春雨教育

——"春雨奖学计划"指定用书——

教材全析

讲透重难疑点　精析常考题型

金四导

数学　九年级下

· 配人教版 ·

总主编　严　军
本册主编　余中华

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

——"春雨奖学计划"指定用书——

教材全析

讲透重难疑点　精析常考题型

数学 九年级下

·配人教版·

总主编　严　军
本册主编　余中华
撰　稿　陆亚彬　余中华　陆志鹏
丁锦荣　宋　燕　许德顺

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

金四导.九年级数学.下/严军主编;余中华编写.
—北京:中国少年儿童出版社,2008.10(2012.1重印)
ISBN 978-7-5007-9041-9

Ⅰ.金…　Ⅱ.严…　Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第155199号

配人教版

“春雨奖学计划”指定用书

金四导·教材全析

九年级数学(下)

出版发行:中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社
出版人:李学谦
执行出版人:赵恒峰

总主编:严　军　　主　编:余中华
责任编辑:贺泽红　　装帧设计:春雨教育美编室
责任校对:丁荣锋　　责任印务:李建国

社　址:北京市朝阳区建国门外大街丙12号楼　　邮政编码:100022
总编室:010-57526071　　传　真:010-57526075
经　销:江苏春雨教育集团有限公司
http://www.ccppg.com.cn
E-mail:zbs@ccppg.com.cn

印刷:泰安市华岳印刷有限公司

开本:880mm×1230mm　1/32　　印张:70
2012年1月第1版第2次印刷
字数:1680千字　　印数:5000册
ISBN 978-7-5007-9041-9/G·6521　　定价:126.00元(共7册)

12-5508-1

图书若有印装问题,请及时向印务部退换。(010-57350105)

目录

CONTENTS

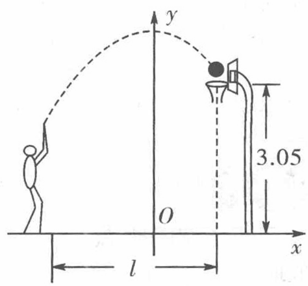
第二十六章

二次函数

本章综合视窗

情境导入

同学们，前面我们已经学过了一次函数和反比例函数，但是我们在日常生活中观察到下列一些现象无法用这两个函数来描述．广场上喷水池喷出的水线的形状；历史书上学到的赵州石拱桥的整个桥拱的形状；我们打篮球投篮时，球在空中运行的轨迹；推铅球时铅球的运行轨迹；掷标枪时，标枪运行的轨迹以及下垂的高压线的形状等，这些形状都与我们随手抛出一物体后，物体运动的轨迹相似，人们习惯称之为“抛物线”．



假如篮球的飞行轨迹——抛物线的解析式是 $y=-\frac{1}{5}x^2+3.5$，已知篮筐离地面的距离是 3.05 m，你能算出球在空中飞行的最大高度吗？如果姚明在跳投时球出手时离地面的高度为 2.46 m，你知道他距离篮筐中心的水平距离是多少米吗？

带着以上这些问题，让我们一起进入本章内容的学习，相信通过我们的共同努力，问题一定会迎刃而解．

考点聚焦

专题 1．了解二次函数的概念，图象与性质，以及与方程和不等式的关系．

专题 2．理解二次函数在实际问题中的应用．

方法指路

1．了解二次函数的图象及其性质，可以通过从简单到复杂，从特殊到一般，运用数形结合的思想认识抛物线的特点、二次函数的性质．

2．理解顶点、对称轴、函数最值三者之间的关系，可以根据抛物线顶点，结合开口方向，画出抛物线的大致图象，从而确定对称轴、函数最值．

3. 掌握求二次函数的解析式以及二次函数图象与 x 轴的交点坐标的方法，可以通过待定系数法以及函数与方程的联系来求解.

4. 运用二次函数解决相关的应用型问题. 可以通过挖掘隐含的条件，分步转化，逐步求解. 注意理解函数图象及其与坐标轴的交点坐标，以及函数的增减性等在实际生活中的意义.

26.1　二次函数及其图象

学习目标导航

1. 通过对实际问题情境的分析，确定二次函数的表达式，并体会二次函数的意义.

