2012 百题大过关

吃透百题闯三关 * 事半功倍定过关

高考数学

第三关

压轴题

张瑞炳◎编著

华东师范大学出版社

2012 百题大过关

高考数学

第三关　压轴题

编　著：张瑞炳

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学百题大过关. 第三关:压轴题/张瑞炳编著.
—上海:华东师范大学出版社,2011.3
(百题大过关)
ISBN 978-7-5617-8515-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①中学数学课—高中—习题集—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 045178 号

高考数学百题大过关

第三关 压轴题

编　　著 张瑞炳
策划组稿 倪 明 舒 刊
项目编辑 舒 刊
审读编辑 米倩倩
装帧设计 卢晓红

出版发行 华东师范大学出版社
社　　址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网　　址 www.ecnupress.com.cn
电　　话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店 http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者 常熟高专印刷有限公司
开　　本 787×1092 16 开
印　　张 13
字　　数 327 千字
版　　次 2011 年 5 月第一版
印　　次 2011 年 8 月第二次
印　　数 16001-24000
书　　号 ISBN 978-7-5617-8515-7/G·5028
定　　价 24.00 元

出 版 人 朱杰人

丛书前言

图书市场上有关小升初及中、高考的复习用书不胜其多，不少书的训练题或失之偏少，或庞杂无度。同时选择几种作参考，往往重复不少，空白依旧甚多，费时费钱还未必能完全过关。怎样在有限的时间里得到充分而有效的训练？怎样使训练达到量与质的最完美匹配？依据对小学毕业班、初三和高三优秀教师的调研，总结出"百题过关"的复习理念。为此，我们邀请经验丰富的教师担任作者，每本书或每个考点精心设计一百道互不重复且具有一定梯度的训练题，以求用最快的速度，帮助学生完全过关。

丛书共26种，涵盖小升初及中、高考语文、数学、英语的全部题型。

丛书具有四大特点：

一、丰富性。丛书涉及的内容囊括了小升初及中、高考所有知识点，覆盖面广，内容丰富。

二、层次性。题目排列杜绝杂乱无章和随意性，一般分为三个层次：第一，精选历年来的相关考题；第二，难度稍小的训练题；第三，难度稍大的训练题。这样编排既能让读者了解近年来小升初及中、高考的命题特点及其走向，又能得到渐次加深的足够量的训练。

三、指导性。为了方便使用本丛书的老师和同学，对有一定难度的题目，丛书不仅提供参考答案，还力求作最为详尽的解说，目的在于让读者知其然，更知其所以然。同学们有了这套书，就等于请回了随时可以请教的老师。

四、权威性。丛书的编写者都是国内名校骨干教师，有些还是参加国家教育部"名师工程"的著名特级教师，在各地享有盛名。他们丰富的教学实践经验和深厚的理论修养，为本丛书在同类书中胜人一筹打下扎实基础。

愿这套高质量的丛书能帮助考生顺利闯过小升初及中、高考大关，也愿考生以小升初及中、高考为新起点，步入美好的未来。

华东师范大学出版社教辅分社

编写说明

数学是高考中“含金量”很高的一个学科，必须认真面对数学科高考，勇敢闯过高考数学这个重要的关口。机遇与挑战并存，希望与困难同在。

综观各地的高考数学卷，满分一般是150分，考试用时大多是2小时，题量（包括解答题中的小题）大概为22题左右，题型有“选择题”、“填空题”、“解答题”三类，题目按难度区分又有“容易题”、“中档题”、“稍难题”三种（整卷“容易题”、“中档题”、“稍难题”的分值之比约为6∶3∶1）。许多同学的高考成绩不理想，其原因不外有两个，或者因为自身基础知识薄弱，运算、推理、应用能力欠缺；或者由于对高考产生紧张、畏难情绪导致看错、理解错题意，对各种难度题目平均用力导致考试用时不够。为了帮助高中毕业生更好地闯过高考数学这一大关，我们编写了这套《高考数学百题大过关》丛书，目的是让各位读者读完全套丛书，研究、做完书中的例题、练习题后，能了解高考数学卷的结构，发挥自己的最大潜能，顺利解答高考数学试卷，取得好成绩，考上理想的学校。

