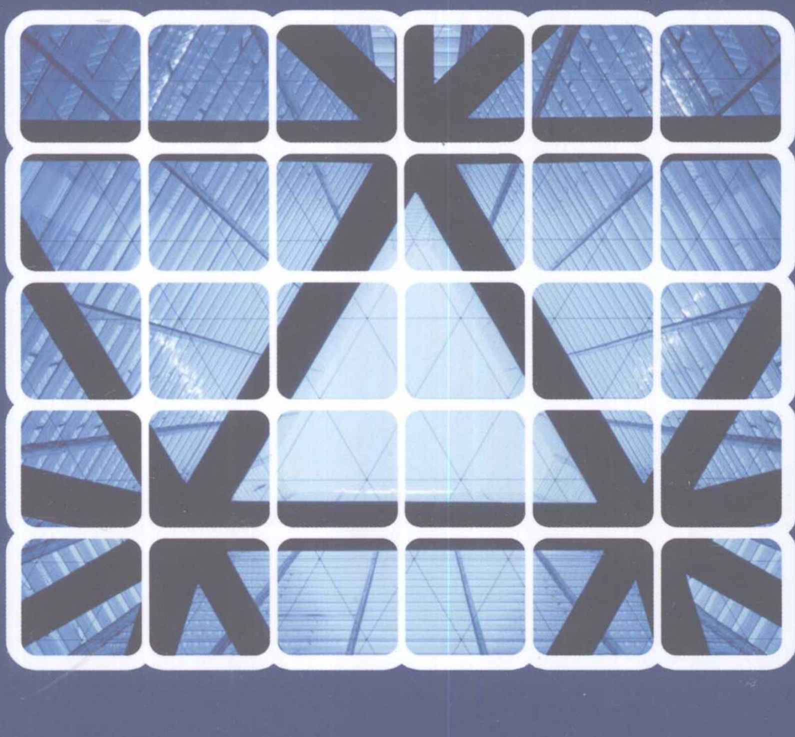
十二五

面向应用型高校“十二五”规划教材

公共基础课程

概率论与数理统计同步辅导

王春华　刘海峰　秦玉芳　主　编



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

概率论与数理统计同步辅导

王春华　刘海峰　秦玉芳　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书是高等学校非数学专业概率论与数理统计课程的学习辅导书，全书内容共有五个部分，第一、二部分是概率论与数理统计的内容精要、典型例题、习题A、B以及相关数学史的介绍；第三部分是综合模拟测试题；第四部分是近年来全国硕士研究生入学统一考试中《概率论与数理统计》部分的真题及详解；第五部分是所有习题及模拟测试题的答案详解.

本书可以作为非数学专业本科生学习概率论与数理统计的辅导用书，也可以作为教师的教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计同步辅导/王春华，刘海峰，秦玉芳主编. —北京：电子工业出版社，2011.8

面向应用型高校“十二五”规划教材 • 公共基础课程

ISBN 978-7-121-14016-7

I. ①概… II. ①王… ②刘… ③秦… III. ①概率论－高等学校－教学参考资料 ②数理统计－高等学校－教学参考资料 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 132435 号

策划编辑：谭海平

责任编辑：谭海平

印　　刷：北京市顺义兴华印刷厂

装　　订：三河市双峰印刷装订有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036

开　　本：787×1092　1/16　印张：14.5　字数：403 千字

印　　次：2011 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：28.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　　言

概率论与数理统计是用确定的数学方法处理各种与随机现象有关的问题的一门学科，因其在数学、自然科学、工程控制、生命科学、社会科学以及经济金融等各学科领域的广泛应用，业已成为我国高等院校理、工、农、经管等专业的必修基础课之一．本课程包括两部分内容：概率论和数理统计．前一部分侧重于理论探讨，介绍概率论的基本概念，建立一系列的定理和公式，寻求解决随机问题的方法．后一部分则以概率论作为理论基础，研究如何对实验结果进行统计推断．本课程的先修课程是高等数学和线性代数，后继课程有生物统计学、计量经济学、时间序列分析、多元统计分析、风险理论、贝叶斯统计、参数与非参数估计等．