2. 会用描点法画二次函数的图象，并能根据图象对二次函数的开口方向、对称轴和顶点坐标等性质进行分析，进一步积累研究函数性质的经验.

3. 会用配方法确定二次函数图象的顶点、开口方向和对称轴.

4. 会由特殊二次函数分析和推导一般二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象和性质.

5. 会运用二次函数及其性质解决简单的实际问题，体会二次函数在实际生活中的应用价值.

教材知识详析

要点 1　二次函数的概念

一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数，$a\neq0$)的函数，叫做二次函数. 其中 x 是自变量，y 是 x 的二次函数，a,b,c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项. $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 也叫做二次函数的一般形式.

【关键提醒】当 $a\neq0,b=c=0$ 时，则 $y=ax^2$；当 $a\neq0,b=0,c\neq0$ 时，则 $y=ax^2+c$；当 $a\neq0,b\neq0,c=0$ 时，则 $y=ax^2+bx$；这些函数都叫做二次函数. 当 $a=0$，且 $b\neq0$ 时，函数为一次函数.

例 1　下列函数中哪些是二次函数？

(1) $y=2-x^2$；(2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$；(3) $y=2x(1+4x)$；(4) $y=x^2-(1+x)^2$；(5) $y=mx^2+nx+p$(m,n,p 均为常数).

精析：(1)是二次函数；(2)是分式而不是整式不符合二次函数的定义式，故 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 不是二次函数；(3)把 $y=2x(1+4x)$ 化简为 $y=8x^2+2x$，显然是二次函数；(4) $y=x^2-(1+x)^2$ 化简后变为 $y=-2x-1$，它不是二次函数而是一个一次函数；(5)由于题目没有给定二次项系数 m 的条件，故应讨论. 当 $m\neq0$ 时，$y=mx^2+nx+p$ 是一个二次函数；当 $m=0$ 时，函数变为 $y=nx+p$ 是一个一次函数或常数

函数.

解答:(1)(3).

探索与发现:(1)判断一个函数关系是否为二次函数时,要看是否满足以下三点:①函数的解析式是整式;②化简后自变量的最高次数是 2;③二次项系数不为 0.

(2)在列二次函数关系式表达实际问题时,一定要注意标明自变量的取值范围,且使自变量的取值范围符合实际情况和题意.

要点 2 抛物线及其有关概念

一般地,二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象叫做抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

抛物线是轴对称图形,每条抛物线都有对称轴,抛物线与对称轴的交点叫做抛物线的顶点,顶点是抛物线的最低点或最高点.

关键提醒:(1)画函数的图象都按①列表、取值;②描点;③连线三步进行.

画函数图象的技巧:①列表时,要注意根据自变量的取值范围,坚持从左到右,从小到大的原则;②描点时,要注意以自变量的值为横坐标,函数的值为纵坐标;③连线时,从左到右,分析各点之间的变化趋势,用平滑的曲线连接,不能有轮廓,应向左右延伸.

(2)画二次函数图象时,注意取有代表性的对应值 5 组或 7 组(一般在对称轴左右对称取值).用平滑的曲线进行连线,过渡要自然,不能用折线连接.描点画图所画的图象,都是部分近似的.

例 2 若用图(1)、(2)、(3)、(4)四幅图象分别表示变量之间的关系,将下面的(a)、(b)、(c)、(d)对应的图象排序:

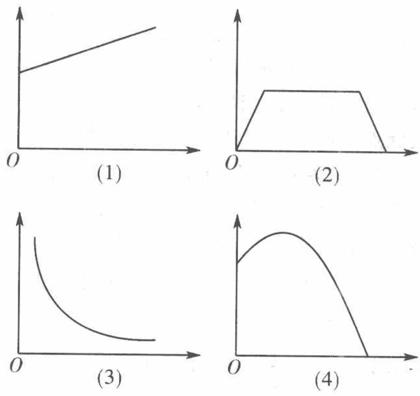


图 26.1-1

(a)面积为定值的矩形(矩形的相邻两边长的关系);

(b)运动员推出去的铅球(铅球的高度与时间的关系);

(c)一个弹簧不挂重物到逐渐挂重物(弹簧长度与所挂重物质量的关系);

(d)某人从 A 地到 B 地后，停留一段时间，然后按原速返回(离开 A 地的距离与时间的关系).

