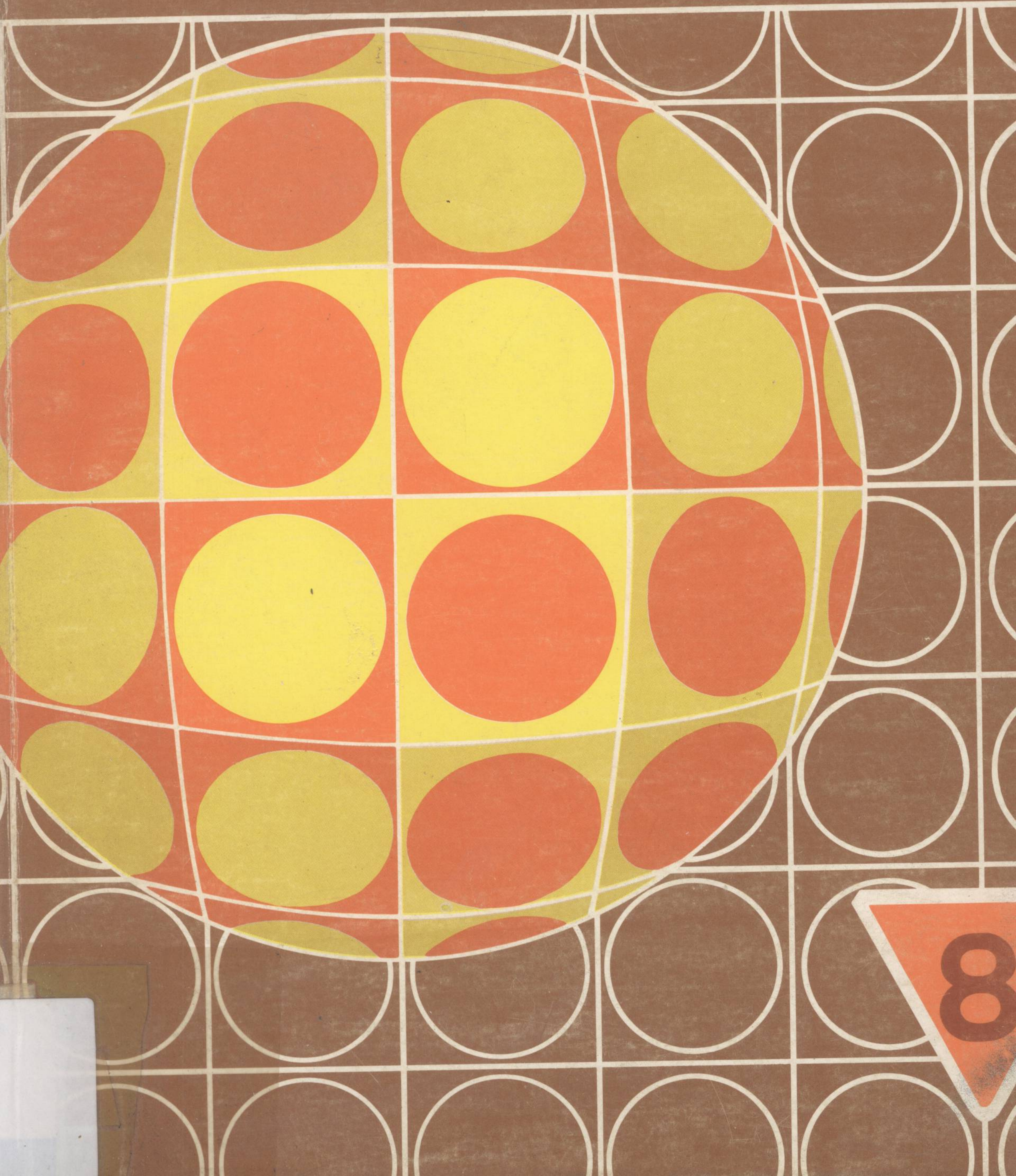
香港中學適用

數學



數學

第八册

勞國維 廖滌塵

香港人人書局有限公司印行

致　謝

承蒙香港葛量洪師範學院前任校長郭煒民先生 B. Sc., Dip. Ed. (H.K.), Dip. C. S. (Leeds) 校訂本書，並担任編纂顧問，在內容取材，風格體制，行文表達，和教學配合等方面，指導詳盡，提供具體幫助，使本書順利完成，謹申謝忱。