本着为考生服务的宗旨，丛书的编写顺应高中毕业生的实际学习状况，选题力求全面性与典型性，注意根据高考数学命题的统计分布来确定各知识点、各题型的题量，尽量涵盖多年来高考常见的各种题型；同时注意高考数学命题的变化趋势，尽量选取近年来高考的创新题型。

学生在学习程度上有差异，有好、中、差之分，学习的过程从容易逐渐加大难度。为适合不同学生不同阶段的学习需要，我们按照高考数学试题的难易程度，把这套丛书分为三册书来编写，它们分别为《第一关　基础题》，《第二关　核心题》，《第三关　压轴题》。各册简介如下：

《第一关　基础题》所选的题目为容易题，若按整卷满分150分计，高考容易题分值在90分左右，基础较差的考生认真用好该册书后，能确保拿到容易题（即基础题）的分数，高考成绩便超过90分。该书按知识点来编排，对高中阶段数学科基础知识进行全面的复习，总题量有400题。

《第二关　核心题》所选的题目为中档题，若按整卷满分150分计，高考中档题分值在40分左右，基础一般的考生认真用好该册书后，能确保拿到中档题（即核心题）的分数，高考成绩便可达到130分以上。该书按知识整合和数学思想方法来编排，体现数学的核心本质与应用价值，总题量有300题。

《第三关　压轴题》所选的题目为稍难题，若按整卷满分150分计，高考稍难题分值在15分左右。基础较好的考生认真用好该册书后，能确保拿到稍难题（即压轴题）的分数，高考成绩便可达140分以上。该书按“题型”和能力要求来编排，对每一类型的压轴题作详尽的介绍，总题量有100题。

当然，上述各类同学在用完相应的一本丛书后，可根据自己的具体情况，再选取其他一本或两本丛书来研读，这对进一步夯实基础知识，提高解题能力，取得更好成绩大有裨益。

本书《第三关　压轴题》为丛书的第三册。按照考试大纲对各种能力及数学思想方法的要求，对压轴题进行了适当的梳理。本书共九章，在各章的评述中，详尽讲解了该章节的压轴题所涉及的知识在高考中的表现形式与命题趋势，并通过典型例题加以说明。对各章节内容，本书还选取相应的即时巩固试题（题型有选择题、填空题、解答题等）让读者练习巩固，以检验自

己对该专题知识掌握的程度。相信大家认真阅读本书并做好相关试题(书末附有答案与提示)后会受益匪浅,特别是基础较好的同学一定会过好“压轴”关。

吃透百题,胜券在握。愿读者增强信心,闯过“基础题”、“核心题”、“压轴题”三关,在数学高考中打个漂亮仗!

编者

目录

第一讲　函数与导数 / 1

一、探究导函数与原函数图象之间的关系 / 1
二、探讨切线问题 / 2
三、求函数的单调性问题 / 4
四、求函数的极值问题 / 5
五、求函数的最值问题 / 6
六、求解某些简单的实际问题 / 7
七、探究不等式恒成立问题 / 9
八、探究与抽象函数有关的问题 / 11
九、探究与二次函数有关的综合性问题 / 12
十、三次函数有关性质新探 / 14
十一、以导数为工具探索函数图象的局部性态 / 17
十二、函数、导数与数列、不等式综合应用 / 19

第二讲　数列与不等式 / 21

一、探寻数列的构成规律 / 21
二、探求数列的前 n 项和 / 22
三、求有数列参与的不等式恒成立条件下的参数问题 / 23
四、有数列参与的不等式的证明问题 / 24
五、求数列中的最大值问题 / 25
六、求解探索性问题 / 26
七、放缩法在与数列有关的不等式中的应用 / 27
八、善于用函数的观点看数列问题 / 30
九、构造法在与数列有关的问题中的应用 / 31
十、数列与不等式中的综合性问题 / 32

第三讲　解析几何 / 34

一、直线与圆的位置关系 / 34
二、圆锥曲线间的相互依存关系 / 35
三、直线与圆锥曲线的位置关系 / 36
四、圆锥曲线与平面几何的交汇 / 39
五、圆锥曲线与向量的交汇 / 40
六、定点、定值问题 / 42
七、与圆锥曲线定义有关的问题 / 45