正确的顺序是(　　).

A. (3)(4)(1)(2)　　B. (3)(2)(1)(4)

C. (4)(3)(1)(2)　　D. (3)(4)(2)(1)

精析：(a)面积为定值的矩形，矩形的相邻两边长的关系满足反比例关系，对应的图象是(3)；(b)推出去的铅球的高度与时间的关系满足二次函数关系，对应的图象是(4)；(c)弹簧长度与所挂重物质量的关系满足一次函数关系，对应的图象是(1)；(d)某人从 A 地到 B 地后，停留一段时间，然后按原速返回，离开 A 地的距离与时间的关系，对应的图象是(2).

解答：A.

探索与发现：本题是与生活实际紧密结合的应用题，只有认真仔细观察、分析每个实际问题中所蕴含的变量间的关系，并用函数的概念和图象特点去分析、转化问题，才能最终形成正确的函数图象.

另外可以适当运用选择题的解题技巧，采用排除法作出选择.

要点3　二次函数 $y=ax^2$ 的图象

函数	形状	对称轴	顶点坐标	开口方向		抛物线的位置	
				$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
$y=ax^2$ $(a\neq0)$	抛物线	y 轴或直线 $x=0$	(0,0)	开口向上	开口向下	图象位于 x 轴上方	图象位于 x 轴下方

关键提醒：(1)当 $a>0$ 时，在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小；

在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而增大；

顶点是抛物线的最低点，即当 $x=0$ 时，y 取最小值 0.

(2)当 $a<0$ 时，在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而增大；

在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而减小；

顶点是抛物线的最高点，即当 $x=0$ 时，y 取最大值 0.

(3)抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 的开口大小由 $|a|$ 的大小决定，$|a|$ 越大，开口越小；$|a|$ 越小，开口越大.

例3　下面是关于函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 图象的四个说法：

①图象是一条抛物线；②开口向下；③对称轴是 y 轴；④顶点坐标为(0,0).

其中正确的有(　　).

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

精析：根据二次函数 $y=ax^2$ 的图象特征可知①②③④均正确.

解答：D.

要点 4　二次函数 $y=ax^2$，$y=ax^2+k$，$y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$ 的平移关系

二次函数特殊形式	开口方向	对称轴	顶点坐标
$y=ax^2$	当 $a>0$ 时，开口向上；当 $a<0$ 时，开口向下.	y 轴($x=0$)	$(0,0)$
$y=ax^2+k$		y 轴($x=0$)	$(0,k)$
$y=a(x-h)^2$		$x=h$	$(h,0)$
$y=a(x-h)^2+k$		$x=h$	(h,k)

归纳整理：(1)这些抛物线的相同点为形状、开口大小、方向相同，其区别为：对称轴、顶点坐标不同.

(2)抛物线 $y=ax^2$ 平移得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的过程：①抛物线 $y=ax^2$ 向左(或向右)平移 $|h|$ 个单位；②在此基础上，向上(或向下)平移 $|k|$ 个单位.

例如：$y=5x^2$ 的图象 $\xrightarrow[\text{2 个单位}]{\text{向右平移}}$ $y=5(x-2)^2$ 的图象 $\xrightarrow[\text{3 个单位}]{\text{向下平移}}$ $y=5(x-2)^2-3$ 的图象.

拓展反思：抛物线平移规律：

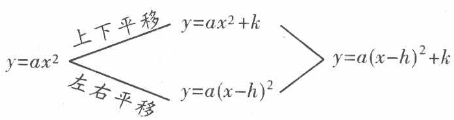


图 26.1-2

关键提醒：左移，h 为负；右移，h 为正；下移，k 为负；上移，k 为正.

例 4　将抛物线 $y=-x^2$ 向左平移 2 个单位后，得到的抛物线的解析式是(　　).

