于加法与乘法运算是封闭的、自然数集的任一非空子集必有最小数等. 下面定义整数与有理数. 我们把所有的自然数,零及所有的自然数的负元组成的集合叫做**整数集**,记作 $\mathbf{Z}$. 把形如 $r=\dfrac{p}{q}$ (其中 $p,q\in\mathbf{Z}$,且 $q\neq0$) 的实数所成之集叫做**有理数集**,记作 $\mathbf{Q}$,其中实数 r 叫做有理数. 不是有理数的实数叫做无理数,它的全体叫做**无理数集**. 由此知自然数集、整数集、有理数集、无理数集都是实数集的子集. 还可以证明,有理数集是一个有序域,也就是说,我们通常熟悉的关于实数之间的四则运算与不等式运算在有理数集中也是畅通无阻的. 那么实数域与有理数域的本质差别在哪儿呢?关键就是连续公理,连续公理在有理数域 $\mathbf{Q}$ 中不成立. 例如令

$$A=\{a\in\mathbf{Q}\mid a>0,a^2<2\},\ B=\{b\in\mathbf{Q}\mid b>0,b^2>2\},$$

它们都是 $\mathbf{Q}$ 的子集. 由于 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a>0,b>0$,有

$$a<b\Leftrightarrow a^2<b^2,$$

所以 A 中任一正有理数 a 小于 B 中任一有理数 b. 容易证明,不可能存在一个有理数 $c\in\mathbf{Q}$,对 $\forall a\in A,\forall b\in B$,有 $a\leqslant c\leqslant b$. 否则,由 $a\leqslant c\leqslant b\Rightarrow a^2\leqslant c^2\leqslant b^2$. 又由集 A 与集 B 定义有 $a^2<2<b^2$,于是 $c^2=2$. 但我们都知道这在有理数域中是不可能的,故连续公理在有理数域 $\mathbf{Q}$ 中不成立. 我们将会看到,正是连续公理构成了数学分析的基础,也是极限理论赖以生存的根基.

到此,已经完成了整个实数集及其重要子集的定义工作,我们省略了很多证明细节,为的是突出它们最主要的特征. 要想较全面论述实数域,还需要构造出满足实数公理的实数模型,并给出具有实际计算意义的实数表示法等,这些都是很重要的,同时也是很繁重的工作,请读者参考其他书籍.

4.1.2 确界原理与闭区间套原理

这里先介绍几个重要概念.

在第1章的1.1节中,已经给出了非空实数集合 $E\subset R$ 的上界、下界、最大值、最小值、上确界以及下确界的定义,其中 E 的最小上界称为 E 的上确界,E 的

最大下界称为E的下确界,用不等式来描述E的最小上界与最大下界,就得到了E的上确界与下确界的等价定义如下.

定义 1.1 设$E\subset\mathbf{R}$,$E\neq\varnothing$,

若存在$\beta\in\mathbf{R}$,满足下列条件:

1°(上界性) 对一切$x\in E$,有$x\leqslant\beta$;

2°(最小性) 对E的任一上界β',都有$\beta'\geqslant\beta$.

则称β是E的**上确界**,记作$\beta=\sup E$.

若存在$\alpha\in\mathbf{R}$,满足下列条件:

1°(下界性) 对一切$x\in E$,有$x\geqslant\alpha$;

2°(最大性) 对E的任一下界α',都有$\alpha'\leqslant\alpha$.

则称α是E的**下确界**,记作$\alpha=\inf E$.

若数集E有上(下)确界,此确界不一定属于E.例如区间$[0,1)$有上确界1,但$1\notin[0,1)$,而$[0,1)$的下确界$0\in[0,1)$.

易知,若$b=\max E\Rightarrow b=\sup E$,但反之不然.

我们已经知道,任一数集的最大(小)数不一定存在,那么任一有界数集的上(下)确界一定存在吗?这个问题的答案是肯定的,即下文所述的确界原理.从中可以看到实数连续公理的巨大威力.

定理 1.2(确界原理)

任意有上界的非空实数集存在唯一的上确界.

证明 设A是题设中给定的非空数集.把A的一切上界集合起来,即令

$$B=\{b\in\mathbf{R}\mid\forall a\in A,有\ a\leqslant b\},$$

则B也是非空实数集,且每个$b\in B$均是A的上界,由分划原理,存在实数c是A的上界所以$c\in B$,且c又是B的下界,即每个$b\in B$均有$b\geqslant c$,所以c是A的最小上界,即c是A的上确界.又因为c是B的最小值,所以A的上确界c是唯一的. □

推论 任意有下界的非空实数集存在唯一的下确界.

证明 设非空实数集合E有下界,定义集合

$$-E=\{-x\mid x\in E\}.$$

则$-E$非空有上界,且若β是$-E$的上界,则$-\beta$是E的下界,由确界原理,$-E$存在唯一的上确界β,那么$\alpha=-\beta$就是E的唯一的下确界. □

直接利用确界定义进行论证有时并不方便,因此需要给出较实用的判别方法.

定理 1.3(确界判别准则)

设 E 是非空实数集，

(1) $\beta = \sup E$ 的充要条件是实数 β 满足：

1° 对一切 $x \in E$，有 $x \leqslant \beta$；

2° 任给 $\varepsilon > 0$，存在 $x' \in E$，使得 $\beta - \varepsilon < x'$.

(2) $\alpha = \inf E$ 的充要条件是实数 α 满足：

1° 对一切 $x \in E$，有 $x \geqslant \alpha$；

2° 任给 $\varepsilon > 0$，存在 $x'' \in E$，使得 $\alpha + \varepsilon > x''$.