根据编者的教学经验，学生在理解和解决古典概型问题时没有困难，但这并非概率论与数理统计课的主要任务．通过本课程的学习，学生必须对随机现象的认识从古典赌博游戏上升到现代概率论的高度，能灵活运用所学知识解决实际问题，并能对所用的分析方法给出合理的数学解释．为达到这个学习目的，学生既需要准确而深入地把握概率论与数理统计的基本概念，又需要熟练掌握基本的数学分析技巧．而这往往是初学概率论与数理统计这门课程的学生难以兼备的．造成这种状况的原因，可能是学生初学概率论时过度依赖于排列组合方法，对概率论与数理统计这门课程的认识有偏差；也可能是学生的高等数学功底不够扎实，实际运用的时候存在计算层面的障碍．为帮助学生克服在学习概率论与数理统计这门课中可能遇到的种种困难，我们特意编写了这本辅导书．

本辅导书的内容共有五部分．前两部分包括概率论与数理统计的内容精要、典型例题分析、习题以及相关数学史知识，占全书篇幅的一半以上，目的是帮助学生形成对本课程核心内容的总体认识，逐步掌握分析和解决随机问题的基本方法，尤其是要帮助学生在学习例题和自己解答习题的过程中学会思路分析和规范答题，逐步培养对本课程的学习兴趣．第三部分为综合模拟测试题，可供学生期末备考及检验自己的学习成效．第四部分是近年来全国硕士研究生入学统一考试（数学一、数学三）概率论与数理统计部分的真题及详解，供学有余力的学生参考，同时也可供打算考研深造的学生复习备考．第五部分是本辅导书各章的习题 A、习题 B 及模拟测试题的答案详解．

需要强调的是，任何课程辅导书均不能代替教材，更不能代替教师的课堂讲授和课余指导，本书也不例外．本书也不是相关教材的习题全解．希望学生在通读教材和领会本书例题的前提下，坚持至少独立解答习题 A 的题目．遇到不会解答的题目，读者应该先回顾教材的相关内容，并参考与之类似的例题，而绝不可以遇到问题就翻看答案，否则，就失去了本书的作用，也违背了编者编写本书的初衷．

本书主要由上海海洋大学信息学院一线教师刘海峰（概率论部分）和秦玉芳（数理统计部分）编写，王春华统稿．电子工业出版社的编辑促成了本书的出版，感谢他们为完善本书所做的各种努力．

由于编者学识所限，本书提供的解法绝非完美，相信用心的读者一定能给出更佳的解答，我们也希望能听到读者对本书的各种看法和建议．

2011年6月

于上海海洋大学

目　　录

第一部分　概　率　论

第一章　随机事件及其概率 …… 2
一、内容精要 …… 2
二、例题选讲 …… 3
三、习题 A …… 13
四、习题 B …… 17
五、扩展阅读 …… 19
第二章　随机变量及其分布 …… 21
一、内容精要 …… 21
二、例题选讲 …… 22
三、习题 A …… 28
四、习题 B …… 31
五、扩展阅读 …… 33
第三章　多维随机变量及其分布 …… 37
一、内容精要 …… 37
二、例题选讲 …… 37
三、习题 A …… 46
四、习题 B …… 50
五、扩展阅读 …… 51
第四章　随机变量的数字特征 …… 53
一、内容精要 …… 53
二、例题选讲 …… 54
三、习题 A …… 62
四、习题 B …… 65
五、扩展阅读 …… 68

第二部分　数　理　统　计

第五章　数理统计的基础知识 …… 71
一、内容精要 …… 71

二、例题选讲 71
三、习题 A 77
四、习题 B 78
五、扩展阅读 80
第六章　参数估计 82
一、内容精要 82
二、例题选讲 82
三、习题 A 89
四、习题 B 91
五、扩展阅读 94
第七章　假设检验 96
一、内容精要 96
二、例题选讲 96
三、习题 A 102
四、习题 B 104
五、扩展阅读 107
第八章　方差分析与回归分析 108
一、内容精要 108
二、例题选讲 108
三、习题 A 111
四、习题 B 113
五、扩展阅读 114