A. $y=-(x+2)^2$　　　B. $y=-x^2+2$

C. $y=-(x-2)^2$　　　D. $y=-x^2-2$

精析：抛物线 $y=-x^2$ 的顶点坐标为 $(0,0)$，抛物线向左平移 2 个单位后的顶点坐标为 $(-2,0)$，所以平移后的抛物线的解析式为 $y=-(x+2)^2$.

解答：A.

例 5　在平面直角坐标系中，如果抛物线 $y=3x^2$ 不动，而把 x 轴、y 轴分别向上、向右平移 3 个单位，那么在新坐标系下此抛物线的解析式是(　　).

A. $y=3(x-3)^2+3$　　　B. $y=3(x-3)^2-3$

C. $y=3(x+3)^2+3$　　　D. $y=3(x+3)^2-3$

精析：如果抛物线 $y=3x^2$ 不动，而把 x 轴、y 轴分别向上、向右平移 3 个单位，相当于坐标系不动，把抛物线向下、向左平移 3 个单位，所以 $y=3x^2$ 的图象向下、

向左平移 3 个单位后得到的抛物线的解析式为 $y=3(x+3)^2-3$. 故选 D.

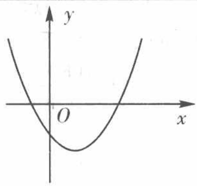
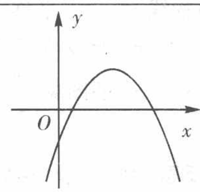
解答：D.

探索与发现：函数图象的平移变换，实质上是函数图象上的点的平移变换，而坐标系中点的平移变换实质上就是点的坐标的平移变换. 解决问题的关键是弄清和设出函数图象上的原有点的坐标为 (x,y)，以及平移后该点的坐标为 $(x\pm m,y\pm n)$，因该点在函数图象上，便可根据代入法将该点代入原有函数解析式，通过计算与化简，从而确定出平移后的函数图象的解析式.

要点 5　二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象和性质

(1)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 总可以化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，故二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象也可以看作由二次函数 $y=ax^2$ 的图象平移得到.

(2)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的性质：

函数	二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0,a,b,c$ 是常数)	
图象		
性质	(1)当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，并向上无限延伸. (2)对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. (3)在对称轴左侧，即当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；在对称轴右侧，即当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大. (4)抛物线有最低点，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最小值，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.	(1)当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，并向下无限延伸. (2)对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. (3)在对称轴的左侧，即当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴右侧，即当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小. (4)抛物线有最高点，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

(3)可以用配方法把 $y=ax^2+bx+c$ 化为顶点式：

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

因此,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$,顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象可以看作 $y=ax^2$ 向右或向左平移 $\left|\frac{b}{2a}\right|$ 个单位,再向上或向下平移 $\left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|$ 个单位.

拓展反思:二次函数的三种解析式、对称轴、顶点坐标:

	解析式	对称轴	顶点坐标
一般式	$y=ax^2+bx+c$	直线 $x=-\frac{b}{2a}$	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$
顶点式	$y=a(x-h)^2+k$	直线 $x=h$	(h,k)
交点式	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	直线 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$	$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right.$,代入解析式求$\left.\right)$

关键提醒:(1)用配方法把二次函数化为 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 形式的基本步骤是:①二次项系数化为1,如果二次项系数不是1,则先提出二次项系数,使括号中的二次项系数变为1,再对括号中的式子进行配方;②对原函数的二次三项式配方,即加上一次项系数一半的平方,配方时不能改变原式的值;③写成 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的形式.

(2)分析二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象的核心问题是通过配方法确定二次函数的顶点坐标和对称轴,在此基础上熟练地画出图象,结合图象理解性质.

例 6 二次函数 $y=2x^2-x$,当 x ________ 时,y 随 x 的增大而增大;当 x ________ 时,y 随 x 的增大而减小.

精析:抛物线 $y=2x^2-x$ 开口向上,在对称轴左侧,y 随 x 的增大而减小;在对称轴右侧,y 随 x 的增大而增大.

解答:对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}$,当 $x\geqslant\frac{1}{4}$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $x\leqslant\frac{1}{4}$ 时,y 随 x 的增大而减小.