編者謹識

本書的使用方法——代編輯例言

本書依照教育司署課程發展委員會最新課程而編寫。也是一本配合香港考試局數學科會考課程三的中學數學課本，適合各校1980年 9 月起採用。因此，先在這裏說明本書的編輯目標、原則和使用方法，給教師和同學做參考。

(一) 本書第一至六册適合中一至中三年級學生使用，第七、八兩册適合中四年級學生使用。第九、十兩册適合中五年級學生使用。

(二) 本書的編寫目標，在使每一個學生都能夠從本書中體會到，數學不但是人類生活的實用工具，更是切實易學、有用有趣的科目。所以，本書對資料的選取，編寫的技巧，都曾全盤考慮，務使同學們在學習上有更强的適應力。

(三) 本書編寫原則除著重數學在商業、科學和工藝方面的應用外，並爲學生奠定數學基礎，使有升讀中六的能力。

(四) 本書教材的處理，由具體到抽象，由特殊到一般，透過討論展開教材，鼓勵學生自動尋求問題的結論。盡量利用直觀方法以培養學生的創造及欣賞能力，但又不失數學應有的邏輯性。

(五) 我們構想數學教學，可以分爲「課前預習」、「課內講習」和「課後練習」等三個過程。所以，本書各章各節教材都是環繞這三個教學過程而編寫。爲使教者易教，學者易學，特分別說明如下：

甲、本書有不少教材，學生應在課前進行預習或準備，使在上課時能夠討論得更深入和活動得更順利。

凡在課堂上進行提問教學，教師應讓學生有適當的時間去思考或展開討論。必要時，教師也可選取適當的時機，採用自問自答的方式進行總結。

乙、「例題」示算原是教學過程中，不可或缺的步驟，既可藉此探究計算技巧、演算層次和解題規律，更可養成獨立思考和計算能力。所以本書對「例題」的編擬和佈置，十分重視，部分「例題」的計算過程、答案、甚至作圖畫線、公式、定理和結論等，有時故意沒有排印在課本裏，只預留出空白的位置，好讓學生在教師的輔導下，進行學習思考和計算，把應塡的自己塡上去。

丙、本書在「例題」之後，即編擬若干「問題」，讓學生在課內試算，這是幫助學生克服學習困難，評量學習心得，和了解教學情況而特別佈置的教材。所以，「例題」和「問題」從教學上看，正是教師在堂上講，學生在堂上練的資料。

丁、本書習題編有多樣化的題目，以適應不同程度的實際要求，每教一課，教師可選擇若干題着學生在堂上或課外演算，這樣，本書的教材才會重點突出，在教學應用上才能掌握重心，在學習上才會獲得良好的成果。

