INEAR
ALGEBRA

线性代数

钱晓莉 李慧琼 主编

浙江工商大学出版社
Zhejiang Gongshang University Press

INEAR
ALGEBRA

线性代数

钱晓莉 李慧琼 主编

浙江工商大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/钱晓莉,李慧琼主编.—杭州:浙江工商大学出版社,2010.8

ISBN 978-7-81140-185-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①钱… ②李… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 151374 号

线性代数

钱晓莉　李慧琼　主编

责任编辑	陈维君
责任校对	张振华
封面设计	刘　韵
责任印制	汪　俊
出版发行	浙江工商大学出版社 (杭州市教工路 198 号　邮政编码 310012) (Email:zjgsupress@163.com) (网址:http://www.zjgsupress.com) 电话:0571-88904980,88831806(传真)
排　　版	杭州兴邦电子印务有限公司
印　　刷	杭州杭新印务有限公司
开　　本	880mm×1230mm　1/32
印　　张	6.5
字　　数	181 千字
版 印 次	2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81140-185-1
定　　价	20.00 元

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571-88804227

前　言

线性代数是经济管理类各专业的一门重要基础课程，在经济科学和管理科学中有广泛的应用。本课程的学习，不仅为学生后继课程的学习打下必要的数学基础，而且为经济管理的定量分析提供了有力的工具，对于学生逻辑思维能力的培养和创新思维的开发都有着不可替代的重要作用。

本教材是在多年教学实践的基础上、参照教育部关于全国非数学专业(经济管理类)硕士研究生考试数学(三)对线性代数部分的基本要求编写的，可作为高等学校经济管理类各专业学生的线性代数教材。全书共分5章，第一章介绍了行列式的概念、性质以及行列式的计算方法；第二章介绍了矩阵这一重要工具，讨论了矩阵的运算、矩阵的初等变换和矩阵的秩；第三章以矩阵为工具，讨论了线性方程组的解法和线性方程组解的结构；第四章介绍了矩阵的特征值和特征向量，并以矩阵的特征值和特征向量为工具研究了矩阵的对角化问题；第五章介绍了二次型概念、二次型化标准型和判断二次型为正定的方法。在内容的编写上，我们力求通俗易懂地介绍线性代数的基本理论和方法，用简单而有代表性的例题，使学生通过本教材的学习对线性代数的理论及方法有一个清楚的了解。针对线性代数概念较多、各知识点关联性较强的特点，教材各章除配备了难易程度不同的计算和证明的习题(A)外，还配备了加强基本概念理解的习题

(B)。

本书由浙江工商大学统计与计算学院组织编写，大纲和体系由集体讨论而定。第一、四章由李慧琼编写；第二章由王海敏编写；第三章由钱晓莉编写；第五章由钱春编写；全书最后由钱晓莉、李慧琼修改定稿。

本书编写过程中参考了大量的国内外教材；浙江工商大学出版社对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助，尤其是陈维君老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血；浙江工商大学统计与数学学院自始至终对本书的出版给予了大力支持，在此一并致谢！

由于编者水平有限，教材中一定存在不妥之处，恳请专家、同行、读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2010年6月于浙江工商大学

目录
Contents

第一章 行 列 式

在线性代数中，行列式是一个基本工具，很多问题的讨论都要用到它. 本章先简单介绍二阶、三阶行列式的定义，再讨论 n 阶行列式的定义、基本性质、计算方法，最后是著名的克莱姆法则.

§1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 二阶和三阶行列式

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相等的一次方程组时提出的(以后常把一次方程组称为线性方程组)，例如对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}, \tag{1-1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可以利用消元法求得方程组(1-1)有唯一解，且有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

为了便于记忆，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

并称等式左边的为**二阶行列式**.

二阶行列式的计算可用图 1-1 来记忆.