八、对称问题 / 46
九、解析几何与导数的交汇 / 48
十、探索性问题 / 49
十一、最值与范围问题 / 53

第四讲 应用性问题 / 56
一、函数模型 / 56
二、数列模型 / 67
三、方程与不等式模型 / 71
四、解析几何模型 / 72
五、三角函数与解三角形模型 / 74

第五讲 数形结合 / 77
一、通过坐标系形题数解 / 77
二、通过转化构造数题形解 / 81

第六讲 分类与整合 / 86
一、通过对数学概念内涵的分类来解决问题 / 86
二、数学问题等价转化时需要的分类讨论 / 88
三、探究问题的多种可能性或多重步骤需要分类讨论 / 89
四、数学的运算法则本身需要的分类讨论 / 90
五、通过对参数的分类讨论解决问题 / 91

第七讲 化归与转化 / 93
一、通过构造方程组进行转化 / 93
二、等与不等的相互转化 / 94
三、特殊与一般的相互转化 / 95
四、整体与局部的相互转化 / 96
五、高维与低维的相互转化 / 98
六、数与形的相互转化 / 98
七、函数与方程、不等式的相互转化 / 99
八、根据量的变与不变实施转化 / 103

第八讲 探索性问题 / 107
一、条件追溯型 / 107
二、结论探索型 / 109
三、存在判断型 / 113
四、方法探究型 / 121

第九讲 创新性问题 / 123
一、以新运算给出的发散型创新题 / 123

二、以命题的推广给出的类比、归纳型创新题 / 124
三、以新知识为载体给出的背景新颖的创新题 / 126
四、以图形为背景的创新性问题 / 127
五、以新数表为背景的创新性问题 / 128
六、以新概念、新定义给出的信息迁移创新题 / 130

参考答案 / 136

第一讲　函数与导数

命题特点与趋势

从最近几年全国及各省市新课程数学高考试卷的考查内容来看，函数与导数这部分内容在高考中的考查可以说是全方位的，从考查要求来讲，它不仅有基础知识、基本技能的考查，更有数学思想、数学本质的考查，从考查内容来看，它不仅有函数知识内部的显性考查，更有与其他主干知识(数列、不等式、解析几何等)相结合的隐性考查.涉及函数解析式、函数的定义域、函数值域与最值、函数的图象与性质等知识内容以及函数与方程、分类讨论、数形结合、等价转化等思想方法都是函数与导数这部分内容高考考查的热点.

解题要领

本讲的知识载体主要是三次函数、指数函数与对数函数等综合题.主要题型:(1)利用导数研究函数的单调性、极值与最值问题;(2)考查以函数为载体的实际应用题，主要是首先建立所求量的目标函数，再利用导数进行求解;(3)灵活应用函数图象与性质等.

一、探究导函数与原函数图象之间的关系

如果原函数在定义域内可导，则原函数的图象 $f(x)$ 与其导函数 $f'(x)$ 的图象有密切的关系：

1. 导函数 $f'(x)$ 在 x 轴上、下方图象与原函数图象上升、下降的对应关系：

(1) 若导函数 $f'(x)$ 在区间 D 上恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 D 上为增函数，由此进一步得到导函数 $f'(x)$ 图象在 x 轴上方的图象对应的区间 D 为原函数图象中的上升区间 D；

(2) 若导函数 $f'(x)$ 在区间 D 上恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 D 上为减函数，由此进一步得到导函数 $f'(x)$ 图象在 x 轴下方的图象对应的区间 D 为原函数图象中的下降区间 D.

2. 导函数 $f'(x)$ 图象的零点与原函数图象的极值点对应关系：

导函数 $f'(x)$ 图象的零点是原函数的极值点.如果导函数在零点的左侧为正，右侧为负，则导函数的零点为原函数的极大值点；如果导函数在零点的左侧为负，右侧为正，则导函数的零点为原函数的极小值点.

001　如果函数 $y=f(x)$ 的图象如图 1-1，那么导函数 $y=f'(x)$ 的图象可能是(　　).