证明 这里只对上确界进行证明.

必要性($\Rightarrow$) 设 $\beta = \sup E$ 存在，显然 1° 成立. $\forall \varepsilon > 0$，因 $\beta - \varepsilon < \beta$，由最小上界性知 $\beta - \varepsilon$ 不是 E 的上界，再由上界的非命题知，

$$\exists x' \in E, \text{使得 } x' > \beta - \varepsilon.$$

充分性($\Leftarrow$) 设实数 β 满足题设条件 1° 和 2°，显然 β 是 E 的一个上界. 任取 E 的一个上界 β'，假设 $\beta' < \beta$，由 2° 中 $\varepsilon > 0$ 的任意性可取 $\varepsilon = \beta - \beta' > 0 \Rightarrow \exists x' \in E$，使得 $x' > \beta - \varepsilon = \beta - (\beta - \beta') = \beta'$. 这与 β' 是 E 的上界相矛盾，故 $\beta' \geqslant \beta$. □

此定理可简记作

$$\boxed{\beta = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} 1^\circ \ \forall x \in E, x \leqslant \beta; \\ 2^\circ \ \forall \varepsilon > 0, \exists x' \in E, x' > \beta - \varepsilon. \end{cases}}$$

$$\boxed{\alpha = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} 1^\circ \ \forall x \in E, x \geqslant \alpha; \\ 2^\circ \ \forall \varepsilon > 0, \exists x'' \in E, x'' < \alpha + \varepsilon. \end{cases}}$$

利用确界判别准则论证问题时，特别要注意：由 $\varepsilon > 0$ 确定的 $x' \in E$ 与 ε 有关，切不可把它当常数处理.

设实值函数 f 在数集 D 上有界，则它的值域 $f(D)$ 是有界数集，于是，$\sup f(D)$ 与 $\inf f(D)$ 皆存在，分别称为函数 f 在 D 的**上确界和下确界**. 记作

$$\sup_{x \in D} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in D\} = \sup f(D),$$
$$\inf_{x \in D} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in D\} = \inf f(D).$$

当非空数集 E 无上界或无下界时，记作

$$\sup E = +\infty \text{ 或 } \inf E = -\infty.$$

将符号 $+\infty$，$-\infty$ 与实数域 $\mathbf{R}$ 的并集 $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ 称为**广义实数系**，记作 $\mathbf{R}^* = [-\infty, +\infty]$. 在 $\mathbf{R}^*$ 中我们规定如下顺序关系：保持 $\mathbf{R}$ 中原来顺序关系，且对 $\forall x \in \mathbf{R}$，有 $-\infty < x < +\infty$. 此外在 $\mathbf{R}^*$ 中还适当引进运算关系，即

$\forall x_0 \in \mathbf{R}$,规定:

1° $(\pm\infty) \pm x_0 = \pm\infty$, $x_0 - (\pm\infty) = \mp\infty$,

$$\frac{x_0}{\pm\infty} = 0, \qquad x_0 \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & x_0 > 0, \\ \mp\infty, & x_0 < 0; \end{cases}$$

2° $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$, $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$,

$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$, $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$,

$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$.

但是下面运算$(\pm\infty) - (\pm\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$在广义实数系中是没有意义的. 这样一来,我们可以说,对任何非空数集E, $\sup E$与$\inf E$均有意义. 但是本书今后所说的"存在确界"仍然是指确界是实数的情形. 另外请读者注意,我们在第1册中广泛使用过的记号∞,既不是$\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$的元素,也不是$\mathbf{R}^* = [-\infty, +\infty]$的元素.

定理 1.4(确界的运算性质)

1°(单调性) 若非空有界实数集$A \subset B$,则$\sup A \leqslant \sup B$, $\inf A \geqslant \inf B$. 通俗 地说,集合增加时,上确界单调增,下确界单调减.

2°(符号性质) 设E是非空实数集, $-E = \{-x \mid x \in E\}$,则有

$$\sup\{-E\} = -\inf E, \inf\{-E\} = -\sup E.$$

3°(数乘性质) 设E是非空实数集,实数$a > 0$, $aE = \{ax \mid x \in E\}$,则有

$$\sup\{aE\} = a\sup E, \inf\{aE\} = a\inf E.$$

4°(保序性) 设函数f, g均在$D \subset R$上有界且$f(x) \leqslant g(x)$对一切$x \in D$成立,则有

$$\sup_{x\in D}\{f(x)\} \leqslant \sup_{x\in D}\{g(x)\}, \inf_{x\in D}\{f(x)\} \leqslant \inf_{x\in D}\{g(x)\}.$$

证明 只证明1°和4°, 2°与3°留给读者自证.

1° 因为$\sup B$是B的上界且$A \subset B$,所以$\sup B$必是A的上界,而$\sup A$是A的最小上界,所以$\sup A \leqslant \sup B$. 同理$\inf B$是A的下界,而$\inf A$是A的最大下界,所以$\inf A \geqslant \inf B$.

4° 因为$\sup\limits_{u\in D}\{g(u)\} \geqslant g(x) \geqslant f(x)$对一切$x \in D$成立,所以$\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$是实数集合$\{f(x) \mid x \in D\}$的上界, 4°的第一个不等式成立. 同理可证明4°的第二个不等式. □

例 1 设函数f在数集D有界,求证:

$$\sup_{x\in D}\{-f(x)\} = -\inf_{x\in D}\{f(x)\}.$$

证明 记$\alpha = \inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}$. 由下确界定义知, $\forall x \in D$,有$f(x) \geqslant \alpha \Rightarrow \forall x \in$