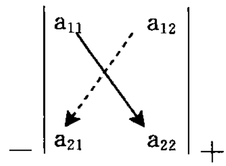

图 1-1

利用二阶行列式的定义，式(1-2)中的分子分母可分别记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

因此，当 $D\neq 0$ 时，式(1-2)可用下述公式表示：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

同样，对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

用消元法求解时，其求解过程中会遇到式子

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

为了便于记忆，令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{aligned},$$

并称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为**三阶行列式**. 行列式中横排、纵排分别称为它的**行和列**，数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为它的**元素**，而 i 和 j 表示元素 a_{ij} 的行标和列标. 行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，主对角线上的元素称为**主对角元**，相应地从右上角到左下角的对角线称为**次对角线**，其上元素称为**次对角元**.

三阶行列式的计算可用图 1-2 来记忆，这一计算方法称为对角

线法则.

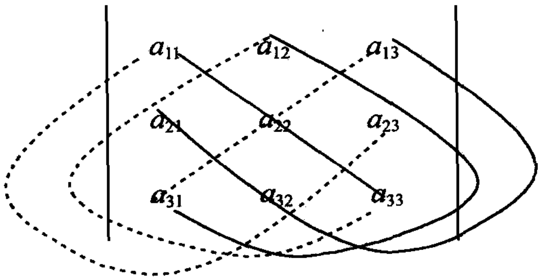

图 1-2

对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的解也有类似于二元一次方程组的结论:

当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时,方程组有唯一解,并且有

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1-3}$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

现在已定义了二阶、三阶行列式,同样我们可定义四阶甚至 n 阶行列式. 但是,对于 n 阶行列式($n>3$),不能如图 1-2(对角线法则)那样定义. 如果那样定义,当 $n>3$ 时,它将与二阶、三阶行列式没有统一的运算性质,而且对 n 元线性方程组也得不到像式(1-3)那样的求解公式. 因此,对一般的 n 阶行列式要用另外的方法来定义. 为此,需引入排列的逆序数的概念.

1.1.2 排列的逆序数

定义 1.1 由 n 个不同的自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，称为一个 **n 级排列**.

例如，4213 是一个四级排列，35241 是一个五级排列.

例 1 由自然数 1,2,3 可组成的三级排列共有 $3!=6$ 个. 它们是

$$123;132;213;231;312;321.$$

一般地，n 级排列的总数有 $n!$ 个.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 的前面，即 $i_s>i_t$ 时，称这一对数 i_s,i_t 构成一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数，称为它的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如，2431 中，21,43,41,31 构成逆序，因此 $\tau(2431)=4$. 而 45321 中，43,42,41,53,52,51,32,31,21 构成逆序，因此 $\tau(45321)=9$.

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如，2431 是偶排列，45321 是奇排列.

在 n 级排列 $12\cdots n$ 中，各个数是按照由小到大的自然顺序排列的，这一排列称为 n 元自然序排列. 由于其中任何一个数对都不构成逆序，因此 $\tau(12\cdots n)=0$.

逆序数为零的排列，我们规定它是偶排列.

例 2 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

解 $\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{1}{2}n(n-1)$.

容易看出，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，$n(n-1)\cdots 21$ 是偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$n(n-1)\cdots 21$ 是奇排列.

定义 1.4 一个排列中，如果交换其中某两个数的位置，而其余各数位置不变，就得到另一个排列. 这样的变换称为一个**对换**.

例如，在五级排列 45321 中，经过 2,4 对换得到一个新的五级排列 25341. 易知 $\tau(45321)=9$，$\tau(25341)=6$，即 45321 是奇排列，25341

是偶排列.

由此看出,经过一次对换,排列改变了奇偶性.

一般地,我们有下述结论:

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

定理 1.2 在全部 n 级排列中($n\geqslant 2$),奇偶排列各占一半.

证明略.

1.1.3 n 阶行列式

为了引入 n 阶行列式的概念,我们首先考察三阶行列式的定义.三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

其特点是:(1)恰有 3!项;(2)每一项恰好是不同行不同列的三个元素的乘积;(3)每一项前的符号也有正负之分.其中每一项都可以写成下述形式:

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}. \tag{1-4}$$

当每一项的行标成自然序排列时,其列标就构成三级排列 $(j_1j_2j_3)$.当 $(j_1j_2j_3)$ 为偶排列时,式(1-4)取正号;当 $(j_1j_2j_3)$ 为奇排列时,式(1-4)取负号.因此,式(1-4)前的符号是

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)},$$

这样的项的个数,恰好是所有三级排列的个数 $3!=6$ 个.所以三阶行列式也可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示 $j_1j_2j_3$ 取遍所有三级排列时,对形如 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的项求和.