第三部分　综合测试题

综合测试题（一） 117
综合测试题（二） 119
综合测试题（三） 121

第四部分　历年考研真题解析

（一）概率论部分 124
（二）数理统计部分 134

第五部分　附　　录

附录一　概率论部分习题答案 142
第一章　随机事件及其概率习题答案 142

第二章　随机变量及其分布习题答案……153
第三章　多维随机变量及其分布习题答案……161
第四章　随机变量的数字特征习题答案……173
附录二　数理统计部分习题答案……186
第五章　数理统计的基础知识习题答案……186
第六章　参数估计习题答案……192
第七章　假设检验习题答案……200
第八章　方差分析与回归分析习题答案……207
附录三　综合测试题答案……212
综合测试题（一）参考答案……212
综合测试题（二）参考答案……215
综合测试题（三）参考答案……218
附录四　标准正态分布表……221
参考文献……222

第一部分

概率论

第一章 随机事件及其概率

一、内容精要

1. 基本概念

(1) 样本空间, 基本事件与复合事件;

(2) 事件间的关系, 事件的运算律;

(3) 随机事件的概率;

(4) 古典概型, 几何概型;

(5) 条件概率, 事件的独立性, 独立重复试验;

(6) 后验概率.

2. 主要结论

(1) 概率的性质;

(2) 一般加法公式;

(3) 乘法公式, 两个事件独立的充要条件;

(4) 事件的划分, 全概率公式;

(5) 贝叶斯公式.

3. 基本方法

(1) 事件的集合表示;

(2) 复杂事件概率的计算;

(3) 加法原理, 乘法原理; 求解古典概型问题的组合, 排列法;

(4) 事件的划分, 全概率公式;

(5) 贝叶斯方法.

4. 考查要点

(1) 事件的集合表示;

(2) 事件的关系和运算;

(3) 事件的独立性;

(4) 条件概率及全概率公式的应用;

(5) 贝叶斯公式及其应用.

二、例题选讲

例 1.1. 将一枚均匀的硬币抛两次, A, B, C 分别表示事件"第一次出现正面", "两次出现同一面", "至少有一次出现正面". 试写出样本空间及事件 A, B, C 中的样本点.

解: 将一枚均匀硬币抛一次, 可能出现的结果有两种: $\omega_1=\{\text{正面向上}\}$ 和 $\omega_2=\{\text{反面向上}\}$. 抛两次硬币可能的结果有四种:

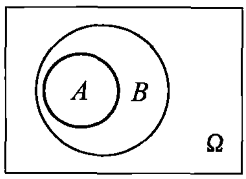
$$\begin{aligned}\omega_{11} &= \{\text{第一次正面向上,第二次正面向上}\};\\ \omega_{12} &= \{\text{第一次正面向上,第二次反面向上}\};\\ \omega_{21} &= \{\text{第一次反面向上,第二次正面向上}\};\\ \omega_{22} &= \{\text{第一次反面向上,第二次反面向上}\}.\end{aligned}$$

因此, 样本空间 $\Omega=\{\omega_{11},\omega_{12},\omega_{21},\omega_{22}\}$. $A=\{\omega_{11},\omega_{12}\}$, $B=\{\omega_{11},\omega_{22}\}$, $C=\{\omega_{11},\omega_{12},\omega_{21}\}$.

例 1.2. 判断下列各式哪个成立, 哪个不成立, 并说明为什么.

1. 若 $A\subset B$, 则 $\overline{B}\subset\overline{A}$;
2. $(A\cup B)-B=A$;
3. $A(B-C)=AB-AC$.

解: 1. 若 $A\subset B$, 则 $\overline{B}\subset\overline{A}$, 这可以由下面的维恩图看出. 事实上, 若 $\omega\in\overline{B}$, 即 ω 不属于 B, 则 ω 也不属于 A, 否则由条件 $A\subset B$ 便知 $\omega\in B$, 矛盾. 这就证明了 $\overline{B}\subset\overline{A}$.



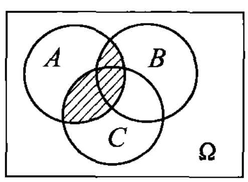
2. 一般地, $(A\cup B)-B=A$ 并不成立. 事实上, 可以证明 $(A\cup B)-B=A-B$ 成立.