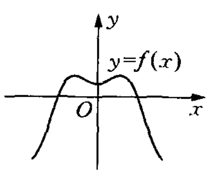
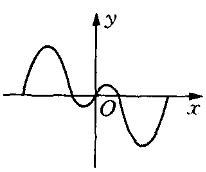
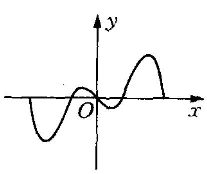


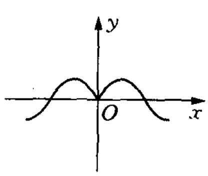
图 1-1



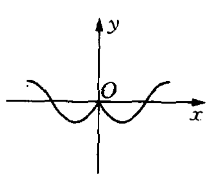
A.



B.



C.



D.

【命题意图】考查导函数与原函数图象之间的关系.

【答题要旨】根据原函数 $y=f(x)$ 的图象可知，$f(x)$有两个上升区间，有两个下降区间，且第一个区间为上升区间，然后相间出现，则反映在导函数图象上就是有两部分图象在 x 轴的上方，有两部分图象在 x 轴的下方，且第一部分在 x 轴上方，然后相间出现.

【满分解答】

解析：由原函数的单调性可以得到导函数的正负情况依次是正→负→正→负，只有答案 A 满足.

【易错分析】没有把握原函数图象与导函数图象之间的对应关系，以为导函数的图象与原函数的图象走势一致，误选 C.

【即时巩固】

001 设 $f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数，$y=f'(x)$ 的图象如图 1-2 所示，则 $y=f(x)$ 的图象最有可能是(　　).

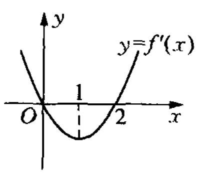
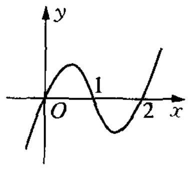
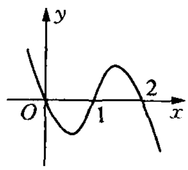


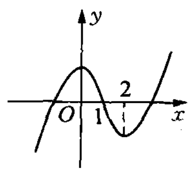
图 1-2



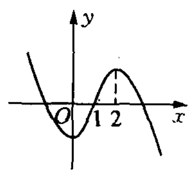
A.



B.



C.



D.

二、探讨切线问题

众所周知，导数 $f'(x_0)$的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 上以 $P(x_0,\ f(x_0))$为切点所作切线的斜率. 相对于传统知识而言，由导数所衍生出的“曲线的切线问题”，在思路、方法及过程上，都使人耳目一新，彰显出其别具一格的魅力. 尽管如此，目前在高中数学教学中，对此类问题的要求仍不高，试题的设置基本停留在“已知切点求斜率”的难度上. 然而，随着对学生综合能力要求的不断提高，对“导数的理解与运用”的研究也将不断深化.

002 已知函数 $f(x)=x^3+3x^2-1\ (x\in\mathbf{R})$，记 $y=f(x)$ 的图象为曲线 C.

(1) 求证：若以曲线 C 上的任意一点 $P(x_0,\ y_0)$为切点作 C 的切线，则切线的斜率存在最小值-3；

(2) 求证：以曲线 C 上的两个动点 A、B 为切点分别作 C 的切线 l_1、l_2，若 $l_1 \parallel l_2$ 恒成立，则动直线 AB 恒过某定点 M；

(3) 在(2)条件下，当直线 AB 的斜率 $k_{AB}=2$ 时，求$\triangle OAB$ 的面积(其中 O 是坐标原点).

【命题意图】在导数背景下的切线问题，远不止仅停留在“求解”的层面上. 导数的几何意义，促使函数与解析几何等知识在知识网络的交汇处产生了“共鸣”，为我们在知识的掌握与方法的运用上，提供了可进一步拓展的空间. 本题通过以曲线上任意一点为切点的切线斜率，来体现导数的“函数性”，并通过导数的相等关系，生动地刻划了函数的“对称性”. 而其中所蕴含的整体代换的数学方法，以及化归与转化的数学思想，又使试题具有较强的考查功能.