对于二阶行列式,我们可以发现同样的规律.因此,我们很自然地把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式.

定义 1.5 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$（简记 $|a_{ij}|_1^n$）等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-5}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，式(1-5)取正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，式(1-5)取负号. 即 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1-6}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有 n 级排列求和.

由于 n 级排列共有 $n!$ 个，所以式(1-6)所表示的和共有 $n!$ 项. 特别地，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

例 3 计算 $D=\begin{vmatrix} 3x & -1 & 3 & 2 \\ x & x & 1 & -2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ -x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的展开式中 x^4 与 x^3 项的系数.

解 由于行列式 D 的展开式中的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，故要出现 x^4 的项，则 a_{ij_i} 均需取到含 x 的元素. 因此含 x^4 的项为

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=6x^4,$$

该项的系数为 6.

类似地，含 x^3 的项为

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=2x^3 \text{ 和 } (-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=2x^3,$$

于是 D 中含 x^3 的系数为 $2+2=4$.

例 4 计算 n 阶下三角行列式（当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线以

上元素都为零的行列式)

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由行列式的定义 $D=\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,在展开式中,只有当 $j_1=1,j_2=2,\cdots,j_n=n$ 时,乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才不等于零.因此

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由此可知,**下三角行列式的值等于主对角元素的乘积.**

同理可得:

n 阶上三角行列式(当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$,即主对角线以下元素都为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

n 阶对角行列式(当 $i\neq j$ 时,$a_{ij}=0$,即除主对角元素以外其余元素都为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由于数的乘法满足交换律,所以行列式各项中 n 个元素的顺序也可以任意交换.于是各项的符号规则还可以由下面的结论来代替.

定理 1.3 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_1^n$ 的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},\tag{1-7}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.

例如,已知 $a_{31}a_{24}a_{42}a_{13}$ 是四阶行列式中的一项,该项的符号为

$$(-1)^{\tau(3241)+\tau(1423)}=(-1)^{4+2}=1.$$

特别地,当项(1-7)的列标按自然序排列时,这一项就是

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

由此得到:

推论 对于 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_1^n$,有

$$D=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.\tag{1-8}$$

§1.2 行列式的性质

直接利用行列式的定义计算行列式一般较为烦琐.因此,我们要从定义推导出行列式的一些性质,以简化行列式的计算.

1.2.1 行列式的性质

定义 1.6 将行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的行与列对应互换得到新的行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式与它的转置行列式值相等.

证 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

将 D^{T} 中元素用新符号 $b_{ij}(b_{ij}=a_{ji},i,j=1,2,\cdots,n)$ 重新写出并由式(1-6)知

$$D^{T}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$

$$=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

由式(1-8),得 $D^{T}=D$.

性质 1 表明,在行列式中行和列的地位是相同的. 也就是说,对于"行"成立的性质,对于"列"也成立.

性质 2 交换行列式的某两行(列)的位置,行列式的值反号,即

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{j,n-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{j,n-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ j\text{行} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

推论 若行列式中有两行(列)完全相同,则行列式的值为零.

证 把行列式的第 i 行与第 j 行互换,有 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3 若行列式中某一行(列)每个元素都有公因子 k,则 k 可提到行列式符号外,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

证 根据行列式的定义,有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (k a_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= kD. \end{aligned}$$

推论 1 如果行列式中有一行(列)元素全为零,则行列式的值为零.

推论 2 如果行列式中有两行(列)元素对应成比例,则行列式的值为零.

性质 4 如果行列式的某一行(列)的每个元素都是两个数之和,则此行列式可以写成两个行列式之和.这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列)的元素与原行列式相同.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 左端$= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (a_{ij_i}+b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &\quad + \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \text{右端}. \end{aligned}$$