探索与发现:抛物线在对称轴两侧的增减性不同,确定对称轴方程后,画出草图,只要对照图形就容易得出正确答案,无需死记硬背.

例 7 如图 26.1-3，在直角坐标系中，两条抛物线有相同的对称轴，下列关系中不正确的是（ ）.

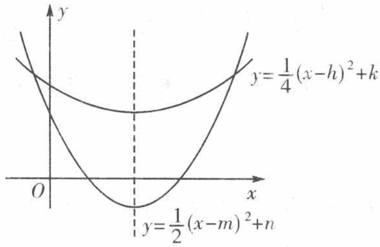


图 26.1-3

A. $h=m$　　B. $k=n$

C. $k>n$　　D. $h>0,k>0$

精析：两条抛物线有相同的对称轴，说明它们的对称轴相同，即 $h=m$，一条抛物线的最小值为正，另一条抛物线的最小值为负，即 $k>n$.

解答：B.

探索与发现：这是一道数形结合的好题，函数的表示方法有三种：解析法、列表法、图象法.通过给出的两条抛物线，我们可以从函数图象中寻找出它们性质的相同点和不同点，即从开口方向、对称轴、顶点坐标、最值、函数的增减性及图象与 x 轴、y 轴的交点坐标等方面进行探寻与思考.

要点 6 用待定系数法求二次函数的解析式（重点）

(1)一般式：$y=ax^2+bx+c$.已知图象上三点或三对 x,y 的值，通常选择一般式.

(2)顶点式：$y=a(x-h)^2+k$.已知图象的顶点或对称轴，通常选择顶点式.

类比拓展：交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$.已知图象与 x 轴的交点坐标 x_1,x_2，通常选用交点式.

例 8 已知二次函数的图象经过 $A(-1,-1)$，$B(0,2)$，$C(1,3)$ 三点，求二次函数的解析式.

精析：当二次函数的图象经过三个已知点时，通常利用待定系数法把这三点的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$ 中，得到以 a,b,c 为未知数的三元一次方程组，解此方程组，求得 a,b,c 的值，进而得到函数的解析式.

解答：设这个二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，

根据题意，得$\begin{cases}a-b+c=-1,\\c=2,\\a+b+c=3.\end{cases}$ 解得 $a=-1,b=2,c=2$，

所以解析式为 $y=-x^2+2x+2$.

探索与发现：待定系数法是求二次函数解析式的有力工具.一般来说，解析式

中有几个要确定的系数就需要知道几个点的坐标. 但也有特殊情况,如已知抛物线的顶点坐标和抛物线上另外一点坐标,就能确定出 $y=ax^2+bx+c$ 的所有待定系数.

要点7 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 中 a,b,c 的符号与图象的关系

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象确定后,解析式中的 a,b,c 也随之确定,反之,根据所给字母系数 a,b,c 的符号,也可以判断抛物线的开口方向和位置.

(1)a 确定抛物线的开口方向$\begin{cases}\text{开口向上}\Leftrightarrow a>0,\\ \text{开口向下}\Leftrightarrow a<0.\end{cases}$

(2)c 确定抛物线与 y 轴的交点$\begin{cases}\text{交于 } y \text{ 轴的正半轴}\Leftrightarrow c>0,\\ \text{交于 } y \text{ 轴的负半轴}\Leftrightarrow c<0,\\ \text{交于原点}\Leftrightarrow c=0.\end{cases}$

(3)a,b 共同确定对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}\begin{cases}\text{对称轴在 } y \text{ 轴的左侧}\Leftrightarrow a,b \text{ 同号},\\ \text{对称轴在 } y \text{ 轴的右侧}\Leftrightarrow a,b \text{ 异号},\\ \text{对称轴是 } y \text{ 轴}\Leftrightarrow b=0.\end{cases}$

拓展反思:对于代数式 $a+b+c$、$a-b+c$ 等,要知道它们实际是当自变量 x 取特殊值,如 1,-1 等时对应的函数值,判断这些代数式的符号时,要注意运用数形结合思想,依据图象上自变量取 1,-1 等时,对应的点的位置在 x 轴的上方还是下方(或在 x 轴上)加以识别.