戊、第十册附有複習及測驗，將全部教材作扼要整理，方便學生溫習，希望有溫故知新的功效。

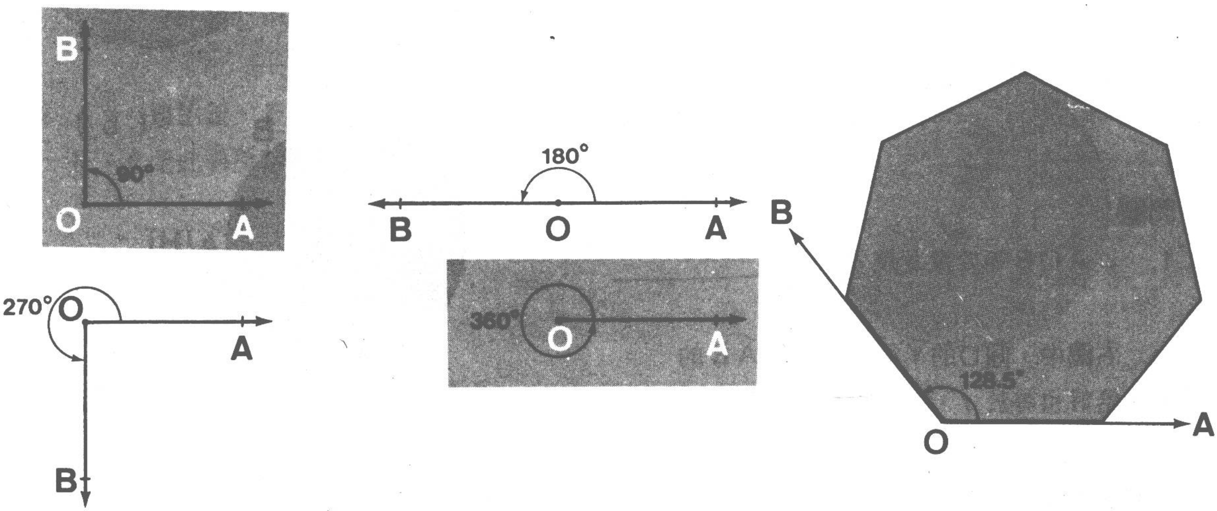
附帶請各位注意的，在本書各章各節中，雖然並沒有特別闢出“討論”一欄，其實，須要使用討論教學的地方，處處都是。在這裏所說的討論，並不是簡易的口頭問答，而是同學們透過思考說出自己的見解和不明白的地方，在教師的輔導下進行分析和總結。又本書每册編有教學手册，專供教師使用。

目次

度、分、秒制應用廣泛，大家熟知一平角等於180°，一直角等於90°，等邊三角形每一內角等於60°，亦不難計算出正七邊形一內角等於 $\frac{7-2}{7}\times 180°$，即 128°34′17″。一般量角器大概衹能將角量至最接近的0·5°。

由秒化做分，由分化做度，都是逢六十進一，所以度、分、秒制又稱為六十進制(sexagesimal system)。

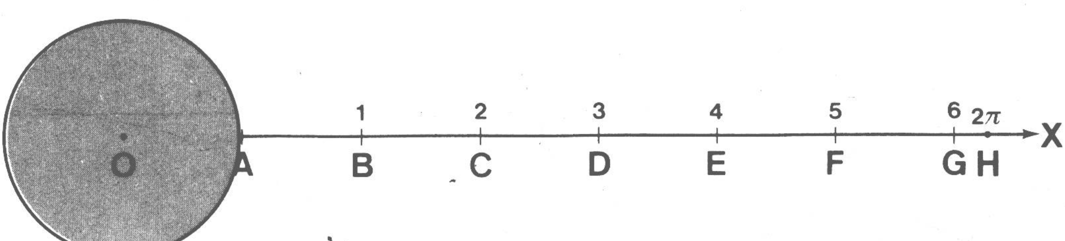
一角可視作一條半線依反時針方向繞它一端旋轉而產生。角的兩邊分別稱為始邊與終邊。若將角的頂點置於直角坐標的原點，始邊與x軸正方向疊合，則稱此角在標準位置(standard position)。以下是幾個在標準位置的角。