3. $A(B-C)=AB-AC$ 成立, 该式可以由事件运算的分配律得到.

注: 此类题目一般需要借助维恩图分析, 然而严格的证明必须紧扣定义或利用集合的运算性质进行化简.

例 1.3. 化简 $\overline{(\overline{AB}\cup C)(\overline{AC})}$.

解: 本题主要是考察对偶律, 利用事件的运算性质化简即可得到. $\overline{(\overline{AB}\cup C)(\overline{AC})}=\overline{\overline{AB}\cup C}\cup\overline{\overline{AC}}=(AB\cap\overline{C})\cup(AC)=A\cap((B\cap\overline{C})\cup C)=A\cap(B\cup C)$. 结果如下图所示.



例 1.4. 两个事件互不相容与两个事件对立有何区别? 举例说明.

解: 两个事件互不相容（即互斥）是指两事件不能都发生, 即 $A\cap B=\varnothing$; 而两事件相互对立是指两事件恰有一个发生, 即同时满足 $A\cap B=\varnothing$ 和 $A\cup B=\Omega$. 例如：掷一次骰子并观察其点数, 令 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$, $C=\{6\}$, 则事件 A 与 B 对立, 而事件 A 与 C 虽然互斥但不是对立事件.

例 1.5. 设袋中装有 a 只红球, b 只白球, 每次自袋中任取一个球, 观察颜色后放回, 并同时再放入 m 个与所取出的那个同色的球. 连续在袋中取球四次, 试求第一, 二次取到红球且第三次取到白球,第四次取到红球的概率.

解: 设事件 $A=\{$第一次取到红球$\}$, $B=\{$第二次取到红球$\}$, $C=\{$第三次取到白球$\}$, $D=\{$第四次取到红球$\}$, 则要求的概率为 $P(ABCD)$. 由乘法公式可得

$$\begin{aligned}
P(ABCD) &= P(D|ABC)P(ABC)\\
&= P(D|ABC)P(C|AB)P(B|A)P(A)\\
&= \frac{a}{a+b}P(B|A)P(C|AB)P(D|ABC)\\
&= \frac{a}{a+b}\frac{a+m}{a+b+m}P(C|AB)P(D|ABC)\\
&= \frac{a}{a+b}\frac{a+m}{a+b+m}\frac{b}{a+b+2m}P(D|ABC)\\
&= \frac{a}{a+b}\frac{a+m}{a+b+m}\frac{b}{a+b+2m}\frac{a+2m}{a+b+3m}\\
&= \frac{a(a+m)(a+2m)b}{(a+b)(a+b+m)(a+b+2m)(a+b+3m)}.
\end{aligned}$$

注：等式 $P(ABCD)=P(A)P(B|A)P(C|AB)P(D|ABC)$ 是乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 的推广形式, 被形象地称为“望远镜”公式.

例 1.6. 设 $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$, 求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解: 根据对偶律, $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$. 所以, $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(A\cap B)$. 而由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 知 $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{12}$. 所以 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(A\cap B)=\frac{11}{12}$.

注：一般地, $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$, 当且仅当事件 A 和 B 相互独立的时候才有 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. 本题目中 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立属于巧合.

例 1.7. 袋中装有 5 个白球, 3 个黑球, 从中一次任取两个.

1. 求取到的两个球颜色不同的概率;
2. 求取到的两个球中有黑球的概率.

解: 袋中共有 8 个球, 一次任取两个, 共 $C_8^2=28$ 种不同取法, 即样本空间中含有 28 个基本事件. 假设这些取法是等可能的. 设事件 $A=\{$取出两个黑球$\}$, $B=\{$取出两个白球$\}$, $C=\{$取出一个黑球一个白球$\}$, 那么 A 中样本点的个数为 $C_3^2=3$, B 中样本点的个数为 $C_5^2=10$, C 中样本点的个数为 $C_3^1C_5^1=15$. 所以

1. 取到的两个球颜色不同的概率为 $P(C)=\frac{15}{28}$;

2. 取到的两个球中有黑球的概率 $P(A\cup C)=\frac{3}{28}+\frac{15}{28}=\frac{9}{14}$.