【答题要旨】第(1)小题先求导函数 $f'(x)$，转化为求二次函数的最值问题；第(2)小题通过“设而不求”的思想，对问题进行整体代换；第(3)小题利用弦长公式进行计算.

【满分解答】

解:(1) 由 $f(x)=x^3+3x^2-1$ 得 $f'(x)=3x^2+6x$.

所以曲线 C 在 $P(x_0,\ y_0)$处的切线的斜率为

$$f'(x_0)=3x_0^2+6x_0=3(x_0+1)^2-3\geqslant -3.$$

当且仅当 $x_0=-1$，即当切点 P 为$(-1,\ 1)$时，切线斜率取得最小值-3.

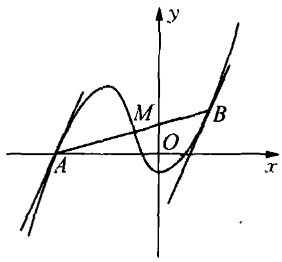


图 1-3

(2) 如图 1-3，设点 A、B 坐标分别为 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$，则 $x_1\neq x_2$. 因为 $l_1 /\!/ l_2$，所以 $f'(x_1)=f'(x_2)$，即 $3x_1^2+6x_1=3x_2^2+6x_2\Rightarrow 3(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)=0$.

又因为 $x_1\neq x_2$，所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=-1$.

所以 $$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)+3(x_1^2+x_2^2)-2}{2}$$
$$=\frac{(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]+3[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-2}{2}$$
$$=\frac{-2\times[(-2)^2-3x_1x_2]+3[(-2)^2-2x_1x_2]-2}{2}$$
$$=1.$$

从而得知，点$(-1,\ 1)$是线段 AB 中点，即动直线 AB 恒过定点 $M(-1,\ 1)$.

(3) 由(2)可知，直线 AB 恒过点 $M(-1,\ 1)$，且斜率为 2. 所以直线 AB 的方程为 $y-1=2(x+1)$，即 $2x-y+3=0$. 故原点 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

又因为 $k_{AB}=2$，即 $$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{(x_1^3-x_2^3)+3(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$
$$=(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)+3(x_1+x_2)$$
$$=(x_1+x_2)^2+3(x_1+x_2)-x_1x_2$$
$$=(-2)^2+3\times(-2)-x_1x_2$$
$$=2,$$

所以 $x_1x_2=-4$.

从而，$|AB|=\sqrt{1+2^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5}\times\sqrt{4+16}=10$.

故 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}d\cdot|AB|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\times 10=3\sqrt{5}$.

【易错分析】对第(2)小题的计算没有信心，不敢动笔.

【即时巩固】

002 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}\ln x$，$g(x)=\mathrm{e}^{-1}\cdot f(x)-(x+1)$. ($\mathrm{e}=2.718\cdots$)

(1) 求函数 $g(x)$的极大值；

(2) 对于函数 $f(x)$与 $h(x)$定义域上的任意实数 x，若存在常数 k、b，使得 $f(x)\leqslant kx+b$ 和 $h(x)\geqslant kx+b$ 都成立，则称直线 $y=kx+b$ 为函数 $f(x)$与 $h(x)$的“分界线”. 设函数 $h(x)=\dfrac{1}{2}x^2$，试探究函数 $f(x)$与 $h(x)$是否存在“分界线”？若存在，请加以证明，并求出 k、b 的值；若

不存在,请说明理由.

三、求函数的单调性问题

若 $f(x)$在某区间上可导,则由 $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) 可推出 $f(x)$为增(减)函数,但反之则不一定,如:函数 $f(x)=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,而 $f'(x)\geqslant 0$. $f(x)$在区间 D 内单调递增(减)的充要条件是 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$,且 $f'(x)$在$(a,\ b)$的任意子区间上都不恒为零. 利用导数求解函数单调性的主要题型:(1)根据函数解析式,求函数的单调区间;(2)根据函数的单调性求解参数问题;(3)求解与函数单调性相关的其他问题,如函数图象的零点、不等式恒成立等问题.

003 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$, $a\in\mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$的单调区间;

(2) 设函数 $f(x)$在区间$\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$内是减函数,求 a 的取值范围.

