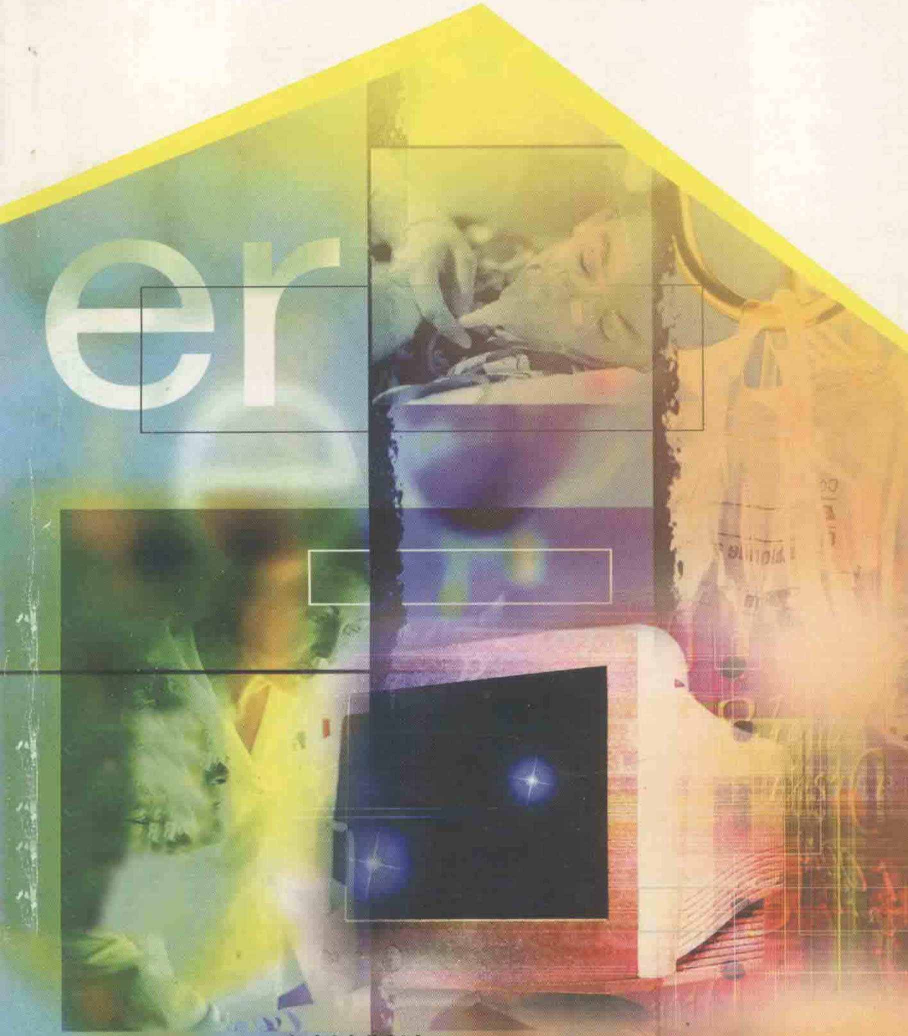
KE XUE WEN CONG

科学文丛

趣味无穷的整数



广州出版社

科学文丛

趣味无穷的整数

(8)

广州出版社出版

图书在版编目（CIP）数据

科学文丛．何静华 形继祖 主编．广州出版社．2003.

书号 ISBN7-83638-837-5

Ⅰ．科学...Ⅱ....Ⅲ. 文丛

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 082275 号

科学文丛

主　编：何静华 形继祖

广州出版社

广东省新宜市人民印刷厂

开本：787×1092 1/32 印张：482.725

版次：2003 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

印数：1-5000 套

书号 ISBN 7-83638-873-5

定价：（全套 104 本）968.80 元

目　　录

一、数之源——自然数 …………………………… （1）

人类最早认识的整数 …………………………… （1）

数的整除 …………………………… （3）

猜猜看 …………………………… （6）

奇妙的一千零一 …………………………… （8）

公约数中的“大哥大” …………………………… （10）

公倍数中的“老幺” …………………………… （13）

何时再相逢? …………………………… （15）

该赔多少鸡蛋? …………………………… （16）

“大哥大”与“老幺”的亲密关系 …………………………… （16）

费马数与费马“质数” …………………………… （18）

麦森数与已知的最大质数 …………………………… （20）

合数的质因数分解 …………………………… （23）

约数(因数)有几何? …………………………… （25）

“不完全”的完全数 …………………………… （27）

用途广泛的排列数 …………………………… （30）

貌似分数的整数——组合数 …………………………（33）
会算的神枪手 …………………………………………（37）
费马小定理 ……………………………………………（40）
求平方数的简便方法 …………………………………（43）
余数问题 ………………………………………………（46）
国庆节是星期几？ ……………………………………（49）
求余数的特殊方法 ……………………………………（52）