注：第二问也可以这样做. 因为 A, B, C 构成全空间的一个划分, 所以 $\overline{A\cup C}=B$. 又因为 $P(B)=\frac{5}{14}$, 所以 $P(A\cup C)=1-P(B)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$.

例 1.8. 从一副扑克牌中任取 3 张（不重复）, 求取出的 3 张牌中至少有 2 张花色相同的概率.

解: 52 张扑克牌各不相同, 从中任取 3 张, 共有 C_{52}^3 种取法. 记事件 $A=\{$三张牌的花色各不同$\}$, 则 A 中样本点个数为 $C_4^3 13^3$. 故取出的 3 张牌中至少两张花色相同的概率为

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{C_4^3 13^3}{C_{52}^3}=\frac{256}{425}\doteq 0.6024\,.$$

例 1.9. 10 人中有一对夫妇, 他们随意坐在一张圆桌周围, 求该对夫妇紧挨着坐在一起的概率.

解: 方法一. 10个不同座位由 10 个人去坐, 坐法共有 $A_{10}^{10}=10!$ 种. 若要该对夫妇恰好坐在一起, 可以先为丈夫安排座位, 其有 C_{10}^1 种选法; 再为妻子安排座位, 则只能坐在丈夫的两侧, 有 C_2^1 种坐法, 最后为其他人安排座位, 有 A_8^8 种坐法. 由乘法原理, 该对夫妇恰好坐在一起的坐法共 $C_{10}^1C_2^1A_8^8$ 种, 概率为 $\frac{C_{10}^1C_2^1A_8^8}{A_{10}^{10}}=\frac{2}{9}$.

方法二. 假设丈夫及其余人先坐定, 则妻子后来插空坐, 有 C_9^1 种选择, 而要使得夫妇坐在一起, 则妻子只能坐在丈夫左右, 有 C_2^1 种选择. 所以, 该对夫妇正好坐在一起的概率为 $\frac{2}{9}$.

例 1.10. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只, 问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?

解: 从 10 只不同鞋子中任取 4 只, 共有 C_{10}^4 种取法. 结果只有三种可能：$A=\{$只配成一双$\}$, $B=\{$恰好配成两双$\}$, $C=\{$皆不成双$\}$.

方法一. 从反面考虑. 若取出的这 4 只中任意两只均不能配成一双, 则有 $C_5^4\times 2^4$ 种取法. 因此, 至少有两只能配成一双的概率为

$$1-P(C)=1-\frac{2^4 5}{C_{10}^4}=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}\,.$$

方法二. 从正面考虑. 从 10 只鞋子中任取 4 只, 若恰好只配成一双, 则有 $\frac{C_5^1C_4^2\times 2^2}{3!}=120$ 种取法; 若恰好配成两双, 则有 $C_5^2=10$ 种取法. 因此, 至少配成一双的概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{120+10}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}\,.$$

例 1.11. 假设每个部件用 3 只铆钉, 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上, 则这个部件强度就太弱. 现有 50 只铆钉, 其中 3 只铆钉强度太弱. 将这50只铆钉随机地取来用在 10 个部件上, 问发生一个部件强度太弱的概率是多少?

解: 50 只铆钉随机选用在 10 个部件上, 共有 $C_{50}^3C_{47}^3\cdots C_{23}^3$ 种方法. 有一个部件强度太弱, 即三只强度太弱的铆钉恰好都装在该部件上, 则有 $C_{10}^1C_{47}^3C_{44}^3\cdots C_{23}^3$ 种方法. 因此, 发生一个部件强度太弱的概率为 $\frac{C_{10}^1C_{47}^3C_{44}^3\cdots C_{23}^3}{C_{50}^3C_{47}^3C_{44}^3\cdots C_{23}^3}=\frac{1}{1960}$.

注：该题实为乘法原理.