【命题意图】 通过导数研究三次函数的单调性.

【答题要旨】 第(1)小题先求导函数 $f'(x)$,由于含有参数 a,根据判别式确定对 a 的分类标准,进而确定单调区间;第(2)小题利用函数在已知区间上是减函数建立关于 a 的不等式组,由此可确定 a 的范围.

【满分解答】

解:(1) 由 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$, 求导得 $f'(x)=3x^2+2ax+1$.

当 $a^2\leqslant 3$ 时, $\Delta=4(a^2-3)\leqslant 0$, $f'(x)\geqslant 0$, 所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a^2>3$ 时,由 $f'(x)=0$, 求得两根为 $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-3}}{3}$.

则函数 $f(x)$在区间$\left(-\infty,\ \dfrac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3}\right)$上单调递增,

在区间$\left(\dfrac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3},\ \dfrac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3}\right)$上单调递减,在区间$\left(\dfrac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3},\ +\infty\right)$上单调递增.

(2) 依题意,得$\begin{cases}f'\left(-\frac{2}{3}\right)\leqslant 0,\\ f'\left(-\frac{1}{3}\right)\leqslant 0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}3\left(-\frac{2}{3}\right)^2+2a\left(-\frac{2}{3}\right)+1\leqslant 0,\\ 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2a\left(-\frac{1}{3}\right)+1\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 2$.

经检验,当 $a\geqslant 2$ 时, $f(x)$在区间$\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$内是减函数.

综上, $a\geqslant 2$.

【易错分析】第(1)小题，把 $\Delta=4(a^2-3)=0$ 的情况漏掉；第(2)小题也可通过解不等式

组 $\begin{cases}\dfrac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3}\leqslant-\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3}\geqslant-\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 且 $a^2>3$，进行求解，但解无理不等式要注意等价性.

【即时巩固】

003 已知函数 $f(x)=x^3+(1-a)x^2-a(a+2)x+b\ (a,\ b\in\mathbf{R})$.

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象过原点，且在原点处的切线斜率是 -3，求 a、b 的值；

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,\ 1)$ 上不单调，求 a 的取值范围.

四、求函数的极值问题

极值点的导数一定为 0，但导数为 0 的点不一定是极值点. 利用导数求函数极值的主要题型：(1)根据函数解析式求极值；(2)根据函数的极值求解参数问题. 解答时要注意准确应用利用导数求极值的原理求解.

004 已知函数 $f(x)=\dfrac{kx+1}{x^2+c}\ (c>0$，且 $c\neq1,\ k\in\mathbf{R})$ 恰有一个极大值点和一个极小值点，其中一个是 $x=-c$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的另一个极值点；

(2) 求函数 $f(x)$ 的极大值 M 和极小值 m，并求 $M-m\geqslant1$ 时 k 的取值范围.

【命题意图】以分式函数为背景，通过导数研究函数的极值，综合了函数、方程、不等式的相关知识，考查分类讨论的思想.

【答题要旨】先求导函数 $f'(x)$，然后令 $f'(-c)=0$ 及一元二次方程根与系数的关系可解决第(1)小题；而解答第(2)小题须对 k 与 c 进行分类讨论.

【满分解答】

解：(1) $f'(x)=\dfrac{k(x^2+c)-2x(kx+1)}{(x^2+c)^2}=\dfrac{-kx^2-2x+ck}{(x^2+c)^2}$.

由题意知 $f'(-c)=0$，即得 $c^2k-2c-ck=0$，$c=1+\dfrac{2}{k}$.　（∗）

因为 $c\neq1$，所以 $k\neq0$.

由 $f'(x)=0$，得 $-kx^2-2x+ck=0$，

由韦达定理知另一个极值点为 $x=1$.

(2) 由(∗)式得 $c=1+\dfrac{2}{k}$. 当 $c>1$ 时，$k>0$；当 $0<c<1$ 时，$k<-2$.

① 当 $k>0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,\ -c)$和$(1,\ +\infty)$内是减函数，在$(-c,\ 1)$内是增函数.