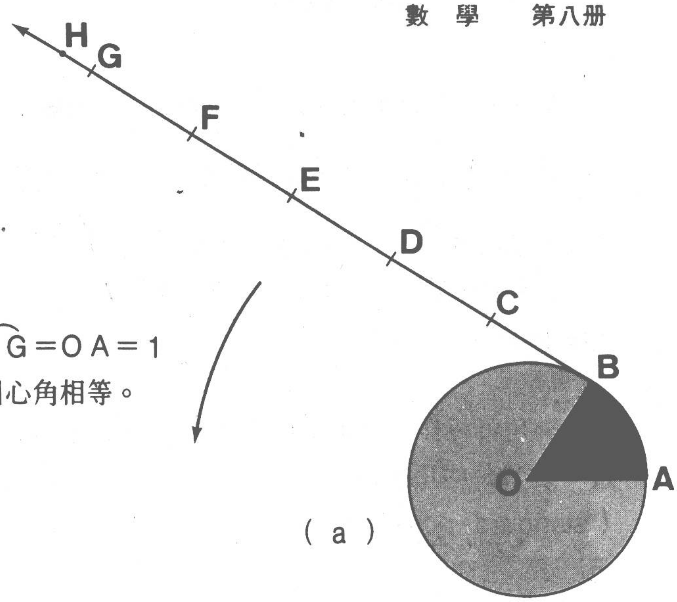


弧度制

設想數軸AX是一柔軟而不能拉長的線，點A，B，C，D，E，F，G及H順次代表實數0，1，2，3，4，5，6和2π。圓O是單位圓，A在此圓上。

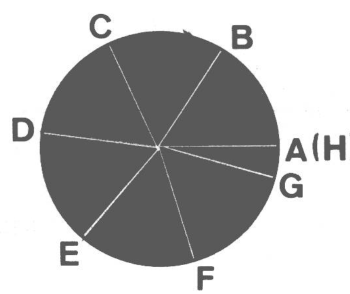
若A的位置固定，數軸依反時針方向繞繫於圓周上，則線段AH上各點皆映射在圓周上，H與A重疊。





(a)

顯然，各弧AB，BC，……
等皆與半徑OA的長度相等，
即　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FG}=OA=1$
　　由圓的基本性質知上述各弧所對的圓心角相等。



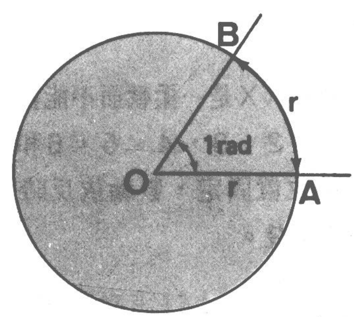
(b)

問題

1.　∠AOB等於幾度幾分？ __________

　　右圖中，圓O的半徑是 r，若$\overset{\frown}{AB}$的長度恰好也等於 r，則$\overset{\frown}{AB}$所對的圓心角∠AOB的大小稱爲1弧度(radian)，記做1 rad　(註)

　　顯然上面圖 b) 中，
∠AOB=∠BOC=1 rad
∠AOC=2 rad
∠AOD=3 rad
∠AOG=6 rad
周角∠AOH=2π rad

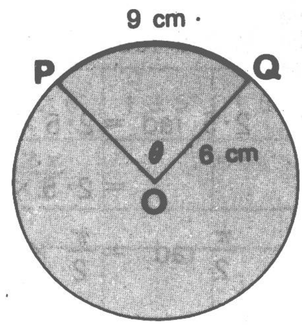


問題

2.　一平角等於幾弧度？一直角等於幾弧度？ __________

【註】：「弧度」亦譯做「弳」。

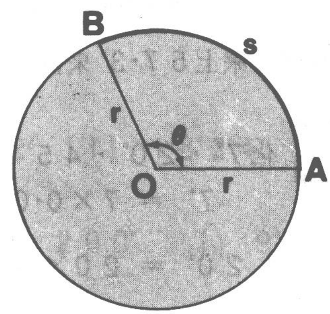
例 1 在半徑 $r = 6$ cm 的圓上，一弧長 9 cm。
求此弧所對圓心角（以弧度做單位）。



解： 求圓心角的弧度數，祇須求出它所對的弧是半徑長的若干倍。因此圓心角等於

$$\theta = \frac{9}{6} = 1 \cdot 5 \text{ rad}$$

例 2 在半徑 $r = 6$ cm 的圓中，若圓心角 $\theta = 0 \cdot 25$ rad，
求此圓心角所對的弧長。



一般的說，若 r 是圓的半徑長，s 是一弧的長，θ 是此弧所對圓心角的弧度數，則

$$\theta = \frac{s}{r}$$

或即 $s = r\theta$

度與弧度的互換

1 周角等於 360°，也等於 2π rad 所以

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57 \cdot 29578^\circ \text{（七個有效數字）}$$

$$= 57 \cdot 3^\circ \quad \text{（三個有效數字）}$$

$$\boxed{\therefore \theta \text{ rad} = \theta \times \frac{180^\circ}{\pi} = \theta \times 57 \cdot 3^\circ}$$

又 $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ rad

$= 0 \cdot 0174532$ rad $= 0 \cdot 0175$ rad （三個有效數字）

$$\boxed{\therefore x^\circ = \frac{\pi x}{180} \text{ rad} = 0 \cdot 0175x \text{ rad}}$$