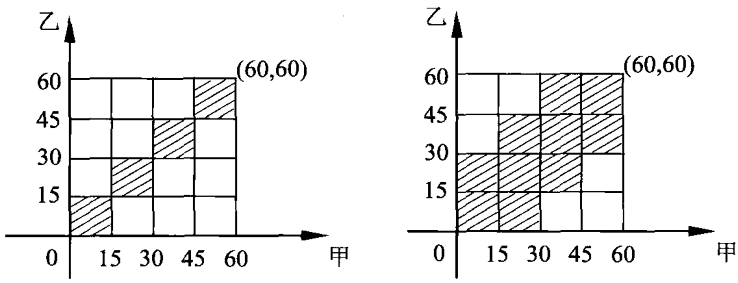
例 1.12. 甲,乙两人约定在下午 1 点至 2 点之间到某站乘公共汽车, 在这段时间内有 4 班公共汽车, 它们的开车时刻分别为 1:15, 1:30, 1:45, 2:00 . 假定甲, 乙两人到达车站的时刻互不相关, 且每人在 1 点到 2 点的任何时刻到达车站是等可能的. 如果他们约定:

1. 见车就乘;

2. 最多等一辆车.

求甲, 乙同乘一车的概率.

解: 1. 约定见车就乘. 若要使得两人同乘第一班车, 则他们必须同在 1:00~1:15 之间到达车站, 同样, 要使得两人同乘第二班车, 则他们必须同在 1:15~1:30 之间到达车站, 依次类推, 两人到达时刻必如下面左图阴影所示. 因此, 见车就乘条件下两人乘同一班车的概率为 $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.



2. 约定最多等一辆车, 则两人到达车站的时刻 x, y $(0 \le x, y \le 60)$ 如上面右图阴影所示, 所以两人乘同一辆车的概率为 $\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$.

注: 等待问题通常用几何概率模型解决.

例 1.13. 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取 2 件, 已知所取 2 件产品中有 1 件不合格品, 求另一件也是不合格品的概率.

解: 任取两件产品的可能结果有三种: 两件均是不合格品, 恰有一件不合格品或者两件均是合格品. 令事件 $A=\{$有不合格品$\}$, $B=\{$两件均是不合格品$\}$, 则 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$. 所以, 已知所取 2 件产品中有 1 件不合格品, 另一件也是不合格品的概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}\,.$$

例 1.14. 已知$P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$, 求 $P(A\cup B)$.

解: 由 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 知 $P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{12}$, 再由 $P(AB)=P(A|B)P(B)$ 得

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}\,.$$

最后, 由一般加法公式得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\,.$$

注: 凡涉及条件概率的问题, 求解 $P(AB)$ 是关键, 因为它是联系事件 A 和 B 的量.

例 1.15. 甲, 乙两选手进行乒乓球单打比赛, 甲先发球. 甲发球成功后, 乙回球失误的概率为 0.3 ; 若乙回球成功, 甲回球失误的概率为 0.4 ; 若甲回球成功, 乙再次回球失误的概率为 0.5 . 试计算这几个回合中乙输掉 1 分的概率.

解: 乙输掉 1 分的情况只有两种: 第一次回球失误或者第二次回球失误. 记事件 $A_i=$ {乙第 i 次回球失误} $(i=1,\,2)$, 事件 $B=$ {乙输掉 1 分}, $C=$ {甲回球成功}, 则

$$P(B)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0.51\,,$$

其中 $P(A_1)=0.3$, $P(A_2)=P(A_2|\overline{A}_1C)P(\overline{A}_1)C=0.7\times0.6\times0.5=0.21$.

例 1.16. 12 个乒乓球中有 9 个是新的, 3 个是旧的. 第一次比赛取出来 3 个, 用完后放回去, 第二次比赛又取出 3 个. 求第二次取到的 3 个球中有 2 个新球的概率.

解: 第二次取到新球的概率与袋中新球的个数有关, 而此时袋中新球的个数又与第一次取出新球的个数有关. 若第二次取球前有 m 个新球, n 个旧球, 则 $m+n=12$ 且 $6\le m\le 9$, $3\le n\le 6$, 第二次取出的 3 个球中恰有 2 个新球的概率为 $\frac{C_m^2C_n^1}{C_{12}^3}$.