所以 $M=f(1)=\dfrac{k+1}{c+1}=\dfrac{k}{2}>0$，$m=f(-c)=\dfrac{-kc+1}{c^2+c}=\dfrac{-k^2}{2(k+2)}<0$.

由 $M-m=\dfrac{k}{2}+\dfrac{k^2}{2(k+2)}\geqslant 1$ 及 $k>0$，解得 $k\geqslant\sqrt{2}$.

② 当 $k<-2$ 时，$f(x)$在$(-\infty,\ -c)$和$(1,\ +\infty)$内是增函数，在$(-c,\ 1)$内是减函数.

所以 $M=f(-c)=\dfrac{-k^2}{2(k+2)}>0$，$m=f(1)=\dfrac{k+1}{c+1}=\dfrac{k}{2}<0$.

此时 $M-m=\dfrac{-k^2}{2(k+2)}-\dfrac{k}{2}=1-\dfrac{(k+1)^2+1}{k+2}\geqslant 1$ 恒成立.

综上可知，所求 k 的取值范围为$(-\infty,\ -2)\cup[\sqrt{2},\ +\infty)$.

【易错分析】第(2)小题对 k 与 c 之间关系的处理不够明确.

【即时巩固】

004 已知 $x=3$ 是函数 $f(x)=a\ln(1+x)+x^2-10x$ 的一个极值点.

(1) 求 a；

(2) 求函数 $f(x)$的单调区间；

(3) 若直线 $y=b$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有 3 个交点，求 b 的取值范围.

五、求函数的最值问题

函数在闭区间上的最值是比较所有极值点与端点的函数值所得结果. 另外求解函数的最值问题，还可以直接结合函数的单调性来求解. 利用导数求解函数最值问题的主要题型：(1)根据函数的解析式求函数的最大值；(2)根据函数在一个区间上的最值情况求解参数问题.

005 已知 a 是实数，函数 $f(x)=x^2(x-a)$.

(1) 若 $f'(1)=3$，求 a 的值及曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,\ f(1))$处的切线方程；

(2) 求 $f(x)$在区间$[0,\ 2]$上的最大值.

【命题意图】以三次函数为背景，考查分类讨论的思想.

【答题要旨】首先求函数 $f'(x)$，再解方程 $f'(x)=0$，得两个根，而两根含有参数，但不知两根的大小，因此须分类讨论函数 $f(x)$的单调区间，进而确定 $f(x)$在给定区间上的最大值.

【满分解答】

解：(1) 因为 $f'(x)=3x^2-2ax$，所以 $f'(1)=3-2a=3$，解得 $a=0$.

又当 $a=0$ 时，$f'(1)=3$，$f(1)=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,\ f(1))$处的切线方程为 $3x-y-2=0$.

(2) $f'(x)=3x^2-2ax$. 令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=\frac{2a}{3}$.

当 $\frac{2a}{3}\geqslant 0$，即 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$在$[0, 2]$上单调递增，从而 $f(x)_{\max}=f(2)=8-4a$.

当 $\frac{2a}{3}\geqslant 2$，即 $a\geqslant 3$ 时，$f(x)$ 在$[0, 2]$ 上单调递减，从而 $f(x)_{\max}=f(0)=0$.

当 $0<\frac{2a}{3}<2$，即 $0<a<3$ 时，由 $f'(x)<0$ 及 $0\leqslant x\leqslant 2$，解得 $0<x<\frac{2a}{3}$；

由 $f'(x)>0$ 及 $0\leqslant x\leqslant 2$，解得$\frac{2a}{3}<x\leqslant 2$.

所以 $f(x)$在$\left[0, \frac{2a}{3}\right]$上单调递减，在$\left[\frac{2a}{3}, 2\right]$上单调递增.

又 $f(0)=0$，$f(2)=8-4a$，

故此时 $f(x)_{\max}=\begin{cases}8-4a, & 0<a\leqslant 2,\\ 0, & 2<a<3.\end{cases}$

综上所述，$f(x)_{\max}=\begin{cases}8-4a, & a\leqslant 2,\\ 0, & a>2.\end{cases}$

【易错分析】第(2)小题分类讨论的层次不够清晰.