二、形形色色的整数数列 ……………………………（58）

阶梯式的等差数列 ……………………………………（58）
“光输皇帝”与“常胜将军” ………………………（62）
巧辨真假伪劣 …………………………………………（64）
成倍增长的等比数列 …………………………………（66）
众猴分桃 ………………………………………………（69）

三、不定方程的整数解 ………………………………（73）

中国剩余定理 …………………………………………（73）
韩信点兵 ………………………………………………（76）
谁最先提出不定方程？ ………………………………（77）
解的个数是多少？ ……………………………………（79）
毕达哥拉斯方程 ………………………………………（82）
马尔可夫方程 …………………………………………（84）
美丽的方队 ……………………………………………（85）
零零星星的方程 ………………………………………（88）
费马大定理 ……………………………………………（97）

一、数之源——自然数

人类最早认识的整数

几万年以前,原始人还过着茹毛饮血、穴居野处的生活,生产工具只是一些非常粗陋的石器。虽然当时人们对大自然的认识还很肤浅,所懂得的知识极少,但对于“数”已开始有了朦胧的印象。

人类最初产生的“数”的印象是“有”和“无”。例如,今天大家出去狩猎,可能打到野兽,也可能一无所获,这就是“有”与“无”这两个数学概念产生的实际基础。在狩猎过程中,每天猎取的野兽多少不等,这又慢慢地产生了笼统的“多”与“少”的概念。把猎取的野兽分配给大家,这里就产生野兽集合与人的集合之间的“对应”关

系。正因为有了这种对应的关系，人们才有可能把生活中事物的数量与“自然数”之间一一对应起来。

我国古代人在龟甲和兽骨上刻字，留传下来，后人把它叫做甲骨文。大约在三千四百年前，我国殷朝遗留下来的甲骨文中，就有一些自然数的记载。在殷朝都城（现在的河南省安阳县西北一带）的废墟上，出土了大约十万片刻着文字的甲骨，其中共有十三个自然数，它们是

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，100，1000，10000.

这些数的原形，我们是无法认出的。有些是象形文字，有些是假借字，这是由考古学家经过研究、分析后，才科学地得出了上述自然数。

大约在三千七八百年前，埃及人就有了十进位数，它们是

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10.

整数“0”起源于印度，在公元前两千年或一千五百年，古老的印度文献《吠陀》中已有应用。

这些，是已发现的人类历史上最早认识的整数。

数的整除

我们在数物体的时候,用来表示物体个数的 1,2,3,4,……叫做自然数。显然,自然数的个数是无限的。一个物体也没有,就用 0 表示,但 0 不是自然数。而 0 和自然数都是整数。

我们来看下面两道算式:

$15 \div 3 = 5, 24 \div 2 = 12.$

像上面这样,15 除以 3,除得的商正好是整数 5,且没有余数,我们就说,15 能被 3 整除。同样,24 能被 2 整除。

一般地,如果数 a 被数 b 除,得到的商 q 正好是整数,且没有余数(或余数为 0),我们就说 a 能被 b 整除。

上面的两道除法算式也可以写成

$15 = 3 \times 5, 24 = 2 \times 12.$

因此,如果数 a 能被数 b 整除,那么我们可以把被除数 a 写成

$a = b \times q.$

这时,a 叫做 b 的倍数,b 叫做 a 的约数。毫无疑问,a 也是 q 的倍数,q 也是 a 的约数。例如,15 是 3 的倍数,也是 5 的倍数,3 和 5 都是 15 的约数。又如,24 是 2 和 12

的倍数,2 和 12 都是 24 的约数。

要判断一个数能否被另一个数整除,有时非常简单,有时却异常复杂。现在我们就一些比较简单的情况进行讨论。

我们把能被 2 整除的数叫做偶数;不能被 2 整除的数叫做奇数。例如:0,2,4,6,8,10,……是偶数;1,3,5,7,9,11,……是奇数。要判断一个数能否被 2 整除,那真是太简单不过的事了。凡是个位上是偶数的数,都能被 2 整除;凡是个位上是奇数的数都不能被 2 整除。例如,13578 的个位数是 8,8 是偶数,所以 13578 能被 2 整除;而 1995 的个位数是奇数 5,所以 1995 不能被 2 整除。