令 $A_i=$ {第一次比赛取出 i 个新球} $(i=0,\,1,\,2,\,3)$, $B=$ {第二次比赛取出 2 个新球}, 则

$$\begin{aligned}
P(B) &= P\left(B\cap\left(\bigcup_{i=0}^{3}A_i\right)\right)=P\left(\bigcup_{i=0}^{3}A_iB\right)\\
&= \sum_{i=0}^{3}P(A_iB)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)\\
&= \frac{C_3^3}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_3^1C_9^2}{C_{12}^3}+\frac{C_3^2C_9^1}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_4^1C_8^2}{C_{12}^3}+\frac{C_3^1C_9^2}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_5^1C_7^2}{C_{12}^3}+\frac{C_9^3}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_6^1C_6^2}{C_{12}^3}\\
&= \frac{1\times108+27\times112+108\times105+84\times90}{220^2}\\
&= \frac{1377}{3025}\doteq0.4552\,.
\end{aligned}$$

例 1.17. 轰炸机要完成它的使命, 驾驶员必须要找到目标, 同时投弹员必须要投中目标. 设驾驶员甲, 乙找到目标的概率分别为 0.9 , 0.8 ; 投弹员丙, 丁在找到目标的条件下投中的概率分别为 0.7 , 0.6 . 现在要配备两组轰炸人员, 问甲, 乙, 丙, 丁怎样配合才能使完成使命有较大的概率（只要有一架飞机投中目标即完成使命）? 求此概率是多少.

解: 只能有两种组合方式：甲与丙, 乙与丁, 或者甲与丁, 乙与丙. 令 $A=$ {甲找到目标}, $B=$ {乙找到目标}, $C=$ {丙投中}, $D=$ {丁投中}. 因为 $P(A)=0.9$, $P(B)=0.8$, $P(AC)=P(C|A)P(A)=0.63$, $P(BD)=P(D|B)P(B)=0.48$. 若两组人员能否击中目标是独立的, 则甲与丙, 乙与丁搭配完成使命的概率为

$$P(AC\cup BD)=P(AC)+P(BD)-P(AC)P(BD)=0.8076\,.$$

因为$P(AD)=P(D|A)P(A)=0.54$, $P(BC)=P(C|B)P(B)=0.56$, 若两组人员能否击中目标是独立的, 则甲与丁, 乙与丙搭配完成使命的概率为

$$P(AD\cup BC)=P(AD)+P(BC)-P(AD)P(BC)=0.7976\,.$$

所以, 甲与丙, 乙与丁搭配完成使命的概率较大, 此概率为 0.8076 .

注: 本题虽然简单, 但涉及本章的几个重要概念: 条件概率, 全概率公式, 概率的一般加法公式及事件的独立性.

例 1.18. 制造一种零件可采用两种工艺, 第一种工艺有三道工序, 每道工序的废品率分别为 0.1 , 0.2 , 0.3 ; 第二种工艺有两道工序, 每道工序的废品率都是 0.2 . 如果用第一种工艺, 合格零件中一级品率有 0.9 ; 而用第二种工艺, 合格品中的一级品率只有 0.8 . 试问哪一种工艺能保证得到一级品的概率较大?

解: 设 $A=\{$第一种工艺得到的合格品$\}$, $B=\{$第二种工艺得到的合格品$\}$, 则 $P(A)=(1-0.1)(1-0.2)(1-0.3)=0.504$, $P(B)=(1-0.2)^2=0.64$. 令 $C=\{$产品是一级品$\}$, 则 $P(C|A)=0.9$, $P(C|B)=0.8$. 所以,

$$
\begin{aligned}
P(AC) &= P(C|A)P(A)=0.9\times 0.504=0.4536\,, \\
P(BC) &= P(B|A)P(A)=0.8\times 0.64=0.512\,.
\end{aligned}
$$

故第二种工艺得到一级品的概率较大.

注: 本题假设每道工序是否会出次品是相互独立的. 即零件在某道工序产生瑕疵, 则经过其它工序后最终得到的必然是次品. 只有经过每道工序都是正品最终才会得到合格品, 且不一定是一等合格品.

例 1.19. 甲,乙,丙 3 台机床独立地工作, 由 1 个人照管. 某段时间, 它们不需要照管的概率依次是 0.9, 0.8, 0.85 , 求这段时间内, 发生因机床无人照管而停工的事件的概率.