例3 將2·5 rad，$\frac{\pi}{2}$ rad，$\frac{4\pi}{9}$ rad，化爲度、分、秒制。

解：
$$2\cdot5\ \text{rad} = 2\cdot5 \times \frac{180^\circ}{\pi}$$
$$= 2\cdot5 \times 57\cdot3^\circ = 143\cdot2^\circ$$
$$\frac{\pi}{2}\ \text{rad} = \frac{\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ$$
$$\frac{4\pi}{9}\ \text{rad} = \frac{4\pi}{9} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 80^\circ$$

若一角的弧度數是π的倍數或分數，把它變做度數的時候，通常將該數乘上$\frac{180^\circ}{\pi}$。這樣比較乘上$57\cdot3^\circ$來得方便。

例4 化7°，20°，45°，120°爲弧度數。

解：
$$7^\circ = 7 \times 0\cdot0175\ \text{rad} = 0\cdot1225\ \text{rad.}$$
$$20^\circ = 20 \times \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{\pi}{9}\ \text{rad}$$
$$45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{\pi}{4}\ \text{rad}$$
$$120^\circ = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad}$$

以π的簡單分數表出一角的弧度數，比較用近似小數更爲方便。用弧度單位表示角的大小時，習慣上不用寫單位，例如：

$$20^\circ = \frac{\pi}{9}, \qquad 45^\circ = \frac{\pi}{4}。$$

一般數學表都編印有度與弧度的換算表，很容易查出

$$86^\circ26' = 1\cdot5010 + 0\cdot0076$$
$$= 1\cdot5086\ \ \text{rad}$$
$$1\cdot23\ \ \text{rad} = 57\cdot30^\circ + 11\cdot46^\circ + 1\cdot72^\circ$$
$$= 70\cdot48^\circ$$

一些特別角的弧度數常用π表示，不化爲小數。

例 5 填寫換算表：

a)

度 數	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
弧度數	0		$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2\pi}{3}$		

b)

度 數								330°
弧度數	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

練習 6·1

1. 將角度化做弧度：

a) 12° b) 22.5° c) 17° d) 100° e) $32'$ f) $16^\circ 24'$

2. 將角度化做弧度，用 π 的分數表示：

a) 15° b) 22.5° c) 36° d) 75° e) 200° f) 9°

3. 飛輪每分鐘轉動120次，問此飛輪一半徑每秒鐘轉動多少弧度？

4. 時鐘面上的秒針每秒鐘轉動多少弧度？

5. 化弧度做角度：

a) 3 rad b) 0·4 rad c) $\frac{3}{4}$ rad

d) $\frac{\pi}{8}$ rad e) $\frac{5\pi}{12}$ rad f) $\frac{4\pi}{9}$ rad

g) $\frac{7\pi}{18}$ rad h) 0.2π rad

6. 求三角比值：

a) $\sin\frac{\pi}{3}$ b) $\cos\frac{\pi}{4}$ c) $\tan\frac{\pi}{6}$

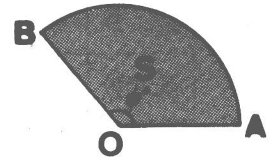
d) $\tan\frac{3\pi}{5}$ e) $\cos 1$ f) $\sin 0.5$

7. 設 s 表一圓弧的長，θ 表該弧所對圓心角，求圓之半徑長。

a) 已知 $s = 14\pi$ cm， $\theta = \frac{7\pi}{5}$ rad

b) 已知 $s = 15$ cm， $\theta = 60^\circ$

6·2　扇形的面積



大家都知道，扇形是圓的一部份，它的面積可由半徑和中心角表出。若半徑是 r ，中心角是ϕ°，則面積：

$$S=\pi r^2\times\frac{\phi}{360}$$

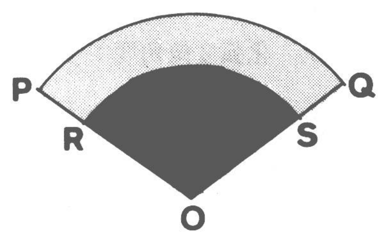
如果中心角改用弧度表示，這面積公式更爲簡單。設　$\phi^\circ=\theta$　rad，　即