要判定一个数能否被 5 整除,其方法与被 2 整除类似。个位上是 0 或者 5 的数,都能被 5 整除。例如,3790 的个位数是 0,所以 3790 能被 5 整除;1995 的个位数是 5,所以 1995 能被 5 整除。

如果一个数的各位上的数字之和能被 3 整除,那么这个数就能被 3 整除。例如,79179 的各位数字的和为

$$7+9+1+7+9=33,$$

33 是 3 的倍数,所以 79179 能被 3 整除。类似地,能被 9

整除的数的特点,是这个数的各位上的数字之和能被9整除。例如,111111111的各位数字之和为

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1=9,$$

所以111111111能被9整除;又如:

$$\underbrace{111\cdots1}_{99\text{位}}$$

的各位数字之和为

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{99\text{个}}=99$$

而99是9的倍数,所以

$$\underbrace{111\cdots1}_{99\text{位}}$$

能被9整除。根据一个数能被9整除的这个特点,我们在下一节做了一个有趣的游戏,请你也去"猜猜看"。

能被11整除的数有一个有趣的特点:奇位数字的和与偶位数字的和之差能被11整除。例如,59293883的奇位数字的和为

$$3+8+9+9=29,$$

其偶位数字的和为

$$8+3+2+5=18,$$

而差 11 显然是 11 的倍数,所以 59293883 能被 11 整除。

另外,还有一些能被 4,25,8,125 整除的数的特点列在下面:

能被 4 整除的特点:末两位数能被 4 整除;

能被 25 整除的特点:末两位数能被 25 整除;

能被 8 整除的特点:末三位数能被 8 整除;

能被 125 整除的特点:末三位数能被 125 整除。

关于这些数的整除的例子,举不胜举,在此就不赘述了。

猜猜看

胖子与周勇正在做猜数的游戏。周勇叫胖子先任意写一个三位数或四位数(周勇没看这个数),然后按照下面的步骤进行计算:

第 1 步:乘上一个 9;

第 2 步:将各位上的数字相加;

第 3 步:再将所得数的各位上的数字相加;

第 4 步:乘上 30;

第 5 步:减去 20。

最后周勇告诉胖子:“你现在得到的结果是 250。”胖子感到很奇怪,他又换了一个数再算了一次,结果还是

250。”现将胖子用两个不同的数的计算过程写在下面：

第一个数：999，

第 1 步：$999\times9=8991$，

第 2 步：$8+9+9+1=27$，

第 3 步：$2+7=9$，

第 4 步：$9\times30=270$，

第 5 步：$270-20=250$；

第二个数：1234，

第 1 步：$1234\times9=11106$，

第 2 步：$1+1+1+0+6=9$，

第 3 步：$9=9$，

第 4 步：$9\times30=270$，

第 5 步：$270-20=250$。

胖子仔细思索了一下，连忙就说：“我明白，原来你是根据‘一个数的各位上的数字之和能被 9 整除，这个数就能被 9 整除’的道理。关键是前三步，第一步是使所得的数为 9 的倍数、第二步的结果肯定是 9 的倍数，但这时的结果可能是 9，18，27，36，45（因为四位数乘 9 后可能是五位数，而这种五位数中数字之和的最大者等于 45）；第三步就使所得到的数是 9，至于第四、五两步，

那是你故意迷惑而增加的两个步骤。”周勇点了点头。亲爱的读者，请你也猜猜看。

奇妙的一千零一

谈到 1001 这个数，它有一个奇妙的特点。如果我们将任何一个自然数相继乘以三个连续的质数 7，11，13 后，所得到的最终的积数的个位、十位、百位上的数字与原来的自然数的个位、十位、百位上的数字完全相同。例如，

$34567 \times 7 = 241969$，

$241969 \times 11 = 2661659$，

$2661659 \times 13 = 34601567$。

显然，最终的积数与原自然数的个位、十位、百位上的数字都是 7，6，5。又如，

$79 \times 7 = 553$，

$553 \times 11 = 6083$，

$6083 \times 13 = 79079$。

也确实完全相同。就连两位数的百位上的“0”也带到新数的百位上来了。这是什么原因呢？它与 1001 又有什么关系呢？

原来1001的质因数分解为

$1001=7\times11\times13$,

因此,将任何一个自然数连乘以7,11,13后,就等于乘以1001。那么为什么会出现上述的奇妙现象呢?现在我们就来找找这个原因:

设有一个自然数 $\overline{a_1a_2\cdots a_nabc}$,这里 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a,b,c$ 分别表示各位上的数字,那么

$$
\begin{aligned}
&\overline{a_1a_2\cdots a_nabc}\times1001\\
=&\overline{a_1a_2\cdots a_nabc}\times(1000+1)\\
=&\overline{a_1a_2\cdots a_nabc}\times1000+\overline{a_1a_2\cdots a_nabc}\\
=&\overline{a_1a_2\cdots a_nabc}\times1000+\overline{a_1a_2\cdots a_n}\times1000+\overline{abc}\\
=&(\overline{a_1a_2\cdots a_nabc}+\overline{a_1a_2\cdots a_n})\times1000+\overline{abc}
\end{aligned}
$$

很明显,新数与原数的后三位数完全相同。根据这个特点,我们还可以得到一个妙用。将一个自然数从个位开始,每三位分为一节。如果奇数节的数的总和与偶数节的数的总和之差能被7或11或13整除,那么这个自然数就能被7或11或13整除。例如,87'655'321的奇数节的数的总和为

$87+321=408$。

偶数节的数的总和为655，而差为

$$655-408=247。$$

因为247能被13整除，所以87655321能被13整除；又如38'333'295的奇数节的数的总和为

$$38+295=333,$$

偶数节的数的总和为333，而差为

$$(38+295)-333=0,$$

显然0能被7，11，13整除，所以38333295能同时被7，11，13整除，且38333295除以1001后的商的百位、十位、个位上的数字仍然是2，9，5。

公约数中的"大哥大"

大家都知道，如果数a能被数b整除，那么b就叫做a的约数。例如，

36的约数有1，2，3，4，6，9，12，18，36；

60的约数有1，2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60。

这两个数的约数中除1以外，2，3，4，6，12是这两个数公有的，其中12是最大的。一般说来，几个数公有的约数叫做这几个数的公约数，几个数的公约数中，最大的一个叫做这几个数的最大公约数。很明显，公约数中的

"大哥大"就是最大公约数。例如,36 与 60 的最大公约数是 12。

求几个数的最大公约数,可以用反除法。例如,求 30,24,42 的最大公约数。先列出竖式:

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 30 & 24 & 42 \\ \hline 3 & 15 & 12 & 21 \\ \hline & 5 & 4 & 7 \end{array}$$

所以,30,24,42 的最大公约数是 $2\times3=6$。

现在,请读者也来求一求 90,54,126 的最大公约数。其答案就在 36 的约数中,你是否做对了呢?

公约数中的"大哥大"的用途可多呢!例如,把一张长 135 厘米,宽 60 厘米的纸裁成同样大小的正方形纸块,并且没有剩余。问能裁成最大的正方形纸块的边长是多少?共可裁成几块?很明显,要把一张长方形的纸裁成同样大小的正方形纸块,并且不能有剩余,那么这个正方形纸块的边长应该是长方形纸的长与宽的公约数。又要求正方形纸块是最大的,所以正方形纸块的边长是长方形纸的长与宽的最大公约数。现解答如下:由于

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 135 & 60 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 45 & 20 \\ \hline & 9 & 4 \end{array}$$

所以 135 与 60 的最大公约数是

$3 \times 5 = 15$。

又长方形纸的面积是

$135 \times 60 = 8100$(平方厘米),

正方形纸块的面积是

$15 \times 15 = 225$(平方厘米),

而

$8100 \div 225 = 36$。

所以,裁成最大正方形纸块的边长为 15 厘米,共可裁成 36 块。

又如,在 1986 年厦门市小学生"从小爱数学"邀请赛预选赛中有这样一道试题:幼儿园拿出一块长方体木料,长 72 厘米,宽 60 厘米,高 36 厘米,请王师傅把它锯成同样大小的正方体木块,木块的体积要最大,木料又不能剩余,算一算,可以锯成几块?与上面的例子类似,正方体的棱长应该是长方体的长、宽、高的最大公约数。先求 72,60,36 的最大公约数,由