分析: 根据题意, 若只有一台机床需要照管, 则不会导致停工; 若有两台以上的机床同时需要照管, 则至少有一台机床会因无人照管而停工.

解: 设事件 $A=\{$ 甲机床需要照管$\}$, $B=\{$乙机床需要照管$\}$, $C=\{$丙机床需要照管$\}$, 则 $P(A)=0.1$, $P(B)=0.2$, $P(\overline{C})=0.85$, $P(C)=0.15$. 要求的概率为

$$
\begin{aligned}
& P(ABC)+P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC) \\
= {} & P(A)P(B)P(C)+P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C) \\
= {} & 0.1\times 0.2\times 0.15+0.1\times 0.2\times 0.85+0.1\times 0.8\times 0.15+0.9\times 0.2\times 0.15 \\
= {} & 0.059\,.
\end{aligned}
$$

注: 本题目考查了事件的独立性. 也可以用一般加法公式计算要求的概率 $P(AB\cup BC\cup CA)=P(AB)+P(BC)+P(CA)-2P(ABC)=0.059$.

例 1.20. 排球竞赛规则规定: 发球方赢球时得分, 输球时则被对方夺得发球权. 甲,乙两个排球队进行比赛, 已知当甲队发球时, 甲队赢球和输球的概率分别是 0.4 和 0.6 ; 当乙队发球时, 甲队赢球和输球的概率都是 0.5 . 无论哪个队率先发球, 比赛进行到任一队得分时为止, 求当甲队率先发球时各队得分的概率.

解: 该比赛可能发生的情况是: 甲队先发球, 如果乙队接不住, 则甲队得分, 比赛停止; 否则乙队取得发球权. 若乙队发球得分, 则比赛停止; 否则转换发球权 $\cdots$. 设事件 $A=\{$甲队发球得分$\}$, 事件 $B=\{$乙队发球得分$\}$. 则甲队发球时, 比赛可能的结果可以用事件表示成

$$\begin{array}{ll} & A \\ \text{或} & \overline{A}B \\ \text{或} & \overline{A}\,\overline{B}A \\ \text{或} & \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{A}B \\ \text{或} & \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{A}\,\overline{B}A \\ \text{或} & \cdots \end{array}$$

由此可知, 甲队率先发球且得分的概率为

$$\begin{aligned} & P(A\cup\overline{A}\,\overline{B}A\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{A}\,\overline{B}A\cup\cdots) \\ = \; & P(A)+P(\overline{A}\,\overline{B}A)+P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{A}\,\overline{B}A)+\cdots \\ = \; & 0.4+0.4\times 0.3+0.4\times 0.3^2+\cdots \\ = \; & 0.4\times\frac{1}{1-0.3}=\frac{4}{7}\,. \end{aligned}$$

这时乙队得分的概率为 $\frac{3}{7}$.

注：本题假设每个队在比赛的每个回合中回球是否成功相对独立.

例 1.21. 设 A, B, C 三个事件相互独立, 证明: $A\cup B$, AB 肯定与 C 相互独立.

证明: 由三个事件相互独立的定义知：$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$, 而 $P(AB)=P(A)P(B)$, 立即可得 $P(ABC)=P(AB)P(C)$, 即 AB 与 C 相互独立. 要证明 $A\cup B$ 与 C 相互独立, 只需要证明 $P((A\cup B)C)=P(A\cup B)P(C)$. 事实上,

$$\begin{aligned} P((A\cup B)C) &= P(AC\cup BC) \\ &= P(AC)+P(BC)-P(AC\cap BC) \\ &= P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(AB)P(C) \\ &= [P(A)+P(B)-P(AB)]P(C) \\ &= P(A\cup B)P(C). \end{aligned}$$

例 1.22. 某教育书店一天中售出数学类, 外语类及理化类书籍各 50 本, 设每位顾客每类书至多购一本, 其中只购数学书的占 20% , 只购外语书的占 25% , 只购理化书的占 15% , 三类书全购的占 10% , 问：

1. 总共有多少位顾客购书?
2. 只购数学书和外语书的人数占顾客总人数的比例是多少?