例9 如图 26.1-4,已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示,现有下列结论:①$b^2-4ac>0$;②$a>0$;③$b>0$;④$c>0$;⑤$9a+3b+c<0$,则其中结论正确的个数是( ).

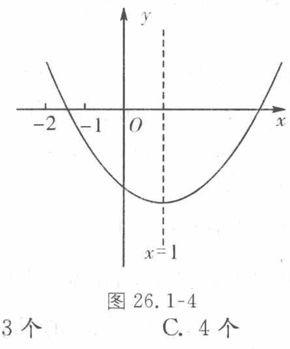


图 26.1-4

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

精析:①从函数图象可看出抛物线与 x 轴有两个交点,所以 $b^2-4ac>0$;②由于抛物线开口向上,所以 $a>0$;③由于对称轴在 y 轴右边,所以 $-\dfrac{b}{2a}>0$, $a>0$,则 $b<0$; ④图象与 y 轴交于负半轴,所以当 $c<0$; ⑤由于对称轴是 $x=1$, $x=3$ 与 $x=-1$ 对称,它们的纵坐标相等.所以当 $x=3$ 时,$y<0$,即 $9a+3b+c<0$.

解答：B.

探索与发现：抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的开口方向由 a 来决定；抛物线的对称轴的位置由 a,b 共同来决定；抛物线与 y 轴的交点的位置由 c 来决定. 抛物线与 x 轴交点的个数由 b^2-4ac 的符号来确定；特殊的函数值要看对应的自变量值来决定.

例 10 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的部分图象如图 26.1-5所示，请写出与其关系式、图象相关的 2 个正确结论：________，________.（对称轴方程，图象与 x 轴正半轴、y 轴的交点坐标除外）

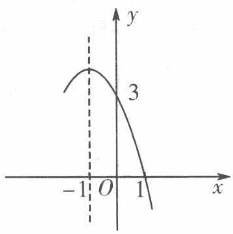


图 26.1-5

精析：这是一道开放结论题，可分别从抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标、与坐标轴的交点及增减性等方面思考与突破.

解答：答案不唯一. 如：①$c=3$；②$b+c=1$；③$c-3b=9$；④$b=-2$；⑤抛物线的顶点为$(-1,4)$，或二次函数的最大值为 4；⑥方程$-x^2+bx+c=0$ 的两个根为$x_1=-3,x_2=1$；⑦当 $y>0$ 时，$-3<x<1$；当 $y<0$ 时，$x<-3$ 或 $x>1$；⑧当 $x>-1$ 时，y 随 x 的增大而减小；当$x<-1$时，y 随 x 的增大而增大. 等等.

探索与发现：本题以开放题的形式考查，关键是要熟悉有关二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象、性质与 a,b,c 之间的逻辑推理关系、数形结合及转化思想等.

要点 8 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的作图

(1)用配方法求出抛物线的顶点坐标和对称轴，在平面直角坐标系中描出顶点，并用虚线画出对称轴.

(2)设抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$与 x 轴的交点为A、B，与 y 轴交于点C，再借助抛物线的对称性，找出点 C 关于对称轴的对称点 D，把 A、B、C、D 和顶点这五个点按从左到右的顺序用平滑的曲线连接起来，并向上或向下无限伸展，就得到函数图象，这种方法简称“五点作图法”.

例 11 已知二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+6x+10$.

(1)试确定函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标；

(2)作出函数 $y=\frac{1}{2}x^2+6x+10$ 及 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象；

(3)根据函数图象说出抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+6x+10$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的关系.

精析：二次函数图象的开口方向可以由 $a=\frac{1}{2}$确定，将二次函数的一般式配方得到顶点式，由顶点式就能得到抛物线的对称轴和顶点坐标，作二次函数图象时主

要用描点法进行，观察两抛物线的顶点可发现两抛物线的相对位置关系.

解答：(1)因为 $y=\frac{1}{2}x^2+6x+10$

$$=\frac{1}{2}(x^2+12x)+10$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+12x+36-36)+10$$

$$=\frac{1}{2}(x+6)^2-8.$$

所以二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+6x+10$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=-6$，顶点坐标为$(-6,-8)$.