$$\theta=\phi\times\frac{\pi}{180}\qquad \text{即}\qquad \phi=\theta\times\frac{180}{\pi}$$

$$\therefore\quad S=\pi r^2\times\theta\times\frac{180}{\pi}\times\frac{1}{360}$$

$$\boxed{\therefore\quad S=\frac{1}{2}r^2\theta}$$

例 1　右圖中，兩扇形相疊，$\overset{\frown}{PQ}$與$\overset{\frown}{RS}$有相同的圓心及中心角。



$\overset{\frown}{RS}=10$ cm，

$OR=7$ cm，　$OP=10$ cm。

求 a) 中心角θ的弧度數，

b) $\overset{\frown}{PQ}$的長度，

c) 描影區域PQRS的面積。

解：

a) 弧長公式　$s=r\theta$。　看扇形ORS

$$\therefore\quad \theta=\frac{\overset{\frown}{RS}}{OR}=\frac{10}{7}\text{ rad}$$

b) 再看扇形OPQ，

$$\overset{\frown}{PQ}=OP\cdot\theta=10\times\frac{10}{7}=\frac{100}{7}\text{ cm}$$

c) 扇形OPQ的面積 $S_1 = \frac{1}{2} \times OP^2 \times \theta = \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{10}{7} cm^2$

扇形ORS的面積

$$S_2 = \frac{1}{2} \times OR^2 \times \theta = \frac{1}{2} \times 49 \times \frac{10}{7} \ cm^2$$

∴ 描影區域PQRS的面積

$$S_1 - S_2 = \frac{1}{2} \times (100 - 49) \times \frac{10}{7} = 36{\cdot}4 cm^2$$

例2

a) 一扇形的弧長20 cm，半徑長8 cm。求此扇形的中心角及面積。

b) 試以扇形的弧長 s 及半徑長 r 表出面積 S。

解：

a) 中心角 $\theta = \frac{s}{r} = \frac{20}{8} = 2{\cdot}5 \ rad$

面積 $S = \frac{1}{2} r^2 \theta$

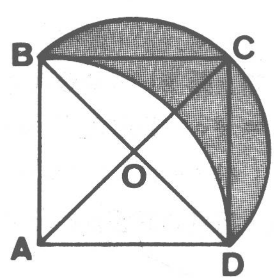
$$= \frac{1}{2} \times 8^2 \times 2{\cdot}5 = 80 cm^2$$

b) $\theta = \frac{s}{r}$， $S = \frac{1}{2} r^2 \theta$

$$= \frac{1}{2} r s$$

本章版頭的月形，作法如下：

先作正方形ABCD，O是正方形兩對角線交點。以O爲圓心，BD爲直徑作半圓弧BCD，又以A爲圓心，AB爲半徑作弧BD。兩弧所圍成的閉合區域便是月形。



例 3 上圖正方形ＡＢＣＤ之邊長是 a，求月形面積。

解： 月形面積＝半圓ＢＣＤ面積＋△ＡＢＤ面積－扇形ＡＢＤ面積。

$AB = a$， $BD = \sqrt{2}\,a$

半圓ＢＣＤ面積 $= \dfrac{\pi}{4}(\sqrt{2}\,a)^2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{4}a^2$

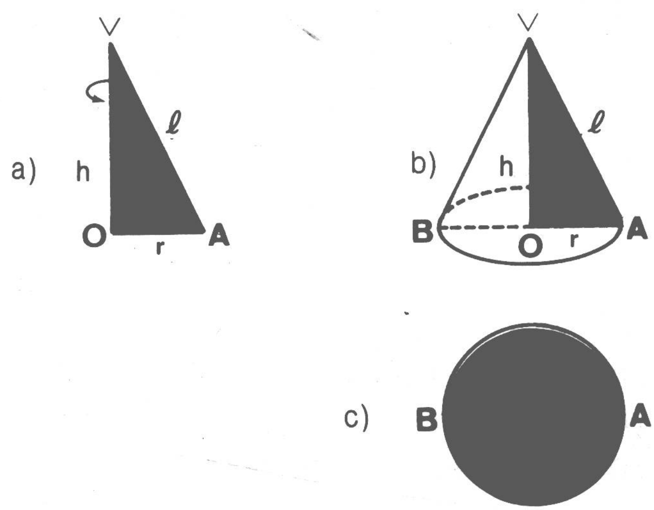
△ＡＢＤ面積 $= \dfrac{1}{2}a^2$

扇面ＡＢＤ面積 $= \pi a^2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{\pi}{4}a^2$