【即时巩固】

005' 已知 a 是实数，函数 $f(x)=\sqrt{x}(x-a)$.

(1) 求函数 $f(x)$的单调区间；

(2) 设 $g(a)$为 $f(x)$在区间$[0, 2]$上的最小值.

① 写出 $g(a)$的表达式；

② 求 a 的取值范围，使得 $-6\leqslant g(a)\leqslant -2$.

六、求解某些简单的实际问题

此类试题主要是利用函数、不等式与导数相结合设计实际应用问题，旨在考查考生在数学应用方面阅读、理解陈述的材料，能综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力，这是高考中的一个热点.

006 水库的蓄水量随时间而变化，现用 t 表示时间，以月为单位，年初为起点，以 $\mathrm{i}-1<t\leqslant \mathrm{i}$ 表示第 i 月份 ($\mathrm{i}=1, 2, \cdots, 12$). 根据历年数据，某水库的蓄水量(单位：亿立方米)关于 t 的近似函数关系式为

$$V(t)=\begin{cases}(-t^2+14t-40)\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}+50, & 0<t\leqslant 10,\\ 4(t-10)(3t-41)+50, & 10<t\leqslant 12,\end{cases}$$

(1) 该水库的蓄水量小于 50 的时期称为枯水期. 问同一年内哪几个月份是枯水期?

(2) 求一年内该水库的最大蓄水量(取 $e = 2.7$ 计算).

【命题意图】 本题是以分段函数为背景的实际应用问题,考查分类讨论思想,并通过导数研究函数的最值.

【答题要旨】 根据解答分段函数"对号入座"的解题原则,分别利用两段函数表达式建立不等式可求得第(1)小题;而第(2)小题则须先求函数 $V'(t)$,然后利用导数与函数最值关系求解.

【满分解答】

解:(1) ① 当 $0 < t \leqslant 10$ 时,$V(t) = (-t^2 + 14t - 40)e^{\frac{1}{4}t} + 50 < 50$,

化简得 $t^2 - 14t + 40 > 0$.

解得 $t < 4$ 或 $t > 10$,又 $0 < t \leqslant 10$,故 $0 < t < 4$.

② 当 $10 < t \leqslant 12$ 时,$V(t) = 4(t-10)(3t-41) + 50 < 50$,

化简得 $(t-10)(3t-41) < 0$.

解得 $10 < t < \frac{41}{3}$,又 $10 < t \leqslant 12$,故 $10 < t \leqslant 12$.

综合得 $0 < t < 4$ 或 $10 < t \leqslant 12$. 故知枯水期为 1 月,2 月,3 月,11 月,12 月共 5 个月.

(2) 由(1)知 $V(t)$ 的最大值只能在 $[4, 10]$ 内达到.

$$V'(t) = \left(-\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 4\right)e^{\frac{1}{4}t} = -\frac{1}{4}(t+2)(t-8)e^{\frac{1}{4}t}.$$

令 $V'(t) = 0$,解得 $t = 8$($t = -2$ 舍去).

当 t 变化时,$V'(t)$ 与 $V(t)$ 的变化情况如下表:

t	$(4, 8)$	8	$(8, 10)$
$V'(t)$	$+$	0	$-$
$V(t)$	↗	极大值	↘

由上表,$V(t)$ 在 $t = 8$ 时取得最大值 $V(8) = 8e^2 + 50 = 108.32$ (亿立方米).

故知一年内该水库的最大蓄水量是 108.32 亿立方米.

【易错分析】 对函数 $V(t) = (-t^2 + 14t - 40)e^{\frac{1}{4}t} + 50$ 的求导要准确.

【即时巩固】

006 统计表明,某种型号的汽车在匀速行驶中每小时耗油量 y(升)关于行驶速度 x(千米/时)的函数解析式可以表示为 $y = \frac{1}{128\,000}x^3 - \frac{3}{80}x + 8$ $(0 < x \leqslant 120)$. 已知甲、乙两地相距 100 千米.

(1) 当汽车以 40 千米/时的速度匀速行驶时,从甲地到乙地要耗油多少升?

(2) 当汽车以多大的速度匀速行驶时,从甲地到乙地耗油最少? 最少为多少升?