(2)在同一平面直角坐标系内作出 $y=\frac{1}{2}x^2+6x+10$ 及 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象，如图所示，列表和描点过程略.

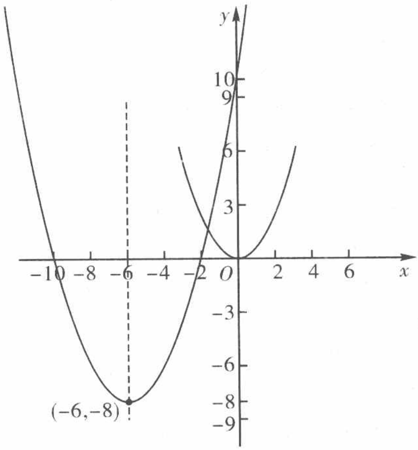


图 26.1-6

(3)由图可看出：$y=\frac{1}{2}x^2+6x+10$ 的图象可由 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象向左平移 6 个单位，再向下平移 8 个单位得到，两条抛物线的形状和大小相同，只是位置不同.

顿有所悟：求抛物线的对称轴和顶点坐标可将二次函数的解析式配方转化为顶点式，也可用一般式中的字母直接代入公式中求得，即对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 描述抛物线的平移方式时，先上下平移，再左右平移，或是先左右平移，再上下平移都可以，抓住抛物线的顶点坐标是关键.

拉分典例探究

类型一　抛物线的平移题

例 1　(要点 4)将抛物线 $y=-x^2$ 向左平移 2 个单位后，得到的抛物线的解析式是(　　).

A. $y=-(x+2)^2$　　　　B. $y=-x^2+2$

C. $y=-(x-2)^2$　　　　D. $y=-x^2-2$

精析：抛物线 $y=-x^2$ 的顶点坐标为$(0,0)$，抛物线向左平移 2 个单位后的顶点坐标为$(-2,0)$，所以平移后的抛物线的解析式为 $y=-(x+2)^2$.

解答：A.

探索与发现：当平移变换前后的函数图象都已确定，并且在平移变换过程中，点的坐标不好确定、表示时，或二次函数的顶点式运用比较麻烦时，便可借助函数图象平移法规则，从函数的解析式入手进行函数变量 x,y 的增减，再结合题目的要求分析、综合与处理，从而达到快速解题的效果与目的.

失误警示：抛物线的顶点式平移规律，也适用于二次函数的一般式的平移. 注意熟记抛物线的平移法则："左加右减，上加下减".

类型二　应用二次函数性质求简单的最值题

例 2　(要点 5)某商店经营一种小商品，进价为每件 20 元，据市场分析，在一个月内，售价定为每件 25 元时，可卖出 105 件，而售价每上涨 1 元，就少卖 5 元.

(1)当售价定为每件 30 元时，一个月可获利多少元?

(2)当售价定为每件多少元时，一个月的获利最大? 最大利润是多少元?

精析：(1)根据题意每个月的利润等于销售件数乘以每件的利润可直接列出式子进行计算；(2)把第(1)问中的售价用 x 代换，可得出对应的二次函数的关系，然后利用二次函数的性质可求得最大值.

解答：(1)获利：$(30-20)[105-5(30-25)]=800$(元).

(2)设售价为每件 x 元时，一个月的获利为 y 元.

由题意，得
$$\begin{aligned} y&=(x-20)[105-5(x-25)]\\ &=-5x^2+330x-4\,600\\ &=-5(x-33)^2+845 \end{aligned}$$

当 $x=33$ 时，y 的最大值是 845.

故当售价定为每件 33 元时，一个月获利最大，最大利润是 845 元.

探索与发现：理解并运用销售中的利润公式是解决此类题的关键. 注意题中每件的利润在变，销售量也在同时变化，会用代数式来表示这类问题中的每件利润及销售量，才能建立起正确的二次函数的关系，进而利用函数的性质求得最大值或最小值.

失误警示：求最值时，要注意求解出来的最值是否符合实际问题的意义.