∴ 月形面積 $= \dfrac{1}{4}\pi a^2 + \dfrac{1}{2}a^2 - \dfrac{1}{4}\pi a^2 = \dfrac{1}{2}a^2$

由例３可知，一個由兩圓弧構成的圖形，它的面積等於半個正方形。古代數學家對這樣的問題曾經過思考，並提出了下面的問題：可以作一正方形，使它的面積恰好等於一已知圓嗎？結果找到了答案：不可以。

直角三角形繞其一直角邊旋轉一周所產生的立體幾何圖形稱爲一直圓錐（ right circular cone ）。

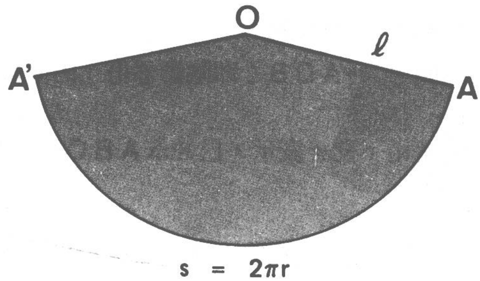


如上圖 a)，ＶＯＡ爲直角三角形，夾直角的兩邊爲 $VO = h$， $OA = r$， 斜邊 $VA = \ell$。 此直角三角形繞ＶＯ旋轉一周，在空間生成一直圓錐，如圖 b)，h是直圓錐的高（ altitude ）； r 是底半徑，底面是一圓，如圖 c)； **ℓ 是由頂點Ｖ至底周界任一點的距離，稱爲此直圓錐的母線**（ element ）。h， r 與 ℓ 有這樣的關係：

$$\ell^2 = h^2 + r^2$$

錐體的底周界長 $2\pi r$。將直圓錐沿一母線剪開，攤平，得一扇形，它的半徑長爲 ℓ，弧長 $2\pi r$。據扇形面積公式得

$$S = \frac{1}{2} \times \ell \times (2\pi r) = \pi r \ell$$



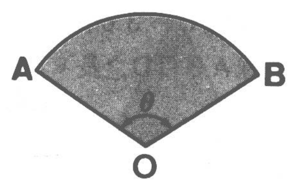
$$\boxed{\text{或即}\quad S = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}}$$

這就是直圓錐的側面積公式。

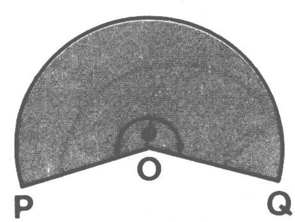
相信大家還記得本書第五册已經介紹過這公式。由於當時未有討論到弧度制，闡述過程較爲繁贅。弧度制的優點不祗在於簡化有關扇形問題的討論，其實，在高等數學裏，它的用途更多。

練習 6·2

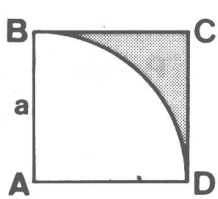
1. 在右圖扇形，已知 $OA = 9$ cm，
   $\overset{\frown}{AB} = 20$ cm，
   求 a) 中心角 θ 的弧度數，
   b) θ 的角度數。
   c) 扇形面積。



2. 在右圖扇形，已知 $OP = 5{\cdot}5$ cm，
   $\overset{\frown}{PQ} = 21$ cm，
   求 a) 中心角 ϕ 的弧度數，
   b) ϕ 的角度數，
   c) 扇形面積。



3. a) 下圖中，ABCD爲正方形， $AB = a$，$\overset{\frown}{BD}$ 是以A做圓心的圓弧。求陰影部份面積。(保留 π 在答案)



   b) 下圖中，ABCD爲正方形，$AB = a$， 分別以A及C做圓心，a做半徑作兩弧，求此兩弧間(即陰影部份)的面積。(保留 π 在答案)